Методика обучения геометрическим построениям

Одной из особенностей геометрических задач является их индивидуальность, то есть не существует универсального метода их решения. При решении геометрических задач в значительно меньшей степени может быть использован образец решения некоторого класса задач. Задачи по курсу геометрии можно разделить на три основных вида: на вычисление, на доказательство и на построение. Задачи на построение традиционны для программы курса геометрии. Обучение их решению можно рассматривать как подготовку учащихся к жизни. Задачи на построение не просты. Не существует единого алгоритма для решения всех таких задач. Каждая из них по-своему уникальна, и каждая требует индивидуального подхода для решения. Именно поэтому научиться решать задачи на построение чрезвычайно трудно. Эти задачи дают уникальный материал для индивидуального творческого поиска учащимися путей решения с помощью своей интуиции и подсознания.

Задачи на построение являются важным средством формирования у учащихся геометрических представлений в целом. В процессе геометрических построений учащиеся в практическом плане знакомятся со свойствами геометрических фигур и отношений, учатся пользоваться чертежными инструментами, приобретают графические навыки. В правильности многих математических утверждений в большинстве случаев школьники убеждаются также в процессе геометрических построений. И только в задачах на построение четко выделяется такой этап их решения, как исследование. Это наиболее трудный вид работы, цель которого установление условия разрешимости задачи и определение числа ее решений.

Основная цель изучения задач на построение – сформировать умение и развить навыки решения задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Схема решения задачи на построении включает в себя следующие этапы: анализ, построение, доказательство, исследование.

Анализ: цель которого – составление плана решения, осуществляется по – разному при различных методах построения: иногда предполагают искомую фигуру построенной, иногда разбивают условие задачи на несколько частей и т.д.

Построение – осуществление плана решения задачи, составленного в результате анализа.

Доказательство – установление правильности решения, доказательство того, что полученное решение удовлетворяет условиям задачи.

Исследование – определение всевозможных случаев, допускаемых условиями задачи, и числа решений в каждом из этих случаев. Заметим, что только в задачах на построение четко выделяется такой этап их решения. Это наиболее трудный вид работы, цель которого установление условия разрешимости задачи и определение числа ее решений.

С точки зрения логики *узловыми этапами решения задачи на построение являются два – анализ и доказательство.* Рассмотрим эти этапы подробнее и установим тесную логическую взаимосвязь между ними. Анализ начинается с того, что требуемая фигура построена, т.е. выполнены все те свойства, которые сформулированы в условии задачи. В ходе анализа из этих свойств мы пытаемся извлекать какие-то выводы, и каждый такой вывод анализируем на то, можно ли от него вернуться к данному условию. Другими словами, мы ищем такие необходимые следствия данных условий задачи, которые, в свою очередь, для этих условий окажутся достаточными. Что же происходит при доказательстве? Выведенные в процессе анализа следствия становятся условиями. Из этих условий должны быть выведены те свойства, которые сформулированы в условии задачи. Таким образом, *следствия анализа становятся условиями доказательства, а условия анализа – следствиями доказательства.* Это означает, что в процессе анализа мы устанавливаем ряд прямых теорем, а в процессе доказательства используем обратные для них теоремы. Отсюда *задача анализа выявить в его ходе такие теоремы, обратные утверждения для которых сами будут справедливы, т.е. сами будут теоремами.*

Из этой логики вытекает методика обучения решению задач на построение. Указать учащимся на эту логическую связь анализа и доказательства и предложить им каждый раз обнаруживать и четко формулировать прямые теоремы в ходе анализа и обратные для них теоремы в ходе доказательства. Если навык такого подхода будет выработан, то учащиеся будут отчетливо представлять логику решения задач на построение и свою задачу на каждом этапе решения.

Предположим, что в качестве средств построения выбраны циркуль и линейка. Сначала выбираются первичные неопределяемые понятия. Такими являются понятия построенных основных фигур, т.е. каждая из фигур, участвующих в условии задачи, считается изначально построенной. Далее формулируются правила, по которым к имеющимся фигурам с использованием циркуля и линейки можно строить новые фигуры. Вот эти правила (постулаты):

(П1). Если есть две различные точки A и B, то можно построить отрезок

AB, прямую AB и четыре луча.

(П2). Если есть три точки A, B, C (B не равно C), то можно построить окружность с центром в точке A с радиусом, равным отрезку BC.

