# Решение нестандартных задач
# в курсе математики 5-6 классов

Важным моментом подготовки к уроку является поиск приемов, позволяющих эффектно использовать учебный материал для выработки у школьников навыков самообразования. На уроках должна быть поставлена своя сверхзадача, сводящаяся именно к формированию этих навыков и меняющаяся в зависимости от темы урока. В одном случае она состоит в обучении приемов анализа, умению видеть закономерности, ставить вопросы, делать выводы, в другом случае – в формировании критического отношения учащихся к результатам своей работы, требовательности к себе.

Известно, что многие ученики просто боятся приступить к задачам, алгоритм решения которых им неизвестен. Порой проявляется страх перед трудностями, неумение преодолевать их самостоятельно. В таком случае нужна задача, которая, на первый взгляд, кажется, простой, а на деле требует нестандартного подхода.

Один из надежных приемов для решения проблемы – использование нестандартных и занимательных задач на уроках математики. Под нестандартными задачами можно понимать либо задачи, не относящиеся ни к одному из рассматриваемых типов, либо задачи на известные нам темы, которые традиционными методами не решаются. Но надо отметить, что, несмотря на свою нестандартность, такие задачи не выходят за рамки школьной программы, поскольку могут быть решены школьными методами.

Прежде всего, хотелось бы подчеркнуть, что такие задачи должны быть связаны с изучаемым материалом. Их условия целесообразно формулировать коротко и просто, а где потребуется с записью краткой записи на доске. Среди этих задач есть задачи на смекалку, задачи-шутки, которые вызывают оживление в классе, пробуждают у учащихся “вкус” к умственной работе. Автор популярной книги “Математическая смекалка” Е.И. Игнатьев писал: “... умственную самостоятельность и смекалку нельзя ни “вдолбить”, ни “вложить” ни в чью голову. Результаты надежны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершенствуются в легкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью” [3].

Нестандартные задачи лучше предлагать к концу урока, когда учащиеся уже устают писать, решать. Благодаря своей оригинальности, задачи сами по себе вызывают интерес. При решении нестандартных задач целесообразно рассматривать различные способы решения. Особое внимание надо обращать на решение задач арифметическим способом, так как именно решение задач арифметическим способом способствует развитию оригинальности мышления, является одним из лучших средств развития самостоятельного творческого мышления учащихся.

Как научить учащихся решать нестандартные задачи? Естественно научить решению задач, лишь показывая образцы таких решений невозможно. Прежде всего, следует учесть, что научиться решать задачи учащиеся смогут лишь, решая их. Ибо решение любой достаточно трудной задачи требует от учащегося напряженного труда и упорства.

Воля и упорство наиболее полно проявляются у учащихся, если задача интересна. Поэтому учитель должен стараться подбирать такие задачи, чтобы учащиеся хотели бы их решать. Подбирая задачи, нужно помочь учащемуся обнаружить, что и математическая задача может быть столь же увлекательной, как и головоломка, и, что, решив задачу, можно получить огромное удовольствие.

Рассмотрим примеры задач, чтобы выяснить особенности процесса их решения.

Задача 1: *Когда "послезавтра" станет "вчера", то "сегодня" будет также далеко от воскресенья, как тот день, который был "сегодня", когда "вчера" было "завтра". Какой сегодня день недели?*

Заметим, что толкование условий такой задачи в буквальном смысле не дает результата, ибо ситуация настолько "запутана", что необходима расшифровка практически каждой фразы. Например, фраза "*послезавтра" станет "вчера"* означает, что послепослезавтра наступит через 3 дня, начиная с того дня, который назван "сегодня". С другой стороны, в условии *когда "вчера" было "завтра"* говорится, что 2 дня тому назад было позавчера. Таким образом, задачу можно переформулировать в следующую: *Какой сегодня день недели, если послепослезавтра и позавчера одинаково отстоят от воскресенья?*

При анализе условия задачи можно задавать разные вопросы, типа: что дано, что требуется найти, что нужно знать для того, чтобы ответить на вопрос задачи и т.д. Такой анализ имеет результат тогда, когда найдена некоторая узловая деталь в ее условии, переосмысление которой как бы "открывает" идею решения.

