Формирование исследовательских умений при решении геометрических задач

Одним из важнейших условий повышения эффективности учебного процесса является организация учебной исследовательской деятельности и развитие её основного компонента – исследовательских умений, которые не только помогают школьникам лучше справляться с требованиями программы, но и развивают у них логическое мышление, создают внутренний мотив учебной деятельности в целом.

Перечислим основные исследовательские умения при решении геометрических задач:

- умение выделять элементы задачи;
- умение находить фигуры, попадающие под этот элемент задачи;
- умение выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи;
- умение выявлять связи между полученными связями, которые, в конечном счете, приводят к решению этой задачи;
- умение оценивать полноту и непротиворечивость системы связей;
- умение строить структурный граф решения задачи [5].

Для формирования перечисленных умений особую роль играет образное мышление. Проанализируем проявления особенностей образного мышления при решении геометрических задач. Образное мышление учащихся играет важную роль в процессе обучения математике в средней школе, в частности при изучении геометрии. Более того, многие исследователи считают, что именно движение от наглядного образа понятия к его формальному определению, опора на образную стратегию мышления – "подлинно детский путь в математику".

Для формулирования исследовательских умений особую роль играет образное мышление. Покажем его особенности при реализации умения по нахождению фигур, попадающих под данный элемент задачи. Это:

- построение чертежа, соответствующего тексту задачи;
- нахождение фигур, попадающих под данный элемент задачи, т.е. фигур, имеющихся на чертеже, которые будут участвовать в решении задачи (возможны и дополнительные построения).

В работе [6] Д. Пойа «Как решать задачу» по этому поводу сказано следующее: «Если мы имеем дело с геометрической задачей, мы должны рассмотреть некоторую геометрическую фигуру. Эту фигуру мы можем либо представить в нашем воображении, либо изобразить на бумаге в виде чертежа. В некоторых случаях оказывается желательным вообразить фигуру, но не чертить ее».

Начнем с пояснения процесса воображения фигуры до выполнения чертежа.

Подавляющее большинство школьных задач предполагают однозначную трактовку геометрических задач. Такая практика формирует определенный стереотип и в результате предоставляются неполные решения геометрических задач, где заданные условия не позволяют выполнить чертеж одновариантно. Встречаются задачи, условия которых подсказывают существование нескольких принципиально различных случаев расположения фигур.

Задача 1. Точка *B* лежит на отрезке *AC*, причем *AB* = 2 см, *BC* = 1 см. На прямой *AB* взята точка *M*, для которого *AM* + *BM* = *CM*. Найдите длину отрезка *CM*.

Решение. В условии не указан порядок расположения точки М на прямой и его нужно представить или вообразить. Возможны четыре случая предполагаемого расположения искомых точек на прямой *AB* по отношению к трем данным точкам *A*, *B* и *C*.

1) Точка *M* лежит левее точки *A* (рис. 1а), тогда *AM* + *BM* = *AM* + *BA* + *AM* = 2*AM* + 2; *CM* = *CA* + *AM* = *AM* + 3, следовательно, *AM* = 1. Искомая точка – M_1. Тогда CM_1=4.

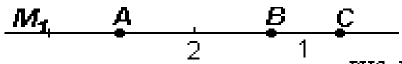


РИС. 1а

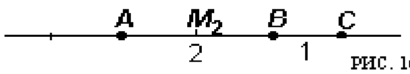


РИС. 1б

2) Точка *M* принадлежит отрезку *AB* (рис. 1б). Тогда *AM* + *BM* = *AB* = 2; *CM* = *CB* + *BM* = *BM* + 1, следовательно, *BM* = 1 = *AM*. Искомая точка – M_2. Тогда CM_2=2.

3) Точка *M* принадлежит отрезку *BC*. В этом случае решений нет, так как *AM* + *BM* ≥ *AB* = 2, а *CM* ≤ 1.

