Различные способы решения задач в курсе алгебры 7-9 классов

В этом параграфе собраны математические задачи, каждую из которых можно решить разными способами. Приемы и способы решения математических задач весьма разнообразны. Но если способ или метод демонстрируется на специально подобранных примерах, то в сознании учащихся он невольно связывается с определенной задачей. А когда разные способы испробованы на одной задаче, можно лучше узнать специфику того или иного способа, его преимущества и недостатки в зависимости от содержания задачи.

Решение одной задачи несколькими способами приносит больше пользы, чем решение подряд нескольких стереотипных задач. Рассмотрение учеником различных вариантов решения, умение выбрать из них наиболее рациональные, простые, изящные свидетельствуют об умении ученика мыслить, рассуждать, проводить правильные умозаключения. Различные варианты решения одной задачи дают возможность ученику применять весь арсенал его математических знаний. Таким образом, рассмотрение различных вариантов решения задачи воспитывает у учащихся гибкость мышления. Поиск рационального варианта решения лишь на первых порах требует дополнительных затрат времени на решение задачи. В дальнейшем эти затраты с лихвой окупаются.

Надо отметить, что рациональные приемы решения не появляются сами, по одному только желанию. Рациональным способам решений надо обучать. Один из путей обучения и есть решение задач несколькими способами, выбор лучшего из них.

Важно и то, что придя разными путями к одному и тому же результату, получаем уверенность в правильности решения. Решение задач, допускающих различные решения очень увлекательное занятие, требующее знания многих разделов математики.

Рассмотрим примеры задач курса алгебры 7-9 классов, допускающих различные способы решения.

1. Дан график линейной функции $y=ax + b$ (см. рис. 1). Найдите значение выражения $b - a$.

Решение. Способ 1. Заметим, что значение выражения $b - a$ является значением данной функции при $x = -1$. Из графика видно, что это значение равно нулю.

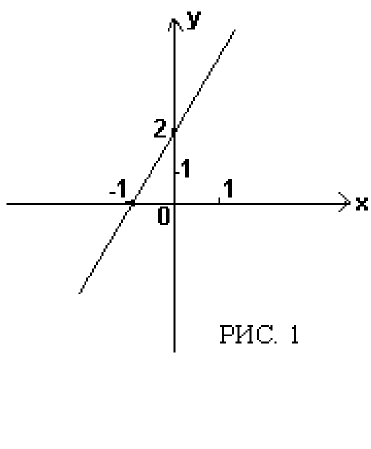

РИС. 1

Способ 2. Возможен также более громоздкий способ решения: вычислить значения коэффициентов a и b, подставив в уравнение, задающее функцию, координаты любых двух точек графика.

Ответ: 0.

2. Учительница написала на доске три числа, отличные от нуля, и велела Диме одно из них уменьшить на треть, другое увеличить на четверть, а третье уменьшить на одну пятую и результаты записать в тетради. Оказалось, что в тетради Дима записал те же числа, что и на доске, но в другом порядке. Докажите, что Дима ошибся.

Решение. Пусть x, y и z – числа, записанные учительницей. Тогда числа, записанные Димой, в каком-то порядке равны $\frac{2}{3}x$; $\frac{5}{4}y$ и $\frac{4}{5}z$. Предположим, что Дима не ошибся. Далее можно рассуждать по- разному.

Способ 1. Произведение чисел, записанных Димой, должно быть равно произведению чисел, записанных учительницей, то есть $\frac{2}{3}x\cdot\frac{5}{4}y\cdot\frac{4}{5}z = xyz$. Так как $xyz \neq 0$ и $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{3}\neq 1$, то записанное равенство выполняться не может.

Способ 2. Учитывая, что среди записанных чисел нет нулей, получим два варианта возможных равенств: 1) $x=\frac{5}{4}y$; $y=\frac{4}{5}z$ и $z=\frac{2}{3}x$; 2) $z=\frac{5}{4}y$; $x=\frac{4}{5}z$ и $y=\frac{2}{3}x$.

1) Из первого равенства следует, что $4x = 5y$, а из второго – что $5y = 4z$, поэтому $x = z$, что противоречит третьему равенству.

2) Из первого равенства следует, что $4z = 5y$, а из второго – что $5x = 4z$, поэтому $x = y$, что противоречит третьему равенству.

