

Методика изучения многогранников в школьном курсе стереометрии

Изучение параллельных и перпендикулярных прямых и плоскостей, двугранных углов являются средствами для исследования ее более содержательных объектов, главным образом, тел и поверхностей.

Центральная роль многогранников определяется тем, что многие результаты, относящиеся к другим телам, получаются исходя из соответствующих результатов для многогранников, кроме того, многогранники выделяются среди всех тел многими интересными свойствами, например, теорема Эйлера о числе граней, ребер и вершин, вопрос о заполнении пространства многогранниками и др.

Более того, использование многогранников с самого начала изучения стереометрии служит различным дидактическим целям. На многогранниках удобно демонстрировать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, показывать применение признаков параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве.

Основные образовательные цели изучения многогранников:

1. Сформировать представления учащихся об основных понятиях стереометрии.

2. Дать учащимся систематические сведения об основных видах многогранников.

Тему можно разделить на следующие части:

1. Определение многогранника. Элементы многогранника. Выпуклые многогранники.

2. Призмы. Параллелепипеды.

3. Пирамиды.

4. Правильные многогранники.

Изучение темы начинается с введения понятия многогранника. В разных учебных пособиях по геометрии представлены различные подходы к введению этого понятия. Например, в учебнике А.В. Погорелова «Геометрия 7-11 кл.»: «Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников», а в учебнике авторского коллектива Л.С. Атанасяна «Геометрия 10-11 кл.»: «Многогранник – это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело».

При этом подразумевается, что:

1) имеется в виду конечная или ограниченная часть пространства;

2) многоугольники, ограничивающие многогранник, образуют его

поверхность; остальная же часть многогранника – это его внутренность;

3) многогранник является связным, т.е. не выходя из нее, можно непрерывно пройти от одной ее точки до любой другой.

После введения понятия многогранника, как правило, рассматривают выпуклые многогранники. Однако точный смысл понятия «выпуклый» в средней школе не раскрывается. Существует два способа определения выпуклого многогранника. Многогранник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой из ограничивающих его плоскостей. Такой подход принят в учебниках Л.С.Атанасяна и А.В.Погорелова. Либо многогранник называется *выпуклым*, если любые две его точки могут быть соединены отрезком. Такое определение дается в учебнике И.М.Смирновой «Геометрия 10-11 кл.» для гуманитарного профиля». В учебнике А.Д.Александрова «Геометрия 10-11 кл.» для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики за основу берется второе определение и доказывается возможность другого (в нашем случае первого) определения.

При изучении выпуклых многогранников полезно использовать аналогию с выпуклыми многоугольниками на плоскости. Наряду с выпуклыми многогранниками учащиеся должны наблюдать и модели невыпуклых многогранников, только в результате такого сравнения можно выработать правильное представление о выпуклых многогранниках.

После введения выпуклых многогранников изучаются их основные виды: призмы и пирамиды. Практически во всех учебниках они определяются одинаково.

А дальше при введении определения правильного многогранника авторы учебников расходятся во взглядах. Так, в учебнике авторского коллектива Л.С. Атанасяна выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и, кроме того, в каждой вершине сходится одно и то же число ребер. В учебнике А.В.Погорелова вместо условия равенства правильных многоугольников требуется, чтобы правильные многоугольники были с одним и тем же числом сторон. Пособие А.Д. Александрова по сравнению с учебником Л.С. Атанасяна накладывает дополнительное требование равенства всех двугранных углов правильного многогранника. При этом многогранник называется выпуклым, если любые две его точки соединимы в нем отрезком.

Можно указать на такие две проводимые методологические линии в изучении геометрии многогранников: это их классификация и изучение различного рода количественных характеристик. Конечно, эти линии

переплетаются между собой. В школьном курсе рассматриваются численные характеристики: длины ребер, высоты, величины углов, площади поверхностей, объемы. Основное внимание уделяется трем частным типам многогранников - параллелепипедам, правильным призмам и правильным пирамидам. Это определяется тем, что: 1) эти многогранники нужны для дальнейшего построения теории (главным образом теории объемов); 2) они обладают симметрией; 3) для них можно сформулировать и доказать достаточно простые теоремы.

Анализ задачного материала показывает, что практически все задачи темы вычислительные, большую часть из них составляют простые задачи. В задачах находят отражение и главные методологические идеи решения задач - аналогия стереометрии с планиметрией, сведение стереометрических задач к планиметрическим. Задачный материал по данной теме дает возможность применения различных методов. При этом у учащихся формируются общие методы и приемы решения задач.

Рассмотрим изучение темы «Многогранники» в школьных учебниках. Для примера возьмем учебники разного уровня изложения материала: предназначенные для общеобразовательной школы, для гуманитарных классов, для классов с математическим уклоном.