4) Точка *M* лежит правее точки *C*. В этом случае также нет решений, поскольку *BM* > *CM*.

При желании случаи 3) и 4) можно объединить.

Заметим, что существует также и алгебраический способ решения задачи 1: можно считать прямую АВ координатной, где А(0), тогда находим точки М(x), удовлетворяющие уравнению $|x| + |x - 2| = |x - 3|$. Составление этого уравнения наиболее полно характеризует умение выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи.

Ответ: 2 или 4.

При решении задач стереометрии уже на первом шаге часто возникают трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую геометрическую картину. Также заметим, что часто возникает проблема не только построения чертежа, но и выбора определенного ракурса чертежа, который обеспечит успех решения задачи. Более эффективно в этом случае попробовать мысленно представить себе требуемую конфигурацию.

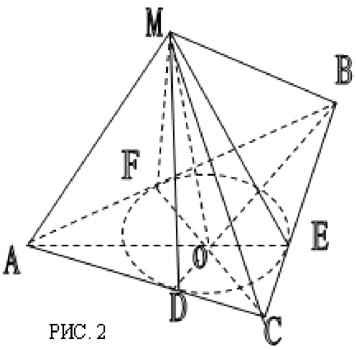
Задача 2. Основанием треугольной пирамиды служит правильный треугольник со стороной, равной *a.* Боковые грани имеют равные площади. Высота пирамиды равна *a*. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

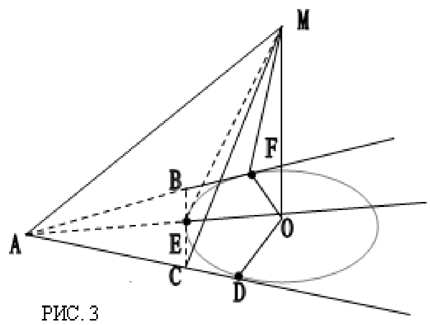
Решение. В этом примере исходной фигурой является треугольная пирамида.

Возникает проблема: изучить форму и размеры этой пирамиды.

Проведем исследование возникшей проблемы. Так как площади боковых граней равны между собой и в основании пирамиды лежит правильный треугольник, то высоты боковых граней, опущенные из вершины пирамиды, равны между собой. Это значит, что вершина пирамиды одинаково удалена от сторон основания или от прямых, на которых лежат эти стороны. В таком случае вершина пирамиды проектируется либо в центр вписанной в основание окружности, либо в один из центров вневписанных окружностей.

Таким образом, для данного случая возможны два различных варианта (рис. 2 и 3). В первом случае (рис. 2) радиус вписанной окружности равен $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ и высота боковой грани равна $\sqrt{a^2+\frac{a^2}{12}}=\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$. Тогда $S_{бок}=1/2\cdot P_{осн}\cdot h_{бок.грани}=\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$.





Во втором случае (рис.3) радиус вневписанной окружности определяется по формуле $r_a=\frac{S}{p-a}$, где r_a – радиус вневписанной окружности, которая касается стороны *a*, *S* – площадь треугольника, *p* – его полупериметр. В нашем случае радиус вневписанной окружности $r_a=$

$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\left(\dfrac{3a}{2}-a\right)}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда высоты боковых граней равны $\sqrt{a^2+\dfrac{3a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. Таким образом, $S_{бок}=1/2\cdot P_{осн}\cdot h_{бок.\ грани}=\dfrac{3a^2\sqrt{7}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{a^2\sqrt{39}}{4}$ или $\dfrac{3a^2\sqrt{7}}{4}$.

При решении геометрических задач, связанных с поиском наибольших и наименьших значений приходится комбинировать приемы и методы решения из разных разделов школьного курса математики. В первую очередь напрашивается идея составить уравнение с помощью заданных параметров и исследовать ее на наименьшие и наибольшие значения с помощью производной. Мы покажем задачу, в которой умение выделять элементы задачи и умение находить фигуры, попадающие под этот элемент задачи, позволяют обойтись чисто геометрическими рассуждениями, не прибегая к исследованию функции.