Таким образом, Дима ошибся, что и требовалось доказать.

3. Двое рабочих могут успеть за день либо напилить *пять* поленниц дров, либо наколоть *восемь* таких поленниц. Какое наибольшее количество дров они могут напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?

Решение. Способ 1. Пусть x – искомое количество дров. На распиливание одной поленницы уходит $\frac{1}{5}$ дня, а на то, чтобы затем ее наколоть – $\frac{1}{8}$ дня, поэтому, на обработку x пленниц будет затрачено $\frac{x}{5}$ и $\frac{x}{8}$ дней соответственно. Так как вся работа должна быть сделана за день, то $\frac{x}{5}$

$+\ \frac{x}{8} \le 1$. Решая это неравенство, получим, что $x \le \frac{40}{13}$. Это означает, что наибольшее количество дров, которое можно распилить, а затем –наколоть, составляет $3\frac{1}{13}$ поленницы.

Способ 2. Заметим, что оптимальная организация работы состоит в том, чтобы работать без пауз. Так как НОК (5; 8) = 40, то найдем, за какое время (при наилучшей организации работы) рабочие напилят и наколют 40 поленниц дров. Исходя из условия, 40 поленниц дров рабочие будут 8 дней пилить и 5 дней колоть. Следовательно, всю работу они сделают за 13 дней, значит, за день они смогут полностью обработать $\frac{40}{13}$ поленницы.

Ответ: $3\frac{1}{13}$ поленницы.

4. Известно, что число p является одним из корней квадратного уравнения $5x^2 + bx + 10 = 0$. Выразите через p корни уравнения $10x^2 + bx + 5 = 0$.

Решение. Заметим, что дискриминанты указанных уравнений одинаковы: $D = b^2 - 200$, поэтому, независимо от значения b, если первое уравнение имеет корни, то и второе также имеет корни. Далее можно действовать различными способами.

Способ 1. Из условия следует, что выполняется числовое равенство: $5p^2 + bp + 10 = 0$, где $p \ne 0$. Разделив его почленно на p^2, получим: $5+\frac{b}{p}+\frac{10}{p^2}=0$ $\Leftrightarrow 10\left(\frac{1}{p}\right)^2+b\cdot\frac{1}{p}+5=0$, то есть, число $\frac{1}{p}$ является корнем второго уравнения. Другой корень второго уравнения находим по теореме Виета $\frac{1}{2}:\frac{1}{p}=\frac{p}{2}$ или $1:\frac{2}{p}=\frac{p}{2}$.

Отметим, что можно также использовать, что оба корня второго уравнения являются числами, обратными корням первого.

Способ 2. Запишем корни каждого из уравнений по формулам: 1) $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{10}$; 2) $\frac{-b\pm\sqrt{D}}{20}$. Следовательно, если один из корней первого уравнения равен p, то соответствующий корень второго уравнения равен $\frac{p}{2}$. Другой корень находим по теореме Виета.

Ответ: $\frac{1}{p}$ и $\frac{p}{2}$.

5. Чтобы перевезти 323 коробки с телевизорами, грузчики смогли

придумать систему загрузки, позволившую в каждую автомашину помещать на 2 коробки больше и поэтому использовать на 2 машины меньше, чем предполагалось. Сколько машин им понадобилось?

Решение. Стандартное алгебраическое решение этой задачи приводит к уравнению $\frac{323}{x} = \frac{323}{x+2} + 2$, где x – искомое число.

Решение этого дробно-рационального уравнения стандартным образом приводит к громоздким вычислениям, тогда как можно догадаться, что числа x и x–2 являются делителями натурального числа 323, а этому условию удовлетворяет только x = 17, которое и является решением данного уравнения.

Ответ: x = 17.

6. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был в 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода догнал мотоциклист?

Решение. Способ 1 («физический»). Будем считать, что пешеход неподвижен. Мотоциклист вначале отставал от пешехода на 6 км, а потом обогнал его на 3 км, а велосипедист вначале находился вровень с пешеходом, а затем обогнал его на 3 км. Следовательно, скорость мотоциклиста относительно пешехода в 3 раза больше скорости велосипедиста относительно пешехода.

Так как мотоциклист, догнав пешехода, проехал относительно пешехода 6 км, то велосипедист проехал относительно пешехода в три раза меньше, то есть 2 км.

