Использование свойств функции при решении задач по курсу алгебры и начал анализа

Несмотря на большое количество решаемых задач, учащиеся испытывают определенные трудности при самостоятельном поиске решения задач, особенно если поиск теоретических обоснований не ограничен рамками конкретного параграфа учебника. Чтобы частично снять трудности, необходимо больше внимания уделить поиску плана решения задачи. К основным приемам поиска решения задачи можно отнести: 1) анализ требования задачи и соотнесение требования с условием; 2) анализ условия, его развертывание и установление связей с требованием задачи; 3) развертывание требования задачи.

Гораздо большую пользу принесет учащимся решение одной задачи несколькими способами, нежели решение большого количества задач одним способом. При этом среди разных способов можно выделить способы как рациональные, так и нерациональные.

Часто рациональные способы не используются учащимися в силу тех или иных особенностей мышления, привычки и т.д. Перед учащимися возникают своеобразные психологические барьеры, перешагнув через которые они дальше без особого труда могут решить предлагаемую задачу способом более рациональным и легким, нежели способом стандартным или кажущимся легким на первый взгляд. Для организации поиска рациональных способов решения задачи необходимо больше внимания уделять работе с решенной задачей: получение теоретических сведений из решения задачи; обобщение результатов; отыскание иных способов решения. Заметим, что поиску рационального способа решения способствует сравнение различных способов решения задачи, выбор наиболее понравившегося и объяснение, почему тот или иной способ показался более привлекательным (здесь играет роль краткость решения задачи, неожиданный подход, наглядность, связь между различными темами школьного курса математики и т.д.).

Приемы для организации поиска рационального способа решения задач:

- использование приобретенных знаний и опыта из различных областей школьной математики;
- создание ситуации, побуждающей ученика анализировать условие задачи, глубже осмысливать знания;
- побуждение к поиску различных способов решения задачи, рассмотрению вопроса с различных точек зрения;

• создание ситуации самопроверки, анализа собственных знаний и практических умений.

С каждой алгебраической задачей связаны составляющие их аналитические выражения. Эти аналитические выражения могут задавать функции одной или нескольких переменных. Поэтому довольно часто алгебраическую задачу удается решить после исследования подходящей вспомогательной функции методами математического анализа. Конечно, не все задачи решаются с помощью свойств функций, но, тем не менее, такой способ решения во многих случаях облегчает решение подобных задач.

Задачи, которые решаются с помощью свойств функции могут быть использованы при повторении свойств функции, при подготовке к выпускным и вступительным экзаменам.

Пример 1. Решите уравнение: $3^x + 2^{2x} = 7^x$.

Решение: Очевидно, *x=1* является решением уравнения. Докажем единственность найденного решения. Записав уравнение в виде $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$, и зная, что сумма убывающих функций $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x, y = \left(\frac{4}{7}\right)^x$, является также убывающей, видим, что значение *1* функция $y = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$ принимает только один раз при *x=1.*

Ответ: *x=1.*

Пример 2. Решите уравнение:

$$(3x+2)\left(2+\sqrt{(3x+2)^2+3}\right) + x\left(2+\sqrt{x^2+3}\right) = 0.$$

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = x\left(2+\sqrt{x^2+3}\right)$. Тогда исходное уравнение приводится к виду $f(3x+2) = -f(x)$. Из нечетности функции оно равносильно уравнению $f(3x+2) = f(-x)$. Заметив, что функция f является возрастающей, переходим к равносильному уравнению $3x+2 = -x$.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

Пример 3. Решите неравенство $\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0$.

Решение. Здесь, используя свойства монотонности трансцендентных функций, перейдем от решения трансцендентного неравенства к решению рационального неравенства.

Воспользуемся тем, что, во-первых, $a^в$-a^c и *(a-1)(в-c)* имеют один знак, во-вторых, log_ab и *(a-1)(b-1)* также имеют один знак в области определения log_ab. Но при этом нельзя забывать, что формальная замена множителя log_ab выражением *(a-1)(b-1)* приводит к расширению области определения.

Тогда, заменяя каждый множитель на выражение того же знака, приходим к неравенству $\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x}\geq 0$ в области определения $x>1/5$, $x\neq 1/2$, $x\neq 1/3$. Решая полученное рациональное неравенство и учитывая область определения, получим $\frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{7}$; $x>\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{5}<x\leq\frac{2}{7}$; $x>\frac{1}{2}$.

Пример 4. Решите уравнение: $\sqrt{\sqrt{x-\frac{2}{9}}-\frac{2}{9}}=x$.