Задача 3. В данный круговой сектор *OMN* с острым центральным углом впишите прямоугольник наибольшей площади так, чтобы две его вершины лежали на радиусе *OM* (рис. 4).

Решение. Пусть в сектор *OMN* вписан прямоугольник *АВСД* так, что сторона *АВ* лежит на радиусе *ОМ* сектора. Обозначим $OM=R$, $\angle MON=\alpha$, $BC=x$. Тогда из прямоугольного треугольника *ОАД* имеем $OA=x\,ctg\alpha$, также из прямоугольного треугольника *ОВС*: $OB=\sqrt{R^2-x^2}$ и $AB=OB-OA$. Площадь прямоугольника *АВСД* есть функция от x: $S(x)=\left(\sqrt{R^2-x^2}-x\,ctg\,\alpha\right)\cdot x$, где $0<x<R\sin\alpha$.

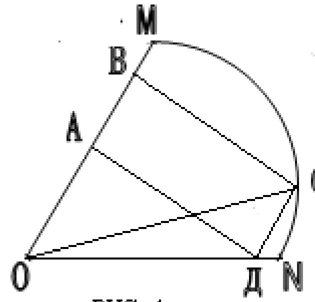


РИС. 4

Наибольшее значение этой функции можно найти исследованием функции $S(x)$ с помощью производной, но это требует громоздких выкладок.

Решим задачу иначе. При выделении элементов задачи и нахождении фигуры, попадающие под этот элемент задачи можно заметить, что площадь прямоугольника *АВСД* зависит от величины угла *МОС*. И потому за независимую переменную x примем величину $\angle MOC$. Тогда из треугольника *ОВС* имеем $BC=R\sin x$ и из треугольника *ОСД* получаем, что $СД=\dfrac{R\sin(\alpha-x)}{\sin(180-\alpha)}=\dfrac{R\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha}$. Площадь прямоугольника *АВСД* есть функция от x: $S(x)=СД\cdot BC=\dfrac{R^2\sin x\sin(\alpha-x)}{\sin\alpha}$, где $0<x<\alpha$. Применив тригонометрическую формулу преобразования произведения в разность, получим $S = R^2 \dfrac{\cos(2\alpha - x) - \cos x}{2\sin\alpha}$. Отсюда видно, что наибольшее значение S достигается при $\cos(2\alpha - x) = 1$, т.е. когда $x = \alpha/2$ и значит, OC есть биссектриса $\angle MOC$.

Ответт: OC есть биссектриса $\angle MOC$.

Задача 4. Для снабжения водой двух населенных пунктов, расположенных по одну сторону от канала, требуется на берегу канала построить водонапорную башню (рис. 5). В каком месте следует построить башню, чтобы суммарная длина труб от нее до каждого из пунктов (по прямой) была наименьшей?

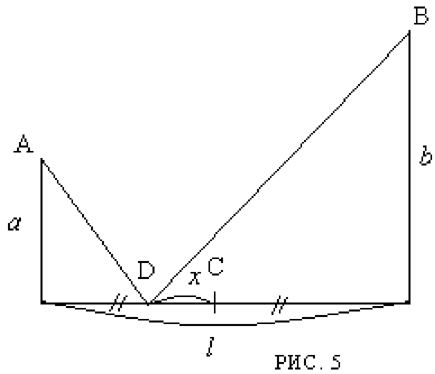


РИС. 5

Способ 1. Для того чтобы решить задачу, составляем некоторую функцию, находим ее производную и, исходя из «физического» смысла задачи, выбираем нужное значение переменной, учитывая изменения знаков производной при переходе через критическую точку.