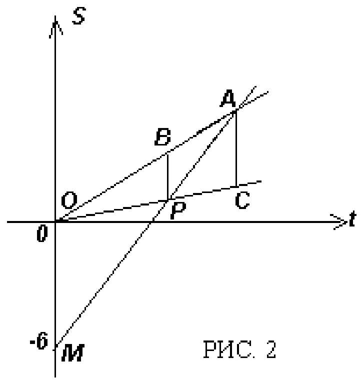

РИС. 2

Способ 2 («алгебраический»). Пусть скорости мотоциклиста, велосипедиста и пешехода равны соответственно *a* км/ч, *b* км/ч и *c* км/ч. Пусть также с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» мотоциклиста и велосипедиста прошло *t* часов, а с момента «встречи» пешехода и велосипедиста до момента «встречи» пешехода и мотоциклиста прошло *T* часов. Тогда составляем три уравнения: $(a - c)t = 9$; $(b - c)t = 3$; $(a - c)T = 6$. Найдем искомое расстояние $S = (b - c)T$. Разделив первое уравнение на второе, получим, что $\frac{a-c}{b-c} = 3$. Тогда $\frac{(a-c)T}{(b-c)T} = 3$, то есть $\frac{6}{S} = 3$, $S = 2$.

Способ 3 («геометрический»). Изобразим графики зависимости перемещения S от времени t для всех участников процесса в одной системе координат (см. рис. 2, лучи OA, OC и MA – графики движения велосипедиста, пешехода и мотоциклиста соответственно). Из условия задачи следует, что $OM = 6$; $AC = 3$.

Для того чтобы найти искомое расстояние BP, рассмотрим две пары подобных треугольников: $\Delta ABP \sim \Delta AOM$, $\Delta OBP \sim \Delta OAC$. Из первого подобия следует, что $\frac{BP}{OM} = \frac{AB}{AO}$, а из второго, что $\frac{BP}{AC} = \frac{BO}{AO}$. Следовательно, $\frac{BP}{OM} + \frac{BP}{AC} = \frac{AB + BO}{AO} = \frac{AO}{AO} = 1$. Тогда $BP = \frac{OM \cdot AC}{OM + AC} = 2$.

Ответ: 2 км.

Вопросы и задания:

1. Как можно организовать работу учителя по рассмотрению различных способов решения одной и той же задачи?
2. Предложите решение одной задачи различными способами, демонстрирующее взаимосвязи различных частей математики.
3. Решите следующие задачи различными способами.

1. Найдите $a^6 + 3a^2b^2 + b^6$, если $a^2 + b^2 = 1$. Ответ: 1.

2. Про коэффициенты линейной функции $y = kx + b$ известно, что $k + b > 0$, а $2k + b < 0$. Может ли график этой функции пересекать ось абсцисс в точке $x = 3$? Ответ: нет не может.

3. Существуют ли числа a, b, c и d, удовлетворяющие неравенству $0 < a < b < c < d$, такие что уравнения $x^4 + bx + c = 0$ и $x^4 + ax + d = 0$ имеют хотя бы один общий корень? Ответ: нет, не существуют.

4. Найдите $x + y$, если $x^3 + y^3 = 9$, а $x^2y + xy^2 = 6$. Ответ: 3.

5. Сравните дроби: $\frac{2002}{2003}$ и $\frac{20022003}{20032002}$. Ответ: $\frac{2002}{2003} < \frac{20022003}{20032002}$.

6. Положительные числа x, y и z удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$. Докажите, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq x+y+z$.

7. Найдите $x^3 + y^3$, если известно, что $x + y = 5$ и $x+y+x^2y+xy^2=24$. Ответ: 68.

8. После того, как учительница Мария Ивановна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку – со второго ряда на третий, а Машеньку – с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду – увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду – уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду? Ответ: 9 человек.

9. У Золотой рыбки записаны и перенумерованы подряд все знакомые. Половина из них – щуки, треть – окуни, а все знакомые с номерами, делящимися на 4, – караси. Сколько всего знакомых у Золотой рыбки? Ответ: 6 знакомых.

10. Несколько гномов, навьючив свою поклажу на пони, отправились в дальний путь. Их заметили тролли, которые насчитали в караване 36 ног и 15 голов. Сколько было гномов, и сколько пони? Ответ: 12 гномов и 3 пони.