

Изменения содержания школьного математического образования: вероятность и статистика в основной школе

Из истории вопроса
1990-е. Первые попытки ввести элементы вероятности в школьные учебники средней школы. Первый учебник, целиком посвященный теории вероятностей, создают Е.А.Бунимович и В.А.Булычев

2003 год 23.09. Письмо Министерства образования РФ «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы»

2004 год ФГОС предполагает введение элементов теории вероятностей, статистики и комбинаторики

2007 год. Теория вероятностей становится обязательным элементом в школах

2010 год. Появление задач в ГИА

2012 год. Появление задач в ЕГЭ

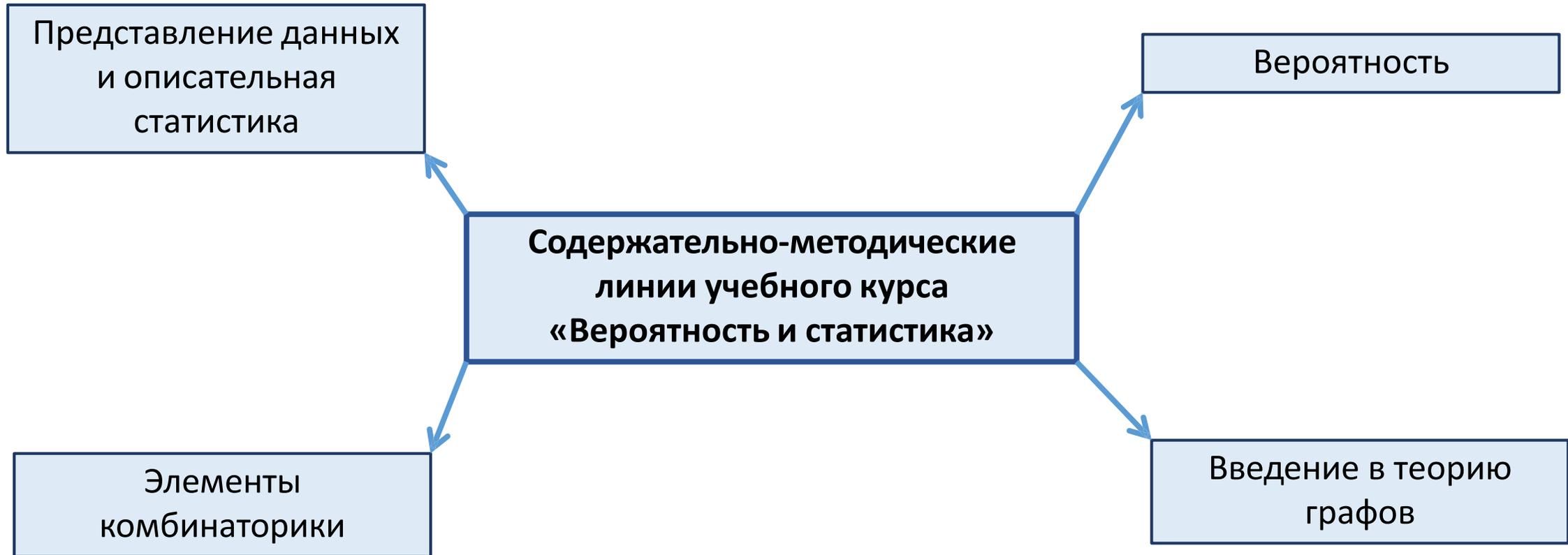
2013 год. Принята Концепция развития математического образования, где теория вероятностей прямо определяется как перспективное направление

Последние годы международные исследования математической и функциональной грамотности школьников содержат все больше заданий на представление данных, оценку правдоподобности гипотез и вероятностей событий.



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	5		
Цели и особенности изучения учебного предмета «Математика». 5—9 классы	6		
Место учебного предмета «Математика» в учебном плане	8		
ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «МАТЕМАТИКА» НА УРОВНЕ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ ..	9		
Личностные результаты	—		
Метапредметные результаты	11		
Предметные результаты	13		
РАЗДЕЛ 1. ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА «МАТЕМАТИКА». 5—6 КЛАССЫ	15		
Цели изучения учебного курса	—		
Место учебного курса в учебном плане	17		
Предметные результаты освоения Примерной рабочей программы курса (по годам обучения)	—		
Содержание учебного курса (по годам обучения)	21		
Тематическое планирование учебного курса (по годам обучения)	26		
РАЗДЕЛ 2. ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА «АЛГЕБРА». 7—9 КЛАССЫ	43		
Цели изучения учебного курса	—		
Место учебного курса в учебном плане	44		
Предметные результаты освоения Примерной рабочей программы курса (по годам обучения)	45		
Содержание учебного курса (по годам обучения)	49		
Тематическое планирование учебного курса (по годам обучения)	53		
РАЗДЕЛ 3. ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА «ГЕОМЕТРИЯ». 7—9 КЛАССЫ ...	70		
Цели изучения учебного курса	—		
Место учебного курса в учебном плане	71		
Предметные результаты освоения Примерной рабочей программы курса (по годам обучения)	72		
Содержание учебного курса (по годам обучения)	75		
		Тематическое планирование учебного курса (по годам обучения)	77
		РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕРНАЯ РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОГО КУРСА «ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА». 7—9 КЛАССЫ	89
		Цели изучения учебного курса	—
		Место учебного курса в учебном плане	90
		Предметные результаты освоения Примерной рабочей программы курса (по годам обучения)	91
		Содержание учебного курса (по годам обучения)	93
		Тематическое планирование учебного курса (по годам обучения)	95