Учебник авторского коллектива Л.С. Атанасяна «Геометрия 7-9» предназначен для общеобразовательной школы. В этом учебнике при изучении темы «Многогранники» отводится 12 часов. Содержание учебного материала:

1. Понятие многогранника. Призма. Площадь поверхности призмы.

2. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Площадь поверхности пирамиды.

3. Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников.

Еще до изучения темы «Многогранники» учащиеся знакомятся с их простейшими видами - тетраэдром и параллелепипедом. На их изучение отводится 5 часов. Понятия тетраэдра и параллелепипеда вводятся, чтобы рассмотрение их свойств, построение сечений способствовали углублению понимания вопросов взаимного расположения прямых и плоскостей, поэтому необходимо, чтобы решение задач сопровождалось ссылками на аксиомы, определения и теоремы.

При объяснении понятий тетраэдра и параллелепипеда необходимо подчеркнуть, что многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность, а тетраэдр и параллелепипед - поверхности, составленные из плоских поверхностей (многоугольников).

В результате изучения учащиеся должны уметь объяснить, что называется тетраэдром, параллелепипедом, указывать и называть на моделях и чертежах элементы этих многогранников; знать свойства граней и диагоналей параллелепипеда; уметь изображать тетраэдр и параллелепипед, строить их сечения.

В данном учебнике нет строгого математического определения многогранника, а приводится наглядное представление о геометрических телах. Далее рассматривается определение геометрического тела, вводится понятие выпуклого и не выпуклого многогранников.

V_1 V_n . Далее вводятся определения элементов призмы, разъясняются понятия прямой призмы, наклонной призмы, правильной призмы. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что четырехугольная призма – это знакомый им параллелепипед. При изучении площади поверхности призмы доказывается теорема о площади боковой поверхности прямой призмы.

Пирамида определяется как многогранник, составленный из n -угольника $A_1 A_2 \dots A_n$ и n треугольников. При введении понятия *правильной пирамиды* следует акцентировать внимание учащихся на двух моментах: основание пирамиды – правильный многоугольник, и отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром ее основания, является высотой пирамиды. Можно устно доказать, что боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники. После этого вводится понятие апофемы правильной пирамиды (высота боковой грани правильной пирамиды, проведенной из ее вершины), при этом нужно подчеркнуть, что этот термин употребляется только для правильной пирамиды, хотя у неправильной пирамиды также могут быть равны высоты боковых граней.

Далее вводится понятие *усеченной пирамиды*. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, разбивает ее на два многогранника: один из них является пирамидой, а другой называется усеченной пирамидой. Усеченная пирамида – это часть полной пирамиды, заключенная между ее основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию данной пирамиды. При выполнении рисунков к задачам на усеченную пирамиду удобно вначале начертить полную пирамиду, а затем выделить усеченную пирамиду.

При введении понятия *правильной усеченной пирамиды* надо отметить, что ее основания – правильные многоугольники, а боковые грани – равные равнобедренные трапеции; высоты этих трапеций называются апофемами усеченной пирамиды. Также выводится формула площади боковой поверхности правильной усеченной пирамиды.

Тема «Многогранники» заканчивается рассмотрением симметрии в пространстве и введением понятия правильного многогранника.

Основными понятиями здесь являются понятия симметричных точек относительно точки, прямой, плоскости; понятия центра, оси, плоскости симметрии фигуры. При введении понятия правильного многогранника нужно подчеркнуть два условия, входящие в определение: а) все грани такого многогранника – равные правильные многоугольники; б) в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер. В учебнике доказано, что существует пять видов правильных многогранников и не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n -угольники при $n > 6$.

В данном учебнике многогранники изучаются с опорой на наглядность, предметы окружающей действительности. Все теоремы доказываются достаточно просто, результаты могут быть записаны формулами, поэтому в теме много задач вычислительного характера, при решении которых отрабатываются умения учащихся пользоваться сведениями из тригонометрии, формулами площадей, решать задачи с использованием таких понятий, как «угол между прямой и плоскостью», «двугранный угол» и др.

Учебник И.М. Смирновой «Геометрия. 10-11 кл.» предназначен для преподавания геометрии в 10-11 классах гуманитарного профиля. По сравнению с традиционным изложением в учебнике несколько сокращен теоретический материал, больше внимания уделяется вопросам исторического, мировоззренческого и прикладного характера.