Пусть точка C середина отрезка длиной l, D – искомая точка, тогда за x обозначим длину отрезка CD, за S_1 – длину AD, за S_2 – длину BD. Получаем $S_1 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}$ и $S_2 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2}$. Тогда из условия $S = S_1 + S_2$, найдем S, его производную и критические точки:

$$S = \sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2} + \sqrt{b^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2};\quad S' = \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2}} - \frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}};\quad S' = 0;$$

$$\frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{b^2 + \left(\frac{l}{2} + x\right)^2}} = \frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{l}{2} - x\right)^2}},$$ решая полученное иррациональное уравнение относительно x, получим $x = \frac{l}{2} \cdot \frac{b - a}{b + a}$. В этой точке производная $S'(x)$ меняет знак с «минуса» на «плюс», то в этой точке функция S(x) имеет минимум. Подставляя полученное значение, после определенных преобразований получим $S = \sqrt{l^2 + (b + a)^2}$. Как мы видим, данное решение сопряжено громоздкими выкладками. Посмотрим другой способ решения, на наш взгляд наиболее рациональный.

Способ 2. При решении этим способом нам поможет геометрия. Один из населенных пунктов A или B, например A, отразим симметрично относительно канала. Если мы соединим отрезком полученную точку $A^/$ с точкой A, то точка D пересечения этого отрезка с каналом и будет искомой точкой расположения водонапорной башни (рис. 6). В самом деле, для любой другой точки E на том же берегу канала суммарная длина труб до точек A и $A^/$ (в силу симметрии относительно канала имеем равенства $EA=EA^/$ и $DA=DA^/$), которая в свою очередь будет превосходить величину $A^/B=AD+DB$. Тогда из треугольника $A^/B^/B$ по теореме Пифагора получаем, что $S=S_1+S_2=\sqrt{l^2+(b+a)^2}$.

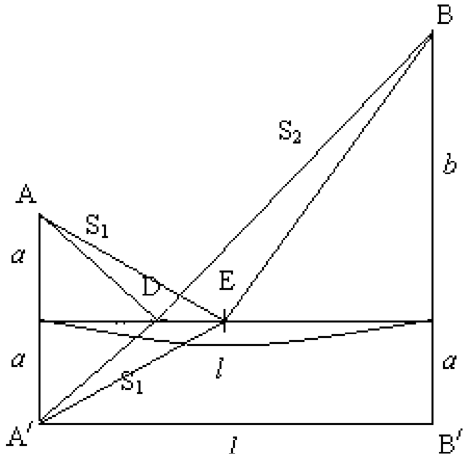


РИС. 6

Для выработки умения оценивать полноту и непротиворечивость системы связей можно давать задачи-вопросы.

Задача 5. В выпуклом четырёхугольнике ABCD: AB=CD, $\angle A=\angle C$. Верно ли, что этот четырёхугольник - параллелограмм?

Решение. Рассмотрим две окружности одинакового радиуса, пересекающиеся в точках B и D (рис 7). В одной из них проведём хорду AB на некотором расстоянии от её центра O, а в другой – хорду CD на таком же расстоянии от центра O_1, причём в одном случае точки O и O_1 должны лежать в одной полуплоскости относительно хорды, а в другом случае – в разных полуплоскостях. Получим, что AB=CD, так как это хорды в равных окружностях, которые расположены на равном расстоянии от их центров, и $\angle BAD=\angle BCD$, так как эти углы вписаны в равные окружности и опираются на равные дуги. При этом, AB и CD – не параллельны, так как во второй окружности существует хорда DE, параллельная AB (DE=DC и лежит по другую сторону от точки O_1). Следовательно, четырёхугольник ABCD – не параллелограмм.

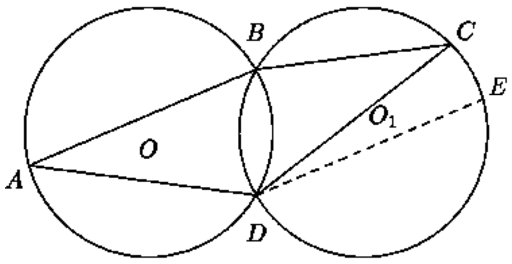


РИС. 7

Ответ: неверно.