(П3). Если построены две непараллельные прямые, то можно найти точку их пересечения.

(П4). Если построены пересекающиеся прямая и окружность, то можно найти точки их пересечения (в частности, на данной прямой отложить отрезок, равный данному отрезку).

(П5). Если построены две пересекающиеся окружности, то имеем точки их пересечения.

Использование других инструментов (чертежного треугольника, угольника, транспортира) оговаривается отдельно.

Существуют задачи на построение, которые не могут быть решены с помощью циркуля и линейки:

а) задача о трисекции угла (дан угол α; построить угол величиной 1/3α);

б) задача об удвоении куба (дан куб, то есть отрезок равный ребру куба; построить другой куб, то есть ребро такого куба, объем которого вдвое больше объема данного куба);

в) задача о квадратуре круга (дан круг; построить квадрат, площадь которого равна площади круга).

Рассмотрим решение одной стандартной задачи поэтапно.

Задача. Постройте треугольник, если заданы сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

Решение. *Анализ.* Пусть треугольник ABC уже построен, тогда положение вершин B и C можно считать известным (рис. 1).

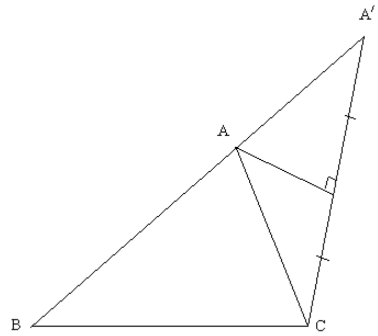

РИС.

Остается найти вершину A. Выясним свойства точки A. Во-первых, точка A принадлежит лучу BA, так как дан угол ABC, во-вторых, точка A является вершиной ломаной, состоящей из двух звеньев, сумма которых равна длине данного отрезка, являющегося суммой AB и AC сторон искомого треугольника.

На продолжении стороны BA за точку A отложим отрезок AA', равный отрезку AC. Теперь можно построить треугольник $A'BC$ по двум сторонам и углу между ними. В равнобедренном (по построению) треугольнику $A'AC$ серединный перпендикуляр к стороне $A'C$ пересечет луч BA' в точке A. Отсюда *план построения:*

- построить треугольник $BA'C$ по сторонам BC и $BA' = AB+AC$ и углу между ними;

- провести серединный перпендикуляр к стороне $A^{/}C$;

- найти точку пересечения луча BA и построенного серединного перпендикуляра. Точка пересечения и будет искомой вершиной A.

Доказательство. В построенном треугольнике ABC сторона ВС, сумма сторон AB и AC, угол B – данные.

Исследование проведем по ходу построения. Треугольник $BA^{/}C$ по двум сторонам и углу между ними можно построить единственным образом. Провести серединный перпендикуляр к отрезку $A^{/}C$ – тоже единственным образом. Точка пересечения луча BA и серединного перпендикуляра существует и она единственная.

Рассмотрим основные методы решения задач на построение:

1. *Метод геометрических мест* состоит в том, что задача сводится к отысканию некоторой точки, характеризуемой условием.

2. *Метод применения движения* (параллельный перенос, поворот, осевая симметрия) состоит в том, что, предполагая искомую фигуру построенной, подбирают такое движение, в результате которого образуется некоторая вспомогательная фигура, удовлетворяющая двум условиям:

а) она может быть построена по данным задачи;

б) она связана с искомой фигурой. Таким образом, что, будучи сама построенной, позволяет построить и искомую фигуру.

3. *Метод подобия* состоит в том, что условие задачи разбивают на две части, одна из которых определяет «форму» искомой фигуры, а другая – ее размеры. По первой части условия строят фигуру, подобную искомой, затем преобразовывают ее в искомую с учетом второй части условия.

4. *Метод алгебраический*. Этот метод заключается в том, что в искомой геометрической фигуре выделяется отрезок, угол или отношение отрезков при этом длина этого отрезка выражается через длины данных отрезков по некоторой формуле. Для того, чтобы построить выделенный отрезок в искомой геометрической фигуре, нужно провести построение отрезка, длины которых задаются формулами.

Перейдем к анализу действующих учебников математики.

В учебниках для 5-6-х классов задачи на построение практически не рассматриваются как самостоятельные (за исключением учебника под редакцией Дорофеева Г.В. и Шарыгина И.Ф., где есть задачи, требующие построения в общем виде). Чаще всего это задания на построение фигур по заданным размерам (линейным, градусным). Однако эти задачи требуют хоть в небольшой степени графических умений и навыков, поэтому при проведении количественного анализа были отнесены нами к задачам «на построение».