Курс «Вероятность и статистика» в примерной рабочей программе по математике (базовый уровень)



ПЛАНИРУЕМЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ПРИМЕРНОЙ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ КУРСА (ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ)

7 класс

- Читать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах; представлять данные в виде таблиц, строить диаграммы (столбиковые (столбчатые) и круговые) по массивам значений.
- Описывать и интерпретировать реальные числовые данные, представленные в таблицах, на диаграммах, графиках.
- Использовать для описания данных статистические характеристики: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах.
- Иметь представление о случайной изменчивости на примерах цен, физических величин, антропометрических данных; иметь представление о статистической устойчивости.

ПЛАНИРУЕМЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ПРИМЕРНОЙ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ КУРСА (ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ)

8 класс

- Извлекать и преобразовывать информацию, представленную в виде таблиц, диаграмм, графиков; представлять данные в виде таблиц, диаграмм, графиков.
- Описывать данные с помощью статистических показателей: средних значений и мер рассеивания (размах, дисперсия и стандартное отклонение).
- Находить частоты числовых значений и частоты событий, в том числе по результатам измерений и наблюдений.
- Находить вероятности случайных событий в опытах, зная вероятности элементарных событий, в том числе в опытах с равновозможными элементарными событиями.
- Использовать графические модели: дерево случайного эксперимента, диаграммы Эйлера, числовая прямая.
- Оперировать понятиями: множество, подмножество; выполнять операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение; перечислять элементы множеств; применять свойства множеств.
- Использовать графическое представление множеств и связей между ними для описания процессов и явлений, в том числе при решении задач из других учебных предметов и курсов.

ПЛАНИРУЕМЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ПРИМЕРНОЙ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ КУРСА (ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ)

9 класс

- Извлекать и преобразовывать информацию, представленную в различных источниках в виде таблиц, диаграмм, графиков; представлять данные в виде таблиц, диаграмм, графиков.
- Решать задачи организованным перебором вариантов, а также с использованием комбинаторных правил и методов.
- Использовать описательные характеристики для массивов числовых данных, в том числе средние значения и меры рассеивания.
- Находить частоты значений и частоты события, в том числе пользуясь результатами проведённых измерений и наблюдений.
- Находить вероятности случайных событий в изученных опытах, в том числе в опытах с равновероятными элементарными событиями, в сериях испытаний до первого успеха, в сериях испытаний Бернулли.
- Иметь представление о случайной величине и о распределении вероятностей.
- Иметь представление о законе больших чисел как о проявлении закономерности в случайной изменчивости и о роли закона больших чисел в природе и обществе.

Курс «Вероятность и статистика» в примерной рабочей программе по математике (базовый уровень)

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО КУРСА (ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ)

7 класс (не менее 34 ч)

Название раздела (темы) (число часов)	Основное содержание	Характеристика деятельности обучающихся
Представление данных (7 ч)	<p>Представление данных в таблицах. Практические вычисления по табличным данным. Извлечение и интерпретация табличных данных. Практическая работа «Таблицы».</p> <p>Графическое представление данных в виде круговых, столбиковых (столбчатых) диаграмм. Чтение и построение диаграмм. Примеры демографических диаграмм. Практическая работа «Диаграммы»</p>	<p>Осваивать способы представления статистических данных и числовых массивов с помощью таблиц и диаграмм с использованием актуальных и важных данных (демографические данные, производство промышленной и сельскохозяйственной продукции, общественные и природные явления).</p> <p>Изучать методы работы с табличными и графическими представлениями данных с помощью цифровых ресурсов в ходе практических работ</p>
Описательная статистика (8 ч)	<p>Числовые наборы. Среднее арифметическое.</p> <p>Медиана числового набора. Устойчивость медианы.</p> <p>Практическая работа «Средние значения».</p> <p>Наибольшее и наименьшее значения числового набора. Размах</p>	<p>Осваивать понятия: числовой набор, мера центральной тенденции (мера центра), в том числе среднее арифметическое, медиана.</p> <p>Описывать статистические данные с помощью среднего арифметического и медианы. Решать задачи.</p> <p>Изучать свойства средних, в том числе с помощью цифровых ресурсов, в ходе практических работ.</p>

Курс «Вероятность и статистика» в примерной рабочей программе по математике (базовый уровень)

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО КУРСА (ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ)

7 класс (не менее 34 ч)