Формирование исследовательских умений является составной частью процесса видения объектов изучения. Видение объекта связано с представлениями учащихся о его внутреннем строении. Геометрическая задача, как сложный объект несет себе множество связей, в котором можно выделить основную. Основная связь определяет вид дополнительных построений, который способствует отысканию пути решения задачи. Таким образом, при формировании умений выявлять связи между фигурами, попадающими под данный элемент задачи и связи между полученными связями, которые, в конечном счете, приводят к решению этой задачи, необходимо создавать предпосылки для возникновения догадок о выполнении дополнительных построений, об их геометрическом видении.

Задача 6. Угол BAC треугольника ABC равен 120^0. На биссектрисе этого угла взята точка D так, что $AD=AB+AC$. Найдите углы треугольника BDC.

Решение. Способ 1. Отложим на луче AD отрезок AK, равный AB (рис. 8). Тогда ΔBAK – равнобедренный с углом 60^0, то есть, ΔBAK – равносторонний. Следовательно, $BK = BA$, $DK = AD - AK = AD - AB = CA$ и $\angle BKD = 180^0 - \angle BKA = 120^0 = \angle BAC$. Тогда $\Delta BKD = \Delta BAC$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому $BD = BC$ и $\angle DBC = \angle DBK + \angle CBK = \angle CBA + \angle CBK = 60^0$. Таким образом, ΔBDC – равнобедренный с углом 60^0, то есть, ΔBDC – равносторонний.

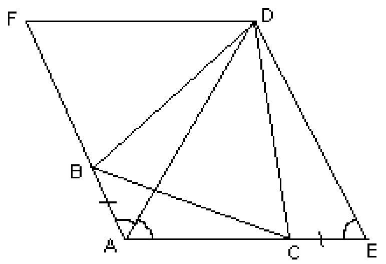


РИС. 8

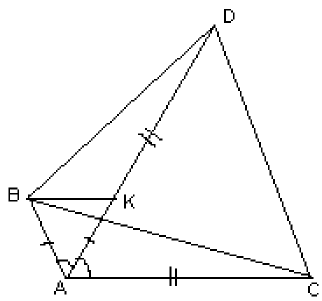


РИС. 9

Способ 2. Проведем прямые DE и DF, соответственно параллельные прямым AB и AC (рис. 9), тогда $AEDF$ – параллелограмм, в котором диагональ AD является биссектрисой угла, то есть, $AEDF$ – ромб. Из условия задачи следует, что $\angle DAF=\angle DAE=\angle DEA=60^0$, то есть, сторона ромба равна его диагонали, в частности, $AD = AE = ED$. Следовательно, $EC=AE-AC=AD-AC=AB$. Тогда $\Delta ABD = \Delta ECD$ (по двум сторонам и углу между ними), поэтому, $BD=CD$. Кроме того, $\angle BDC=\angle BDA+\angle ADC=\angle EDC+\angle ADC=60^0$. Таким образом, ΔBDC – равнобедренный с углом 60^0, то есть, ΔBDC – равносторонний.

Возможны и другие способы решения, использующие различные дополнительные построения. Все эти способы, так или иначе, связаны с идеей поворота на плоскости вокруг некоторой точки. В частности, приведенные решения основаны на рассмотрении следующих поворотов: 1) с центром B на угол 60^0; 2) с центром D так, чтобы прямая AB перешла в прямую AC (то есть также на 60^0).

Ответ: три угла по 60^0 .

Задача 7. В равнобедренном треугольнике ABC угол B, противолежащий основанию, равен 20°. На стороне AB отмечена точка D так, что $BD = AC$. Найдите угол ACD.