При решении нестандартных задач учащимся приходится повторять пройденный материал, и, таким образом, они также устраняют свои пробелы по учебному материалу. Решение задач, допускающих ряд решений – увлекательная и интересная работа. Учащимся можно дать и стандартную задачу, но при этом предложить им решить эту задачу различными способами.

Задача 2. Расстояние от реки до турбазы туристы рассчитывали пройти за 6 ч. Однако после 2 ч пути они уменьшили скорость на 0,5 км/ч и в результате опоздали на турбазу на 30 минут. С какой скоростью шли туристы первоначально?

Решение. Эта задача является практической (текстовой). Для подобных задач никакого общего правила определяющего точную программу их решения, не существует. Однако это не значит, что вообще нет каких-то общих указаний для решения таких задач. Подробно сущность этих указаний мы рассмотрим в следующей главе. А пока лишь покажем, как эти указания практически используются.

Обозначим искомую первоначальную скорость туристов через $x$ км/ч. Тогда за 6 ч, за которые они рассчитывали пройти расстояние от реки до турбазы, они прошли 6 $x$ км. Фактически этот путь они прошли следующим образом: 2 ч они шли с первоначальной скоростью, а затем еще 4,5 ч (ибо они опоздали на 0,5 ч к сроку) - с уменьшенной скоростью (х - 0,5) км/ч. Следовательно, они прошли $2x$ км и 4,5(х -0,5) км, а всего $2x$ +4,5(х-0,5)км, что равно расстоянию от реки до турбазы, т.е. 6 $x$ км. Получаем уравнение: $2x + 4{,}5(x - 0{,}5) = 6x$.

Решив это уравнение, найдем: х = 4,5.

Значит, первоначальная скорость туристов равна 4,5 км/ч. Проанализируем процесс приведенного решения задачи 2. Сначала мы определили вид задачи, и, исходя из этого, возникла идея решения. Для этого, пользуясь весьма общими указаниями и образцами решения подобных задач, полученных в школьном курсе математики (надо обозначить одно из неизвестных буквой, например $x$, и выразить остальные неизвестные через $x$, затем составить равенство из полученных выражений), мы построили уравнение. Заметим, что эти указания, которыми мы пользовались, не являются правилами, ибо в них ничего не сказано, какое из неизвестных обозначить через $x$, как выразить остальные неизвестные через $x$, как получить нужное равенство и т.д. Все это делается каждый раз по-своему, исходя из условий задачи и приобретенного опыта решения подобных задач.

Полученное уравнение представляет собой уже стандартную задачу. Решив ее, мы тем самым решили и исходную нестандартную задачу.

Таким образом, смысл решения данной задачи состоит в том, что с помощью особого приема (составления уравнения) мы свели ее решение к решению эквивалентной стандартной задачи.

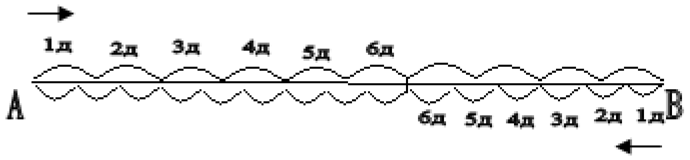
На следующем примере покажем решение одной задачи несколькими способами.

Задача 3. Путешественник идет из одного города 10 дней. Одновременно навстречу ему выходит другой путешественник, который на тот же путь тратит 15 дней. Через сколько дней они встретятся?

Решение. Способ 1 (арифметический перебор). За один день путешественники проходят $1/15+1/10=1/6$ часть всего пути, за два дня $2/15+2/10=1/3$ пути, за три $3/15+3/10=1/2$, за четыре $4/15+4/10=2/3$, за пять $5/15+5/10=5/6$, а за шесть дней $6/15+6/10=1$, т.е. весь путь проходят за $6$ дней.