Задания на построение из всех геометрических заданий в учебниках математики для 5-6-х классов представлены (в %) в таблице 1.

Таблица 1

Учебник Класс	Виленкин Н.Я., Чесноков А.С. (1)	Дорофеев Г.В., Шарыгин И.Ф. (2)	Нурк Э.Р., Тельгмаа А.Э. (3)	Средний процент
5	39%	40%	23%	31%
6	34%	47%	29%	36%

В целом картина кажется достаточно отрадной. Однако, если учесть, что сам по себе геометрический материал в учебниках (2) и (3) не превышает 13-16% от всего содержания учебника, а в учебниках (1) – 30-40%, то указанный средний процент заданий на построение в учебниках (2) и (3) падает до 4-6%, а в учебнике (1) – до 9-16%.

Во всех действующих учебниках по геометрии задачи на построение рассматриваются, как самостоятельные, в седьмом классе, кроме учебника В.А. Гусева, где геометрию начинают изучать с 5-го класса. Осуществляются следующие элементарные построения: деление отрезка пополам; откладывание угла; построение перпендикуляра к прямой из данной точки, не лежащей на этой прямой. В качестве метода решения задач на построение в ряде учебников рассматривается метод геометрического места точек. Этим небольшим списком круг задач на построение в учебниках для 7-го класса практически исчерпывается.

В 8-9-х классах встречаются задания на построение фигур по некоторым заданным элементам. Произвольные треугольники и четырехугольники строятся по сторонам и углам. Четырехугольники особых видов (ромбы, квадраты, прямоугольники) – по сторонам и диагоналям. Рассматриваются приемы описывания и вписывания окружностей в треугольники и четырехугольники.

Перечислим основные задачи на построение, решение которых даются в школьном курсе математики:

1. Отложить отрезок вдоль данного отрезка *АВ,* равный данному отрезку *СД*.
2. Построить сумму и разность данных отрезков.
3. Отложить от данного отрезка угол, равный данному.
4. Построить сумму и разность двух углов.
5. Найти середину отрезка.

6. Построить биссектрису угла.
7. Восстановить перпендикуляр к прямой через данную на ней точку.
8. Опустить перпендикуляр из данной точки на данную прямую.
9. Провести из данной точки параллельной данной.
10. Разделить данный отрезок в данном отношении, заданном как отношение данного отрезка *а:в* или как отношение целых чисел $m{:}n$.

Прежде всего некоторые отличительные особенности учебников геометрии В.А. Гусева: 1. Систематический курс геометрии начинается с 5 класса. 2. Основной методической линией курса является взаимосвязанное изучение свойств плоских и пространственных фигур. 3. Теоретический материал содержит четко выделенный обязательный объем изучаемых вопросов и дополнительный материал, позволяющий обеспечить развивающее и углубленное изучение. 4. Содержит систему проблемных вопросов, творческих задач и исследовательских заданий.

Рассмотрение задач на построения начинается с изучения равенства треугольников. В учебнике подробно описываются все этапы решения задач на построение. При решении примеров показана реализация каждого этапа решения. Здесь равенства треугольников не доказываются, а устанавливаются при построении треугольника по трем элементам. Общую схему изучения темы «Задачи на построение и равенство фигур» можно представить в виде:

1. Равенство треугольников.
2. Основные чертежные инструменты и виды задач на построение.
3. Как решать задачи на построение?
4. Построение треугольника по трем сторонам.
5. Другие признаки равенства треугольников.
6. Первое знакомство с подобными фигурами.
7. О построениях в пространстве.

В учебнике В.А. Гусева «Геометрия. 7 класс» подробно рассматриваются этапы решения задач, приводятся примеры решения задач. Заметим, что наглядность в изложении курса является приоритетной. При решении задач показана последовательность развития построения на отдельных рисунках. Рисунки способствуют пониманию и развитию, они даются в динамике тех приемов действий, которые выполняются учащимися в процессе рассуждений. В последнем пункте автор дает краткий ответ на вопрос «Что такое построение в пространстве?», формулируются некоторые правила построений в пространстве. Подчеркнем, что основная стратегия данного курса – «Я в пространстве».