Решение. Пусть ABC – данный треугольник. Вычислим углы при основании: $\angle A = \angle B = (180° - 20°) : 2 = 80°$. Дальнейшие рассуждения требуют дополнительных построений, которые могут различаться, но так или иначе используют равенство: 80° – 20° = 60°.

Способ 1. Построим равносторонний ΔAMC (см. рис.10), тогда $\Delta ABM = \Delta CBM$ (по III признаку равенства треугольников), следовательно, $\angle ABM = 10°$.

Так как $\angle BAM = 20° = \angle DBC$, то $\Delta DBC = \Delta MAB$ (по I признаку), значит, $\angle BCD = \angle ABM = 10°$.

Следовательно, $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

Способ 2. Построим последовательно точки E, F и D' так, что $AC = CE = EF = FD'$ (см. рис. 11).

Последовательно вычисляем углы: $\angle AEC = 80°$; $\angle ACE = 20°$; $\angle ECB = 60°$; $\angle CEF = \angle CFE = 60°$; $\angle D'EF = 40°$; $\angle ED'F = 40°$; $\angle D'FB = 40° - 20° = 20°$, следовательно, $BD' = D'F = AC$, то есть, точка D' совпадает с данной точкой D.

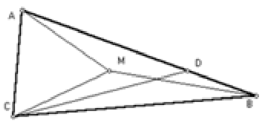


РИС. 10

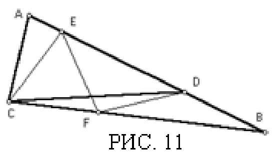


РИС. 11

Так как ΔDFC – равнобедренный, то $\angle DCF = 20° : 2 = 10°$, тогда $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

Способ 3. Достроим ΔABC до параллелограмма $ABFC$ и построим равносторонний треугольник BMF (см. рис. 12). Тогда, из равенства треугольников DBC и MBC (по I признаку), следует, что $\angle DCB = \angle MCB = \angle MCF = 10°$, следовательно, $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

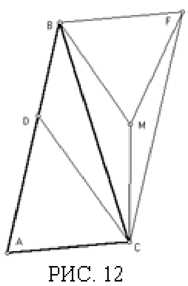


РИС. 12

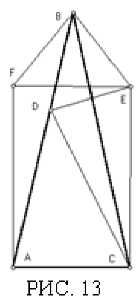


РИС. 13

Способ 4. Построим перпендикуляры к AC в точках A и C и отложим $\angle ABF = \angle ABE = 20°$ (см. рис. 13). Тогда, $\angle EBF = 60°$ и $\Delta ABF = \Delta CBE$ (по II признаку), значит, ΔFBE – равносторонний.

$\Delta BCD = \Delta BCE$ (по I признаку), $\angle BCD = 90° - 80° = 10°$, следовательно, $\angle ACD = 80° - 10° = 70°$.

Способ 5. Вне треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *ACK* и проведем *DM//AK* (см. рис. 14).

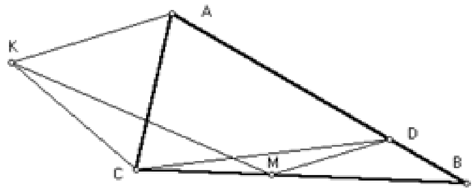


РИС. 14

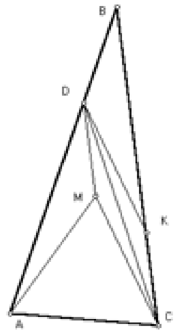


РИС. 15

Тогда, $\angle ADM$ = 180° – 80° – 60° = 40°; $\angle BMD$ = 40° – 20° = 20°. Следовательно, *DM = DB = AC = AK*, то есть, *ADMK* – параллелограмм. Значит, $\angle DMK$ = 180° – 40° = 140°; $\angle CMK$ = 20° =$\angle CKM$; *MC =KC = AC = DM*. Тогда, $\angle DCM$ = 20° : 2 = 10°, следовательно, $\angle ACD$ = 80° – 10° = 70°.

