Методика изучения тригонометрических функций в курсе алгебры и начал анализа

Тригонометрические функции являются первыми трансцендентными функциями, изучаемыми в школьном курсе математики.

В природе существуют такие процессы, которые не поддаются описанию с помощью алгебраических функций, но с достаточной точностью характеризуются трансцендентными функциями.

Их роль и место в нем определяются главным образом двумя сторонами применения этих функций в теории и практике.

Во-первых, тригонометрические функции дают замечательный вычислительный аппарат для решения разнообразнейших задач планиметрии и стереометрии.

Во-вторых, изучение тригонометрических функций позволяет весьма наглядно, просто и убедительно продемонстрировать важнейшие свойства функций: периодичность, четность и нечетность, ограниченность, монотонность.

Первоначальное знакомство с тригонометрическими функциями осуществляется в 8 классе на индуктивной и наглядной основе. В курсе алгебры и начал анализа осуществляется последний, заключительный этап изучения тригонометрических функций с тем, чтобы завершить логически удовлетворительное изложение материала.

Основные образовательные цели изучения тригонометрических функций:

1. Систематизировать знания учащихся о тригонометрических функциях числового аргумента.
2. Обобщить и расширить знания о свойствах тригонометрических функций.
3. Закрепить и развить умения проводить тождественные преобразования тригонометрических выражений.
4. Познакомить с решением простейших тригонометрических уравнений и неравенств, рассмотреть некоторые приемы решения тригонометрических уравнений и их систем.

Анализ учебного материала курса алгебры и начал анализа позволяет выделить следующее:

- Закрепление представлений учащихся о радианной мере угла; отработка навыков перехода от градусной меры к радианной и наоборот.
- Формирование представлений об углах с градусной мерой, большей 360^0; формирование представлений об углах с положительной и отрицательной градусными мерами; перевод этих градусных мер в радианы (положительные и отрицательные действительные числа).

- Определение тригонометрических функций на языке радианной меры угла.
- Утверждение функциональной точки зрения на косинус альфа, синус альфа и тангенс альфа (трактовка $cos\ \alpha$, $sin\ \alpha$ и $tg\ \alpha$ как функций действительного аргумента, установление области определения, области значений, четности и периодичности, построение графика функции, установление промежутков монотонности, знакопостоянства).
- Повторение известных и ознакомление с новыми тригонометрическими тождествами, ключом к которым является тождество-формула косинуса суммы двух аргументов.
- Применение тригонометрических тождеств в тождественных преобразованиях.
- Введение понятий «арксинус», «арккосинус», «арктангенс», «арккотангенс» числа a.
- Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.
- Рассмотрение приемов решения некоторых видов тригонометрических уравнений и их систем.
- Производные тригонометрических функций.
- Функция вида $f(x)=Acos(wt+\varphi)$, описывающая гармонические колебания.

Традиционная методическая схема введения тригонометрических функций такова:

- Вначале определяются тригонометрические функции для острого угла прямоугольного треугольника.
- Затем введенные понятия обобщаются для углов от 0 до 180.
- Тригонометрические функции определяются для произвольных угловых величин и действительных чисел.

Возможные пути введения тригонометрических функций в школе:

- Аналитический. Представляются два варианта. Один из них сводится к анализу дифференциальных уравнений. Ее используют на кружковых занятиях. Второй вариант аналитического введения тригонометрической функции - использование аппарата рядов. Но такой подход для средней школы представляется мало реальным.
- Геометрический. Более привычным для школы представляется второй путь - геометрический. Имеется большое число разновидностей этого пути. Самой наглядной и простой является введение тригонометрических функций путем рассмотрения отношений сторон в прямоугольном треугольнике. Затруднения возникают при переходе к углам, большим

прямого и при переходе к тригонометрическим функциям числового аргумента. Попытки преодоления привели к единым по сути подходам – через так называемые тригонометрические линии в круге, через отношение координат радиус-вектор, через проекции единичного вектора. Наиболее удачным представляется первоначальное определение синуса и косинуса как координат точек окружности. В этом случае формальное определение отпадает, так как оказывается, что синус и косинус есть просто новые названия ординаты и абсциссы точки P(α) единичной окружности. Сама точка P(α) является отображением точки P(0) с координатами (1;0) при повороте плоскости на угол α вокруг начала координат. Такое определение дает естественный путь к введению формул для вычисления координат вектора и отсюда к решению разнообразных задач.

Работа по выделению существенных признаков понятия «тригонометрические функции числового аргумента» может быть построена с помощью сравнения понятий «числовые функции» и «тригонометрические функции числового аргумента». В результате сравнения усматривается, что при рассмотрении тригонометрических функций углу сопоставляется число, в то время как при рассмотрение числовых функций числу сопоставляется число.

Поскольку для исследования тригонометрических функций и построения графиков необходимо пользоваться общими приемами, известными для числовых функций, следовательно, целесообразно рассматривать тригонометрические функции числового аргумента.

Идею сопоставления каждому действительному числу значения тригонометрической функции (например, $y=sinx$) целесообразно иллюстрировать на модели единичной окружности.

Второй вопрос, который целесообразно рассмотреть в связи с изучением тригонометрических функций – это вопрос о периодичности.

В ходе обсуждения можно остановиться на следующих вопросах:

1) Пропедевтика понятия о периодичности функции.
2) Использование свойств периодичности при знакомстве с построением графиков тригонометрических функций.
3) Анализ определения понятия «периодическая функция».
4) Аналитическая и геометрическая интерпретации периодической функции.
5) Период и наименьший положительный период функции.

Для введения общих формул решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств при рассмотрении тригонометрических функций вводятся понятия «арксинус», «арккосинус», «арктангенс» и «арккотангенс числа *a*». Каждое из этих понятий вводится как число – корень соответствующего уравнения на определенном интервале.

Основные выводы:

– понятие о тригонометрических функциях числового аргумента рассматривается в курсе алгебры и начала анализа на основе повторения известных учащимся сведений из курса математики 8 класса;

– при изучении важно выделить все существенные признаки понятия «тригонометрические функции числового аргумента» исходя из понятий: «числовая функция» и «тригонометрическая функция углового аргумента»;

– при рассмотрении понятия «тригонометрические функции числового аргумента» важно сделать актуально осознаваемой учащимися идею соответствия каждому действительному числу (значению аргумента) другого действительного числа (значение тригонометрической функции);

– использовать определение тригонометрической функции числового аргумента и известные свойства этих функций для построения графиков;

– отработать существенные признаки понятия «периодическая функция».

Вопросы и задания:

1. Выделить ключевые вопросы развертывания функциональной линии в школьном курсе математики и указать класс, в котором рассматривается соответствующий вопрос (на основе анализа учебников алгебры, алгебры и начала анализа).
2. Указать основные этапы введения понятия о тригонометрических функциях числового аргумента (на основе анализа учебников геометрии, алгебры, алгебры и начала анализа)
3. Вводится ли в тексте учебника (явно или неявно) понятие об обратных функциях?
4. Установить какие свойства тригонометрических функций рассматриваются в 10-11 классах.
5. Разработайте один из вариантов введения понятия тригонометрических функций числового аргумента (на примере функций $y=cosx$, $y=tgx$, $y=ctgx$).
6. Проанализируйте набор задач, направленных на формирование понятия о периодичности тригонометрических функций в учебниках алгебры и начала анализа разных авторов.