

## Математическая задача и ее основные компоненты

Учебные математические задачи являются эффективным средством усвоения учащимися понятий и методов школьного курса математики и математической теорий. Задачи при обучении математике имеют образовательное, практическое и воспитательное значение.

Задачи служат достижению всех целей: способствуют мотивации введения понятий, выявлению их существенных свойств, усвоению математической символики и терминологии, раскрывают взаимосвязи одного понятия с другими.

Именно поэтому при решении задач используется половина учебного времени уроков математики.

По своему функциональному назначению задачи как средство обучения могут быть направлены на формирование знаний, умений и навыков учащихся (обучающие задачи), или на осуществление контроля со стороны учителя и учащихся уровня сформированности ЗУН (контролирующие задачи).



Под обучающими следует понимать функции задач, направленные на формирование у учащихся системы математических ЗУН, на различных этапах их усвоения.

Под воспитывающими следует понимать функции задач, направленные на формирование диалектико-материалистического мировоззрения, познавательного интереса и самостоятельности.

Под развивающими функциями задач следует понимать тех, которые направлены на развитие мышления учащихся, на овладение ими эффективными приемами умственной деятельности.

К трем вышеуказанным функциям следует добавить еще одну важную функцию – контролирующую.

Под контролирующими следует понимать функции задач, направленные на установление уровней обученности и обучаемости, способности к самостоятельному изучению математики, уровня математического развития учащихся и сформированности познавательных интересов.

Каждая из названных основных функций задач практически никогда не выступает изолированно от других (Например, всякое обучение развивает,

если оно поставлено правильно).

Задачи делятся:

- по характеру требования (задачи на доказательство, на построение, на вычисление);
- по функциональному назначению (задачи с дидактическими, познавательными, развивающими функциями);
- по величине проблемности (стандартные, обучающие, поисковые, проблемные);
- по методам решения (задачи на геометрические преобразования, задачи на векторы и др.);
- по числу объектов в условии задачи и связей между ними (простые и сложные);
- по компонентам учебной деятельности (организационно действенные, стимулирующие, контрольно – оценочные).
- по характеру связей между элементами задачи (алгоритмические, полуалгоритмические, эвристические).

Кроме того, различают задачи: стандартные и нестандартные; теоретические и практические; устные и письменные; одношаговые, двушаговые и др.; устные, полуустные, письменные и т.д.

*Основные компоненты задачи:*

1. Условие – начальное состояние.
2. Базис решения – теоретическое обоснование решения.
3. Решение – преобразование условия задачи для нахождения, требуемого заключением, искомого.
4. Заключение – конечное состояние.

*Математическими* считаются все задачи, в которых переход от начального состояния (1) к конечному (4) осуществляется математическими средствами, т.е. математическим характером компонентов: обоснование (2) и решение (3).

Если все компоненты задачи (условие, обоснование, решение, заключение) – математические объекты, то задача называется *чисто математической*; если математическими являются только компоненты решения и базис решения, то задача называется *прикладной математической* задачей.

*Стандартной* называется задача, в которой чисто определено условие, известны способ решения и ее обоснование, а также даны упражнения на воспроизведение известного. Задача называется *обучающей*, если в ней неизвестен или плохо определен один из основных компонентов. Если неизвестны два компонента, задача называется *поисковой*, а если три – *проблемной*.

*Основные этапы решения задачи по Д. Пойа [5].*

Чтобы удобно сгруппировать вопросы и советы, различают четыре ступени в процессе решения задач. Во-первых, мы должны *понять* задачу; мы должны ясно видеть, что в ней является искомым. Во-вторых, мы должны усмотреть, как связаны друг с другом различные элементы задачи, как неизвестное связано с данными. Это необходимо, чтобы получить представление о решении, чтобы составить *план*. В-третьих, мы *осуществляем* наш план. В-четвертых, *оглядываясь назад* на полученное решение, мы вновь изучаем и анализируем его.

Итак, этапы решения задач по Д. Пойа:

- I. Понимание постановки задачи.
- II. Составление плана.
- III. Осуществление плана.
- IV. Анализ решения.

Остановимся более подробно на этих этапах решения задач.

*1. Понимание постановки задачи.* Ученик должен понять задачу. Но не только понять; он должен хотеть решить ее. Если ученику не хватает понимания задачи или интереса к ней, это не всегда его вина. Задача должна быть умело выбрана, она должна быть не слишком трудной и не слишком легкой, быть естественной и интересной, причем некоторое время нужно уделять для ее естественной и интересной интерпретации.

Прежде всего, должна быть понята словесная формулировка задачи. Проверить это учитель до некоторой степени может; он просит ученика повторить формулировку задачи, и ученик должен оказаться в состоянии легко это сделать.

Ученик также должен быть в состоянии указать главные элементы задачи – неизвестное, данное, условие. Таким образом, учитель редко может позволить себе обойтись без вопросов: *что неизвестно? Что дано? В чем состоит условие?*

Ученик должен внимательно, многократно и с разных сторон рассмотреть главные элементы задачи.