Рассмотрим учебник Л.С. Атанасяна (авторского коллектива)

«Геометрия 7-9».

В седьмом классе в первой главе «Начальные геометрические сведения» в параграфе «Перпендикулярные прямые» вводятся понятия смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых и показано, как применяются эти понятия при решении задач, а также построение прямых углов на местности. При изучении этого параграфа учащиеся должны уметь строить угол, смежный с данным углом, изображать вертикальные углы, находить на рисунке смежные и вертикальные к третьей, не пересекающиеся.

Во второй главе «Треугольники» специально выделен параграф «Задачи на построение». Назначение параграфа состоит в том, чтобы дать представление о новом классе задач – построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки без масштабных делений и рассмотреть основные (простейшие) задачи этого типа.

В результате изучения параграфа учащиеся должны выполнять с помощью циркуля и линейки простейшие построения: отрезка, равного данному; угла, равного данному; биссектрисы данного угла; прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой; середины данного отрезка; применять простейшие построения при решении задач.

В четвертой главе изучается построение треугольника по трем элементам. Назначение параграфа – введение понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми, показать, как они применяются при решении задач, рассмотреть задачи на построение треугольника по трем элементам.

Несколько уроков должны посвятить решению задач на построение треугольника с помощью циркуля и линейки. Рассматриваются три основные задачи на построение треугольника: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам; в) по трем сторонам.

В восьмом классе задачи на построение с помощью циркуля и линейки рассматриваются в четвертой главе «Четырехугольники». При этом рассматриваются четыре этапа решения задач на построение: 1) отыскание способа решения задачи путем установления связей между искомыми элементами и данными задачи, это анализ задачи (анализ дает возможность составить план решения); 2) выполнение построения по намеченному плану; 3) доказательство того, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи; 4) исследование задачи, т.е. выяснение вопроса о том, что при любых ли данных ли задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

В девятом классе при построении правильных многоугольников рассмотрены способы построения некоторых правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Построение правильного треугольника и правильного четырехугольника, т.е. квадрата, рассматривались ранее. Для построения правильных n-угольников при n>4 обычно используется окружность, описанная около многоугольника.

В учебнике И.Ф. Шарыгина «Геометрия. 7-9кл.» задачи на построение даются в трех пунктах.

В 7-м классе они рассматриваются после изучения геометрических мест точек в следующей последовательности:

- построение перпендикуляра к прямой;
- построение треугольника, равного данному, и угла, равного данному;
- построение биссектрисы угла;
- построение прямой, параллельной данной;
- построение касательной к окружности.

В 8 классе при изучении углов решаются следующие задачи:

- построение перпендикуляра к прямой;
- построение касательной;
- существование окружности проходящей через три точки;
- описанная окружность;
- четыре точки на одной окружности;
- дуги вмещающая данный угол;
- метод геометрических мест в задачах на построение.

При изучении методов подобия решаются задачи на построение отрезка по формуле $x = \frac{bc}{a}$ и построения, основанные на свойствах прямоугольного треугольника.

При первом знакомстве с данными задачами в учебнике дается краткое историческое сведение, подробное описание построения. Рисунок с последовательностью нанесения линий, последовательность нанесения точек линий в рисунке пронумерованы.

Анализ учебников геометрии Л.С. Атанасяна, В.А. Гусева и И.Ф. Шарыгина позволяет сделать следующие выводы:

- В основном задачи на построения даются в седьмом и восьмом классах. При изучении таких тем, как геометрические места точек; окружности; углы; треугольники и многоугольники.
- Перед изучением темы даются краткие сведения о целесообразности геометрических построений или историческая справка.
- Методы построения показаны в задачах или как вопрос с

объяснением построения.

- Для реализации принципа наглядности изложения учебного материала необходимо показать динамику развития построения для каждого отдельного шага. Наиболее последовательно это реализовано в учебнике В.А.Гусева.

Вопросы и задания:

1. Какова роль задач на построение в обучении математике?
2. Перечислите этапы решения задач на построение и раскройте их содержание.
3. Охарактеризуйте основные методы решения задач на построение.
4. Какие из этих методов решения задач на построение изучаются в школьном курсе геометрии?
5. Представьте решение основных задач на построение, которые даются в школьном курсе математики.
6. Проиллюстрируйте реализацию принципа наглядности по отношению к решению конкретной задачи на построение и разработайте поэтапную методику ее решения.