Способ 2 (графический перебор).

Решение этим методом показано на рисунке.




Способ 3 (арифметический). За один день путешественники проходят $1/15+1/10=1/6$ часть всего пути. Значит, весь путь пройдут за $1:1/6=6$ дней.

Способ 4 (алгебраический). За $x$ обозначим время, через которое они встретятся, весь путь примем за $1$. Тогда составляем следующее уравнение $1/10 \cdot x+1/15 \cdot x=1$. Решая его, находим $x=6$.

Нужно также подчеркнуть, что если разные способы и методы решения испробованы на одной и той же задаче, то наиболее выпукло выступают их отличительные черты, их сильные и слабые стороны. Первое решение задачи редко бывает лучшим, и естественно стремиться к тому, чтобы найти более простое и красивое решение.

Подавляющее большинство школьных задач предполагают однозначную трактовку условия задач. Такая практика формирует определенный стереотип и в результате предоставляются неполные решения. И потому очень полезно включение в процесс обучения решение многовариантных задач. Покажем решение такой задачи.

Задача 4. Расстояние между двумя машинами, едущими по шоссе, равно 200 км. Скорости машин - 60 км/ч и 80 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через 1 час?

Решение. Возможны четыре случая (сделайте рисунок!): 1) Машины едут навстречу друг другу: 200-(60+80)=60 км; 2) Машины едут в разные стороны: 200+(60+80)=340 км; 3) Машины едут в одну сторону, вторая догоняет первую: 200+(60-80)=180 км;

4) Машины едут в одну сторону, вторая впереди: 200+(80-60)=220 км.

Целью решения нестандартных задач является использование всех возможностей для того, чтобы большинство учащихся увидели лучшие стороны математики, возможности в преодолении трудностей. А также вызвать у них интерес к делу, пробудить желание и упорство искать, решать, вычислять, открывать новое. На нестандартные задачи надо смотреть как на творческую деятельность в тесной связи с другими видами учебной работы.

Ценность решения нестандартных задач заключается в том, что в процессе их решения учащиеся в значительной мере самостоятельно приобретают новые знания, у них появляется интерес к исследовательским задачам. И очень важно следить за сохранением этого интереса школьников к задачам.

Включение в урок нестандартных задач делает процесс обучения интересным и занимательным, создает рабочее настроение, облегчает трудности в усвоении учебного материала. Поэтому надо постараться подобрать нестандартные задачи по ключевым темам учебного курса математики.

Покажем несколько примеров задач, которые можно предложить на уроках математики по ключевым темам школьного курса математики 5-6 классов.

*Сложение и вычитание натуральных чисел:*

1. Как быстро вычислить: а) $1+3+5+7+...+99;$

б) $99+95+91+...+7+3-1-5-...-89-93-97?$

Указание: а) $(1+99)+(3+97)+...+(19+51);$

б) $(99-97)+(95-93)+...+(7-5)+(3-1).$

2. Можно ли число $45$ представить в виде суммы нескольких натуральных чисел так, чтобы произведение всех этих чисел тоже было равно $45$?

Ответ: Да, можно. Например, $45 = 15 + 3 + \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{27} = 15 \cdot 3 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1}_{27}$.

*Делимость натуральных чисел:*

3. Дано равенство

$1\times2\times3+2\times3\times4+...+98\times99\times100=16738922.$ Доказать, что это равенство неверно.

Указание: Так как каждое слагаемое делится на 3, то сумма должна делиться на 3.

4. Существует ли квадрат, у которого длина стороны - целое число,

площадь равна *201201201201*?

Указание: Число делится на 3, но не делится на 9.

*Простые и составные числа:*

5. Ученики *5* класса купили *203* учебника. Каждый купил одинаковое количество книг. Сколько было пятиклассников и сколько учебников купил каждый из них?

Ответ: Учащихся – 29, по 7 книг купил каждый.

