Пределы

Определенные выражения при нахождении пределов: $\infty + \infty = \infty$; $\infty \pm A = \infty$; $\infty \cdot A = \infty (A \neq 0)$;

$\frac{A}{\infty} = 0 (A \neq 0)$; $\frac{A}{0} = \infty (A \neq 0)$; $A^{\infty} = \begin{cases} \infty, A > 1, \\ 0, A < 1. \end{cases}$

Неопределенности: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, 1^{∞}.

Раскрытие неопределенностей.

1. $\frac{\infty}{\infty}$. Разделить числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень неизвестного, содержащуюся в дроби. При этом $\frac{A}{x^k} \to 0$ при $x \to \infty$.

2. $\infty - \infty$. Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму; разность дробей привести к общему знаменателю; неопределенность $\infty - \infty$ приводится к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

3. $\frac{0}{0}$. **а).** Многочлены в рациональной дроби разложить на множители и сократить на множитель, дающий нуль. **б).** Разность квадратных корней умножить и разделить на их сумму, а разность кубических корней – на неполный квадрат суммы или сделать замену. **в). Первый замечательный предел** $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{tg\alpha}{\alpha} = 1$; $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\arcsin \alpha}{\alpha} = 1$; $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{arctg\alpha}{\alpha} = 1$.

Сравнение бесконечно малых в точке $\alpha = 0$. **Эквивалентные бесконечно малые:** $\sin \alpha \sim \alpha$; $\sin^2 \alpha \sim \alpha^2$; $tg\alpha \sim \alpha$; $1 - \cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$; $\arcsin \alpha \sim \alpha$; $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$; $e^{\alpha} - 1 \sim \alpha$; $a^{\alpha} - 1 \sim \alpha \ln a$; $(1+\alpha)^n - 1 \sim n\alpha$; $\sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}$.

Второй замечательный предел (неопределенность 1^{∞}). $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$; $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Если $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to a} v(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x \to a} (u(x))^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x \to a} (u(x) - 1) v(x)}$.