Решение: Областью определения исходного уравнения является множество G=$\left\{x\in R\,/\,x\geq\frac{22}{81}\right\}$. На этом множестве обе части уравнения принимают неотрицательные значения. Следовательно, на множестве G исходное уравнение равносильно такому: $\sqrt{x-\frac{2}{9}}=x^2+\frac{2}{9}$. Положим $f(x)=x^2+\frac{2}{9}$. Отсюда легко заметить, что в левой части уравнения стоит функция, обратная к функции $f(x)$ на множестве G. И, значит, уравнение имеет вид $f(x)=f^{-1}(x)$. Поскольку функция $f(x)$ возрастающая, то исходное уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x)=x \\ x\in G \end{cases}$, или $\begin{cases} x=x^2+\frac{2}{9}, \\ x\geq\frac{22}{81} \end{cases}$,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=\frac{2}{3} \end{array}\right. \\ x\geq\frac{22}{81} \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{2}{3}$ или $x=\frac{1}{3}$.

При решении задач, связанных с поиском наименьших и наибольших значений функции, приходится комбинировать приемы и методы из различных разделов школьного курса математики. Первое, что приходит в голову, – исследовать функцию на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. Но у такого подхода есть недостаток: этот привычный путь может быть сопряжен со значительными техническими трудностями. Рассмотрим это на примерах.

Пример 5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$y = 3\sqrt{(3\sin x - \cos x)^2 + 0,25.}$

Способ 1. Решим задачу с помощью производной, преобразовав условие к виду $y = 3\sqrt{1,25 - \sin 2x}$ (1). Тогда $y' = -\dfrac{3\cos 2x}{\sqrt{1,25 - \sin 2x}}$.

Найдем критические точки: т. к. знаменатель производной больше нуля, то решая уравнение *cos2x = 0*, найдем $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

Исследуем функцию на экстремумы найденные значения. Из преобразованного вида условия (1) видно, что функция имеет наименьший период π. Воспользуемся следующим соображением: если некоторая функция имеет период *T*, то и любая ее производная (при условии, что производная существует) также имеет период, равный *T*. В точках $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ производная меняет знак с минуса на плюс, а в точках $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ – наоборот. Значит, наибольшее значение функции достигается в точках $-\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ и равно *4,5*, а наименьшее значение в точках $\dfrac{\pi}{4} + \pi n$ и равно *1,5*.

Способ 2. Найдем область значений функции под знаком корня: $0,25 \le f(x) \le 2,25.$ Т.к. $f(x) \succ 0$, то $3\sqrt{0,25} \le y \le 3\sqrt{2,25}$, т.е. $1,5 \le y \le 4,5$ Следовательно, наибольшее значение функции равно *4,5*, а наименьшее значение равно *1,5*.

Как мы видим, приступая к решению задачи, особенно важно уметь оценивать трудоемкость метода и находить рациональный путь, избегая в некоторых случаях искушения решить задачу универсальным путем – с помощью производной, тем не менее, понимая, что далеко не все задачи на данную тему можно решить элементарными методами без помощи производной.

Но в некоторых случаях применение производной является наиболее рациональным способом решения, хотя исследование функций отходит на второй план. Например, с помощью специально введенных обобщающих функций и анализа их свойств, можно доказать числовые неравенства, решить уравнение, или неравенство, или установить число корней.

Пример 6. Что больше e^{π} или π^{e}?

Решение. Способ 1. Рассмотрим функцию *f(x)*= $\dfrac{\ln x}{x}$. Эта функция определена при *x>0*, функция возрастает на *(0;e)*, убывает *(e;+∞)* и имеет наибольшее значение при $x=e$. (Проверьте!) Значит $f(\pi)<f(e)$ или $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$, отсюда $e^{\pi}>\pi^{e}$.

Способ 2. Можно рассмотреть и другую функцию: $g(x)=x-e\ln x$, $g(e)=0$, $g'(x)= 1-\frac{e}{x} \geq 0$ при $x\geq e$. Значит, $g(x)$ возрастает и $g(\pi)>0$,

$\pi-e\ln\pi>0$, $e^{\pi}>\pi^{e}$.

Пример 7. Сколько действительных корней имеет уравнение $x^5+x^3+1=0$?

Решение. Пусть $p(x)= x^5+x^3+1$, тогда $p'(x)=5x^4+3x^2\geq 0$. Функция $p(x)$ возрастающая, поэтому не может иметь более одного действительного корня. Но $p(-1)=-1<0$, а $p(0)=1>0$. Значит на интервале $(-1;0)$ существует такое x_0, что $p(x_0)=0$. Значит, данное уравнение имеет один действительный корень.

Пример 8. Решите неравенство: $\log_2 \frac{2}{x^2+1} \geq x^4+1$.