Если с задачей связана какая-либо геометрическая фигура, он должен *сделать чертеж* и указать на нем неизвестное и данные. Если необходимо как-нибудь назвать эти объекты, он должен ввести подходящие обозначения; уделяя определенное внимание подходящему выбору символов, он принужден сосредоточивать свои мысли на объектах, для которых нужно подыскать символы.

*2. Составление плана.* У нас есть план, если нам известно, хотя бы в общих чертах, какие вычисления или построения нам придется проделать,

чтобы получить неизвестное. Главный шаг на пути к решению задачи состоит в том, чтобы выработать идею плана. Эта идея может появляться постепенно.

Лучшее, что может сделать учитель для учащегося, состоит в том, чтобы путем неназойливой помощи подсказать ему блестящую идею. Таким образом, часто оказывается уместным начать работу с вопроса: *известна ли вам какая-нибудь родственная задача? Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли сформулировать задачу иначе?*

Пытаясь использовать различные известные задачи и теоремы, рассматривая всевозможные видоизменения задачи, экспериментируя с разными вспомогательными задачами, мы можем оставить нашу первоначальную задачу так далеко в стороне, что возникает опасность совсем распротиться с ней. Но следующий превосходный вопрос вернет нас снова к ней: *Все ли данные вы использовали? Все ли условия?*

3. *Осуществление плана.* Нелегко придумать план, найти идею решения. Очень многое требуется для этого: ранее приобретенные решения, мозг, приученный к логическому мышлению, полная сосредоточенность и еще одно: удача. Осуществить же план решения гораздо легче; здесь нам потребуется главным образом терпение.

План указывает лишь общие контуры решения; теперь нам нужно убедиться, что все детали вписываются в эти детали, одну за другой, пока все не станет совершенно ясным и не останется ни одного темного угла, в котором может скрываться ошибка.

Если учащийся выработал план решения, главная опасность теперь в том, что учащийся может забыть свой план. Учитель должен все же настаивать, чтобы учащийся *проверял каждый свой шаг.*

Самое важное состоит в том, чтобы учащийся был по-настоящему убежден в правильности каждого шага. В некоторых случаях учитель может указать на разницу между «увидеть» и «доказать»: *ясно ли вам, что предпринятый шаг правилен? А в состоянии ли вы доказать, что он правилен?*

4. *Анализ решения.* Даже очень хорошие учащиеся, получив ответ и тщательно изложив ход решения, закрывают тетрадь и переходят к другим делам.

Учащийся осуществил свой план. Он записал решение, проверяя каждый шаг. Таким образом, он имеет неплохие основания считать свое решение правильным.

Тем не менее, ошибки всегда возможны. Поэтому проверка его всегда желательна. Особенно важно не проглядеть (если он имеется) какой-либо

быстрый интуитивный способ проверки результата или хода решения. *Нельзя ли проверить результат? Нельзя ли проверить ход решения? Нельзя ли получить тот же результат иначе?*

Одна из первых и главных обязанностей учителя состоит в том, чтобы не создать у учащихся впечатления, что математические задачи мало связаны одна с другой и не связаны вообще больше ни с чем. Нам представляется естественная возможность исследовать, как связана наша задача с другими, когда мы оглядываемся назад на ее решение. Учащиеся найдут, что, действительно, очень интересно снова окинуть взглядом решение, если они честно затратили усилия, чтобы ее получить, и осознают, что плодотворно поработали.

Представим более развернутую схему процесса решения задачи:



Каждая задача имеет идейную и техническую сложность. Идейная часть решения дает ответ на вопрос, как решать задачу, т.е. какие методы, способы и приемы нужно использовать, чтобы решить данную задачу. Техническая часть представляет собой реализацию найденной идеи. Есть задачи, в которых главное найти путь (идею) решения, а технически ее реализовать не составляет особого труда. Есть задачи, в которых путь решения достаточно очевиден, а ее реализация требует очень громоздких вычислительных выкладок. Есть также и задачи, в которых идейная и техническая части приблизительно равнозначны. Но надо помнить, что для решения одних задач вполне достаточно владения методом решения и некоторыми вычислительными навыками, для решения других требуется глубокое, осознанное понимание сути вопроса. И в этом случае без теоретических знаний нельзя обойтись.

Решая математическую задачу, можно познать много нового: знакомится с новой ситуацией, описанной в задаче, с применением математической теории к ее решению,

познает новый метод решения или новые теоретические разделы математики, необходимые для решения задачи, и т. д. Иными словами, при решении математических задач человек приобретает математические знания, повышает свое математическое образование.

#### **Вопросы и задания:**

1. Какова роль задач в обучении математике? Какие функции выполняют задачи в процессе обучения школьников?

2. Охарактеризуйте виды задач и опишите их.

3. Назовите и охарактеризуйте основные компоненты задачи. Произведите разбор какой-либо задачи покомпонентно.

4. Раскройте содержание этапов решения задачи и проанализируйте их на примере любой задачи школьного курса математики.

5. Придумайте приемы осуществления анализа решения задачи на примере конкретной задачи школьного курса математики.

6. Разработайте фрагмент урока по проведению анализа условия арифметической, алгебраической, планиметрической и стереометрической задачи.