6. Верно ли что при любом натуральном $n$ число $n^2+5n-1$ простое?

Ответ: Нет, например n=6, 216+30-1=245.

*Проценты*:

7. По дороге идут два туриста. Первый из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем второй. Кто из туристов идет быстрее и почему?

Решение. Когда второй турист делает 10 шагов длины $a$ каждый, первый турист делает 11 своих шагов длины $0,9a$ каждый. Таким образом, первый турист проходит расстояние $9,9a$ за то же время, за которое второй проходит расстояние $10a$, но $10a>9,9a$ при $a>0$. Значит, медленнее идет тот из туристов, кто делает шаги короче и чаще (т.е. первый).

Ответ: первый турист.

8. Периметр прямоугольника уменьшили на *5%*, затем периметр полученного прямоугольника увеличили на *5%*. У какого из трех прямоугольников большая площадь?

Ответ: у первого.

*Действия с обыкновенными дробями:*

9. Вычислите сумму: $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{19\times 20}$.

Решение. Для нахождения рационального способа решения данной задачи нам поможет следующая идея. Заметим, что $\frac{1}{1\times 2}=1-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\times 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4\times 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ и т. д. Обратив внимание на записи, можно легко видеть, что

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{19\times 20}=1-\frac{1}{20}.$$

Ответ: $\frac{19}{20}$.

10. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство: $\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{8\times 9}+...+\frac{1}{(n+5)(n+6)}=\frac{n}{6(n-6)}$.

11. В футбольном турнире каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Игры с ничейными результатами имелись у 1/3 команд, а 3/4

остальных команд имели поражения. Сколько результативных встреч было в турнире?

Решение. Без ничьих провели турнир 1-1/3=2/3 от общего числа команд, т.е. 2/3 всех команд имели только победы и поражения. Из условия получаем, что поражения имели 3/4 от этих двух третей, т.е. 2/3·3/4=1/2 от общего числа команд. Следовательно, оставшиеся команды имели только победы. Но такая команда в турнире может быть только одна, а по условию их число составляет 1-1/2-1/3=1/6 от общего числа команд. Таким образом, в турнире участвовало 6 команд.

Ответ: 6 команд.

*Сравнение дробей:*

12. Сравните выражения *2007/2008* и *2008/2009*.

Решение. Дроби представим в следующем виде:

*2007/2008=1-1/2008* и *2008/2009=1-1/2009*. Осталось сравнить дроби *1/2008* и *1/2009*.

Ответ: *2007/2008<2008/2009.*

13. Какое число нужно вычесть из числителя дроби $\frac{3}{17}$ и прибавить к знаменателю, чтобы получилась дробь, равная $\frac{1}{9}$.

Ответ: 1.

*Прямоугольная система координат:*

14. Вершины треугольника расположены в точках А(*2;12*), В(*26;19*) и С(*14;13*). Постройте этот треугольник и все треугольники, симметричные данному относительно осей координат и начала координат.

*Положительные и отрицательные числа:*

15. Верно ли, что если к отрицательному числу прибавить его квадрат, то получится положительное число?

Ответ: Нет. Например, $(-0,1)+(-0,1)^2=-0,09<0$.

16. Можно ли написать подряд *17* целых чисел так, чтобы произведение любых четырех соседних чисел было отрицательно, а произведение всех чисел положительно?

Ответ: Да. Например, *2;2;2;-3;2;2;2;-3;2;2;2;-3;2*.

**Вопросы и задания:**

1. Как определяется понятие «нестандартная задача»?
2. Составьте набор нестандартных задач по всем ключевым темам курса математики 5-6 классов.
3. Разработайте план обучения учащихся умению анализировать условие при решении задач 1, 2, 3, 15, 16.
4. Осуществите поиск решения задачи на примере решения задач 5-8.

5. Разработайте образцы записи решения задач 10, 11, 14.

6. Придумайте организацию деятельности учащихся на уроке по поиску идеи решения на примере решения задач 4; 9; 12; 13.