Решение: Функция $y=\frac{2}{x^2+1}$ определена на всей числовой прямой. Она достигает наибольшего значения в точке $x=0$. Следовательно, $\log_2 \frac{2}{x^2+1} \leq 1$ при всех $x \in R$. Функция $y=x^4+1$ также определена на всей числовой прямой и в точке x=0 достигает наименьшего значения равного 1, т.е. $x^4+1 \geq 1$. Поэтому решением исходного неравенства является только x=1.

Ответ: x=1.

В конце рассмотрим использование свойств функции при решении задач с параметром.

Пример 9. Указать все значения a, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\cos x}} = \cos x$ имеет решение.

Решение. Пусть $\cos x=t$, $|t|\leq 1$. Тогда с помощью несложных выкладок приходим к равносильной системе $\begin{cases} \sqrt{a+t} = t^2-a \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$. Применим свойства обратимости функции. Функция $y=t^2-a$ при $0\leq t \leq 1$ обратима и обратная ей функция $y=\sqrt{a+t}$. Таким образом, в левой и правой частях уравнения системы стоят взаимообратные функции на отрезке [0; 1]. Причем эти функции возрастающие, и, потому их общие точки лежат на прямой $y=t$. Значит, $\begin{cases} t^2-a=t \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t^2-t \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$. Рассмотрим функции $\boldsymbol{y}(t)=t^2-t$ на отрезке [0; 1]. Тогда областью значения данной функции является промежуток [$-1/4;0$] (рис. 1).

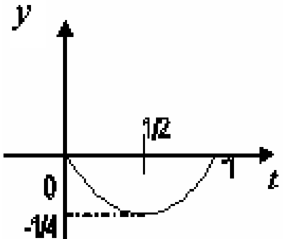

Рис. 1

Ответ: $a \in [-1/4;\ 0]$.

Пример 10. Решите уравнение $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$ для всех $a \in (0; \frac{1}{4})$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+a)^2 + \frac{1}{16} - a^2 = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$ (1). Введем обозначения $t = \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}};\quad t \geq 0.$ Тогда получим, что $x - t^2 = \frac{1}{16} - a^2$. Подставляя полученные значения в уравнение (1), после несложных преобразований получим $(x+a)^2+(x+a)=t^2+t$. Рассмотрим функцию $f(y)=y^2+y$. Тогда уравнение примет вид $f(x+a)=f(t)$. Функция $f(y)$ возрастает на промежутке $(-1/2;\ +\infty)$. Поскольку $x \geq \frac{1}{16} - a^2$ (из подкоренного выражения данного уравнения) и $0<a<1/4$ (из условия задачи), то $x+a>0$. Таким образом, $x+a$ и t принадлежат промежутку монотонности функции. Следовательно, имеем x+a=t. Отсюда получим $x = -a + \sqrt{a^2 + x - \frac{1}{16}}$. Сопоставим с данным уравнением и получим $x^2 + 2ax + \frac{1}{16} = x$. Дискриминант полученного квадратного уравнения неотрицателен при $0<a<1/4$. Поэтому подходят оба корня полученного квадратного уравнения.

Ответ: $x = \frac{1}{4}\left(2 - 4a \pm \sqrt{16a^2 - 16a + 3}\right)$.

Главную трудность в обучении математике составляет переход от чувственного к рациональному. Чтобы преодолеть эту трудность, необходимо учитывать, что обучение должно происходить при активной деятельности учащихся. Чем разнообразнее эта деятельность, тем выше качество усвоения знаний. Уровень знаний зависит и от характера деятельности – репродуктивной (воспроизводящей) или творческой.

Вопросы и задания:

1. Какие приемы можно использовать для организации поиска способа решения задачи?
2. Решите следующую задачу: При всех положительных значениях параметра a решите уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + x}} = x$. И придумайте организацию деятельности учащихся на уроке по поиску идеи его решения.
3. Выполните поиск способа решения следующих задач:

а) При каком значении m функция $y = \sqrt[3]{5x^2 + mx - 3}$ имеет минимум в точке $x_0 = 1{,}3$?

Ответ: $m=-13$.

б) Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2+6x+11}$. Ответ: $y=9$.

в) Решите неравенство: $(x^2+4x+5)\sin\pi x \geq 5x^2+6$. Ответ: $x = \dfrac{1}{2}$.

г) Решите неравенство: $\left(\dfrac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\dfrac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}$.

Ответ: $(-\sqrt{2+\sqrt{3}};-\sqrt{\dfrac{2}{3}})\cup(-\sqrt{2-\sqrt{3}};0)\cup(0;\sqrt{2-\sqrt{3}})\cup(\sqrt{\dfrac{2}{3}};\sqrt{2+\sqrt{3}})$.

д) Докажите неравенство: $(\sin 1^0)^{\cos 1^0} < (\cos 1^0)^{\sin 1^0}$.