Способ 6. Построим равносторонний треугольник *AMC*, соединим точки *M* и *D*, а на стороне *BC* выберем точку K так, чтобы *KD = BD* (см. рис.15). Тогда, *CMDK* – параллелограмм, поэтому, $\angle ADM = \angle ABC$, $\angle DAM$ = 80° – 60° = 20°; значит, *AM = MD*. Таким образом, *MDKC* – ромб; $\angle DCK = 0{,}5\angle MCD$ = 10°; следовательно, $\angle ACD$ = 60° + 10° = 70°.

Ответ: $\angle ACD$ = 70°.

Задача 8. Докажите, что объем тетраэдра равен $1/6\cdot abcsin\varphi$, где *а* и *в* – противоположные ребра, а φ и *с* – соответственно угол и расстояние между ними.

Решение. Пусть в тетраэдре *ДАВС ВС=а, АД=в*, φ и *с* – соответственно угол и расстояние между ребрами *ВС* и *АД*. Достроим тетраэдр до треугольной призмы $АВСДВ_1С_1$, как показано на рисунке 16. Тогда $\angle B_1BC=\varphi$, ребро *АД* параллельно плоскости грани BB_1C_1C и расстояние между ними равно *с*.

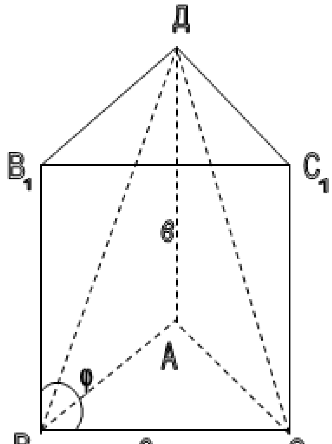


РИС. 16

Объем *V* тетраэдра *ДАВС* равен одной трети объема V_1 призмы: $V=1/3V_1$. С другой стороны, $V_1 = \frac{1}{2} S_{BB_1C_1C} \cdot c$, а $S_{BB_1C_1C} = aв\sin\varphi$. И поэтому $V=1/6\cdot aвcsin\varphi$. Что и требовалось доказать.

Глубокое и прочное усвоение школьниками основ курса геометрии чрезвычайно важно для формирования их математической культуры. Вместе с тем формирование высокой математической культуры выпускников современной школы предполагает принципиально иную организацию собственной познавательной деятельности школьников, в процессе которой у них формируются умения исследовать, умения изучать геометрию самостоятельно и творчески, а, следовательно, создаются предпосылки к активному применению математических знаний в дальнейшем.

Вопросы и задания:

1. Как организовать работу учителя по формированию исследовательских умений при решении геометрических задач?

2. Придумайте схему организации деятельности учащихся по формированию исследовательских умений при решении следующих задач:

Задача 1. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна 20π. Найдите площадь этого треугольника, если его основание равно *12*. Ответ: *108* или *12*.

Задача 2. Через вершину B_1 куба $ABCДA_1B_1C_1Д_1$ проведена плоскость, пересекающая ребра *BC* и *AB* и образующая с гранью *ABCД* угол α, причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно *a*. Ответ: $\dfrac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ *или* $\dfrac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

Задача 3. Найти периметр треугольника наибольшей площади, образованного большим основанием и продолжением боковых сторон трапеции, если известно, что длина верхнего основания трапеции в два раза меньше длины ее нижнего основания, а диагонали равны *5* и *6* см. Ответ: $\dfrac{26+4\sqrt{34}+2\sqrt{61}}{3}$.

Задача 4. В четырехугольнике *ABCD* углы *A* и *B* – прямые. Известно также, что *CD* = *AD* + *BC*. Биссектриса угла *ADC* пересекает *AB* в точке *M*. Найдите угол *CMD*. Ответ: 90°.

3. Разработайте фрагмент урока по введению вспомогательного элемента (дополнительного построения).