В пункте «Основные пространственные фигуры» с целью формирования представления учащихся об основных понятиях стереометрии, ознакомления с пространственными фигурами и моделированием многогранников при введении понятия многогранника учащимся демонстрируются следующие многогранники:

- куб – многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов;
- параллелепипед – многогранник, поверхность которого состоит из шести параллелограммов;
- прямоугольный параллелепипед – параллелепипед, у которого грани - прямоугольники;
- призма – многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и параллелограммов, называемых боковыми гранями (причем у каждого параллелограмма два противоположных ребра лежат на основаниях призмы);
- прямая призма – призма, боковые грани которой – прямоугольники; правильная призма – прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники;
- пирамида – многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с

общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды;

- правильная пирамида – пирамида, в основании которой правильный многоугольник, и все боковые ребра равны.

Таким образом, к началу непосредственного изучения темы «Многогранники» учащиеся уже знакомы (на доступном для них уровне) с традиционным материалом по этой теме. Появляется возможность расширить представления учащихся о многогранниках, рассмотрев с ними более подробно правильные, полуправильные и звездчатые многогранники.

Можно привести примерное тематическое планирование данной темы:
1. Выпуклые многогранники (2 часа). 2. Теорема Эйлера (2 часа). 3. Приложения теоремы Эйлера (2 часа). 4. Правильные многогранники (2 часа). 5. Топологически правильные многогранники (1 час). 6. Полуправильные многогранники (2 часа). 7. Звездчатые многогранники (1 час).

Среди пространственных фигур особое значение имеют выпуклые многогранники. Данное понятие в учебнике вводится следующим образом: *многогранник* называется *выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит и соединяющий их отрезок. Далее рассматриваются свойства выпуклых многогранников.

После изучения выпуклых многогранников рассматривается теорема Эйлера и ее приложения: задача о трех домиках и трех колодцах, проблема четырех красок, вводится понятие графа.

Выпуклый многогранник называется *правильным*, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Выпуклый многогранник называется *полуправильным*, если его гранями являются правильные многоугольники (возможно, и с разным числом сторон), причем в каждой вершине сходится одинаковое число граней. Рассматриваются пять видов правильных многогранников, некоторые виды полуправильных и четыре звездчатых многогранника.

При изучении правильных, полуправильных и звездчатых многогранников следует использовать модели этих многогранников, изготовление которых описано в учебнике, а также графические компьютерные средства.

Учебник А.Д. Александрова, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик «Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы» предназначен для классов и школ с математической специализацией, он дает богатую математическую информацию, развивает ученика, но является достаточно трудно

усваиваемым. Отметим особенности изучения многогранников в данном учебнике. Во-первых, многогранники изучаются после круглых тел. Во-вторых, при изучении многогранника и его элементов прослеживается связь с многоугольником. Особенностью является введение двух определений призмы, причем доказывается равносильность этих определений. Аналогично дается другое определение пирамиде: как конус с многоугольником в основании. В разделе о триангулировании многогранника дается другое, конструктивное определение многогранника. При изучении выпуклых многогранников рассматривается вопрос равносильности двух определений выпуклого многогранника. Изложение темы «Правильные многогранники» также отличается от ее изложения в учебниках по геометрии других авторских коллективов: сначала показываются пять типов правильных многогранников, построением доказываются, что все пять типов правильных многогранников существуют, и только после этого доказываются, что других правильных выпуклых многогранников быть не может. Таким образом, учебник содержит очень богатый теоретический материал по многогранникам, которого нет в других учебниках по геометрии, также он может быть использован как учебник для дополнительного изучения в основной школе. Приведем содержание учебного материала: 1) Обобщение понятия многоугольника. Многогранник. 2) Призма, параллелепипед. 3) Пирамида. Виды пирамид. 4) Выпуклые многогранники. 5) Теорема Эйлера. Развертка выпуклого многогранника. 6) Правильные многогранники.

Таким образом, при изучении многогранников рассматриваются практически одни и те же основные темы: определение многогранника, выпуклые многогранники, призма, пирамида, правильные многогранники. Разница лишь в глубине изучения этих вопросов: в гуманитарных классах тема изучается более поверхностно, практически без доказательств, в классах с углубленным изучением математики данный вопрос рассматривается с научными обоснованиями. Также есть различия в некоторых дополнительных темах, например, полуправильные и звездчатые многогранники.

Вопросы и задания:

1. Составьте понятийный аппарат темы «Многогранники».
2. Приведите различные определения многогранника, выпуклого многогранника, правильного многогранника.
3. Постройте систему определений основных фигур темы на основе логической связи между ними.
4. Предложите задачи, способствующие развитию пространственных представлений и пространственного воображения учащихся при изучении общего понятия многогранника.

5. Составьте вопросы для беседы с учащимися по темам «Призмы» и «Пирамиды».

6. Разработайте фрагмент урока по введению определения многогранника: приведите примеры мотивации введения определения; приведите примеры для выделения существенных и несущественных свойств понятия; приведите примеры заданий на установление взаимосвязей между понятием многогранника и другими понятиями; приведите примеры заданий для практического применения понятия.