

Математические понятия, предложения и доказательства

Задача обучения математике состоит не только в усвоении учащимися теоретических знаний, но и в привитии им умений и навыков применять эти знания не только в усвоении определенных доказательств, но и в приобретении умения рассуждать, доказывать. В обучении математике на любом уровне мы имеем дело с понятиями, предложениями и доказательствами, и усвоение математических знаний сводится к усвоению определенной системы понятий, предложений и их доказательств. Изучение математики включает изучение языка математики, но не сводится только к нему. Понимание логической структуры определений понятий, предложений теории (аксиом и теорем) и доказательств является необходимым условием усвоения знаний.

Математические понятия.

Методика введения математических понятий

Понятие – это форма мышления, в которой отражены существенные (отличительные) свойства объектов изучения.

Содержание понятия – это множество всех существенных признаков данного понятия.

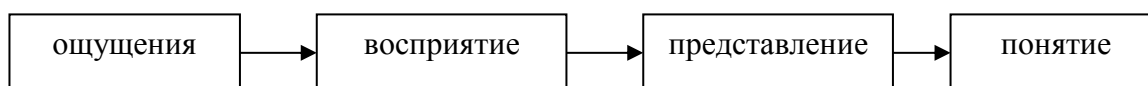
Объем понятия – множество объектов, к которым применимо данное понятие.

Существенные (характеристические) свойства – это такие свойства, каждое из которых необходимо, а все вместе достаточны для характеристики объектов, принадлежащих понятию.

Определение понятия – перечисление необходимых и достаточных признаков понятия, сведенных в связное предложение.

Классификация понятия – процесс выяснения объема понятия; разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды.

Формирование понятий – сложный психологический процесс, протекающий по следующей схеме:



Основные методы введения математических понятий:

1. Конкретно-индуктивный метод.
2. Абстрактно-дедуктивный метод.

Методическая схема конкретно-индуктивного метода:

1. Этап восприятия и ощущения:
 - Отыскание ярких практических примеров, показывающих целесообразность изучения этого понятия.
2. Этап перехода от восприятия к представлению:
 - Выявление различных существенных и несущественных признаков данного понятия (учащиеся).
 - Введение термина, обозначающего данное понятие (учитель).
 - Рассмотрение особых случаев, если они имеются.
 - Мотивировка термина, обозначающего данное понятие (учитель).
3. Этап перехода от представления к понятию:
 - Отбор существенных свойств данного понятия и формулировка определения этого понятия.
 - Первичное определение, внесение поправок, вторичное определение (учащиеся).
 - Четкое определение (учитель).
 - Повторение определения (учащиеся).
4. Этап образования понятия:
 - Иллюстрация понятия конкретными примерами.
 - Модели понятия (динамичные и статические).
 - Контрпримеры.
 - Символическое обозначение.
5. Этап усвоения понятия:
 - Другие возможные определения данного понятия.

Методическая схема абстрактно-дедуктивного метода:

1. Дать определение нового понятия, мотивируя обозначающий его термин.
2. Рассмотреть частные (и особые) случаи выражения этого понятия, проведя своеобразную классификацию этого понятия. Привести некоторые контрпримеры этого понятия.
3. Иллюстрировать введенное понятие конкретными примерами, всякий раз проверяя, удовлетворяет ли каждое из конкретных проявлений этого понятия его определению.
4. Привести конкретные примеры приложения этого понятия.

Методика изучения теорем и их доказательств

Теорема – математическое предложение, истинность которого устанавливается посредством доказательства.

Виды формулирования теоремы: имплицативная и категорическая.

Условие теоремы – при каких условиях рассматривается в ней тот или

иной объект.

Заключение теоремы – что об этом объекте утверждается.

Основные типы теорем:

1. Прямая.
2. Обратная.
3. Противоположная.
4. Контрапозитивная (обратная противоположной).

Доказательство – рассуждение с целью обоснования истинности какого-либо утверждения.

Элементы доказательства:

- тезис;
- аргументы доказательства;
- демонстрация.

Тезис – математическое предложение, в котором выражается главная цель доказательства. Форма выражения тезиса – суждение.

Аргументы доказательства – положения, на которые опирается доказательство и из которых при условии их истинности необходимо следует истинность доказываемого тезиса. Форма выражения аргументов – суждения.

Демонстрация – логический процесс взаимосвязи суждений, в результате которого осуществляется переход от аргументов к тезису.

Метод доказательства – способ связи аргументов при переходе от условия к заключению суждения.

Методы доказательства, выделенные по тому, как строится обоснование тезиса: прямые и косвенные.

Прямые приемы доказательства:

- синтетический – преобразование условия суждения;
- восходящий анализ – отыскание достаточных оснований справедливости заключения;
- нисходящий анализ – отыскание необходимых признаков справедливости суждения с последующей проверкой обратимости рассуждений;
- последовательное преобразование то условия, то заключения суждения.

Косвенные приемы поиска доказательств:

- метод от противного – метод, при котором истинность доказываемого тезиса устанавливается посредством опровержения противоречащего ему суждения;
- разделительный метод (метод разделения условий или метод исключения) – метод, при котором тезис рассматривается как один из

возможных вариантов предположений, когда все предположения опровергаются, кроме одного.

Методы доказательства, выделенные по используемому математическому аппарату:

- Метод геометрических преобразований – метод, используемый как средство обоснования некоторых отношений между элементами евклидовой геометрии.

- Алгебраические методы – методы доказательства теорем с помощью уравнений, неравенств, тождественных преобразований.

- Векторный метод – метод, использующий аппарат векторной алгебры.

- Координатный метод – метод, позволяющий устанавливать переход от геометрических отношений к аналитическим.

Этапы изучения теоремы:

- мотивация изучения теоремы и раскрытие ее содержания;
- работа над структурой теоремы;
- мотивация необходимости доказательства теоремы;
- построение чертежа и краткая запись содержания теоремы;
- поиск доказательства, доказательство и его запись;
- закрепление теоремы;
- применение теоремы.

Методические приемы мотивировки необходимости изучения теорем:

1. Обобщение наблюдаемых в жизни фактов и явлений и перевод их на математический язык.

2. Показ необходимости знания той или иной теоремы для решения практических задач.

3. Показ необходимости знания той или иной теоремы для решения задач и доказательства других теорем.

4. Показ, как решалась данная проблема в истории науки.

Задания, способствующие усвоению теоремы:

- 1) Сформулируйте теорему.
- 2) Выделите условие и заключение теоремы. К каким фигурам применима теорема?
- 3) Сформулируйте теорему со словами «Если...то...».
- 4) Сформулируйте предложение, обратное теореме.
- 5) Воспроизведите доказательство теоремы по новому чертежу, изменив его положение и обозначение элементов.
- 6) Составьте план доказательства.
- 7) Назовите аргументы, которые использовались при доказательстве.

8) Докажите теорему другим способом.

9) Решите задачи на применение теоремы.

Вопросы и задания:

1. Что такое понятие? Охарактеризуйте основные логические характеристики понятия.

2. Каковы способы определения понятий? Приведите примеры из школьного курса математики.

3. Составьте логико-математический анализ определения понятия (по выбору).

4. Охарактеризуйте два метода введения математических понятий. Приведите конкретные примеры.

5. Каковы структурные элементы теоремы? Назовите виды формулирования теорем. Приведите примеры из курса школьной геометрии.

6. Назовите и раскройте методы доказательства теорем.

7. Каковы основные этапы изучения теорем?

8. Составьте логико-дидактический анализ теоремы (по выбору).