Продолжение

Название раздела (темы) (число часов)	Основное содержание	Характеристика деятельности обучающихся
		<p>Осваивать понятия: наибольшее и наименьшее значения числового массива, размах.</p> <p>Решать задачи на выбор способа описания данных в соответствии с природой данных и целями исследования</p>
Случайная изменчивость (6 ч)	<p>Случайная изменчивость (примеры). Частота значений в массиве данных. Группировка. Гистограммы.</p> <p>Практическая работа «Случайная изменчивость»</p>	<p>Осваивать понятия: частота значений в массиве данных, группировка данных, гистограмма.</p> <p>Строить и анализировать гистограммы, подбирать подходящий шаг группировки.</p> <p>Осваивать графические представления разных видов случайной изменчивости, в том числе с помощью цифровых ресурсов, в ходе практической работы</p>
Введение в теорию графов (4 ч)	<p>Граф, вершина, ребро. Представление задачи с помощью графа. Степень (валентность) вершины. Число рёбер и суммарная степень вершин. Цепь и цикл. Путь в графе. Представление о связности графа. Обход графа (эйлеров путь). Представление об ориентированных графах</p>	<p>Осваивать понятия: граф, вершина графа, ребро графа, степень (валентность вершины), цепь и цикл.</p> <p>Осваивать понятия: путь в графе, эйлеров путь, обход графа, ориентированный граф.</p> <p>Решать задачи на поиск суммы степеней вершин графа, на поиск обхода графа, на поиск путей в ориентированных графах.</p> <p>Осваивать способы представления задач из курса алгебры, геометрии, теории вероятностей, других предметов с помощью графов (карты,</p>

Курс «Вероятность и статистика» в примерной рабочей программе по математике (базовый уровень)

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ УЧЕБНОГО КУРСА (ПО ГОДАМ ОБУЧЕНИЯ)

7 класс (не менее 34 ч)

Продолжение

Название раздела (темы) (число часов)	Основное содержание	Характеристика деятельности обучающихся
		схемы, электрические цепи, функциональные соответствия) на примерах
Вероятность и частота случайного события (4 ч)	Случайный опыт и случайное событие. Вероятность и частота события. Роль маловероятных и практически достоверных событий в природе и в обществе. Монета и игральная кость в теории вероятностей. Практическая работа «Частота выпадения орла»	Осваивать понятия: случайный опыт и случайное событие, маловероятное и практически достоверное событие. Изучать значимость маловероятных событий в природе и обществе на важных примерах (аварии, несчастные случаи, защита персональной информации, передача данных). Изучать роль классических вероятностных моделей (монета, игральная кость) в теории вероятностей. Наблюдать и изучать частоту событий в простых экспериментах, в том числе с помощью цифровых ресурсов, в ходе практической работы
Обобщение, контроль (5 ч)	Представление данных. Описательная статистика. Вероятность случайного события	Повторять изученное и выстраивать систему знаний. Решать задачи на представление и описание данных с помощью изученных характеристик. Обсуждать примеры случайных событий, маловероятных и практически достоверных случайных событий, их роли в природе и жизни человека



Принципы построения курса

- Первичность статистики
- Некомбинаторный подход к теории вероятностей
- Школьная вероятность как математическое средство изучения случайности
- Практическая направленность и ясное школьное содержание
- Небольшое количество методов и алгоритмов
- Одна из целей – формирование представления о действии и роли закона больших чисел





- ▶ **Ключевая особенность:** в качестве учебного материала в пособии использованы актуальные сведения о демографии, экономике, сельском хозяйстве России, явлениях повседневной жизни, окружающих школьника
- ▶ **Особенности учебного пособия:**
 - ✓ учебное пособие «Теория вероятностей и статистика» может использоваться как на уроках математики, так и для организации внеурочной деятельности;
 - ✓ для погружения в предмет изучения даётся мотивирующая информация, она часто связана с интересами школьников;
 - ✓ содержание задач в пособии вызывает желание решить их и найти ответы на все вопросы.





Условные обозначения

- Важно
- Вопросы
- Справка, комментарий
- Упражнения
- Определение
- Практическое задание, статистическое исследование
- Начало и окончание материала для углублённого изучения
- 13 (или 13*) Пункт, содержание которого не входит в обязательный минимум содержания ФГОС по математике
- 120 Задание повышенной сложности

	A	B	C
1			
2		Наименование	Количество
3	1	Стол рабочий	11
4	2	Шкаф для одежды	
5	3	Стул	
6	4	Кресло	
7	5	Тумбочка с ящиками	
8	6	Книжный шкаф	
9	7	Настольная лампа	
10	8	Маленький круглый стол	
11	9	Зелёный диван	

В редакторах электронных таблиц на персональных компьютерах для вычисления среднего арифметического предусмотрена специальная функция

СРЗНАЧ()

На рисунке показан пример вычисления среднего значения массива из четырёх чисел.

fx =СРЗНАЧ(C1:C4)		
C	D	E
1		
9		
5		
6	Среднее	5,25

В редакторах электронных таблиц для вычислений вероятностей по распределениям предусмотрена функция

ВЕРОЯТНОСТЬ()

На рисунке показано решение примера 2.

fx =ВЕРОЯТНОСТЬ(C3:C8;D3:D8;2;5)			
C	D	E	F
Значения	Вероятности		
0	0,03	0,8125	
1	0,16		
2	0,31		
3	0,31		
4	0,16		
5	0,03		

Чтобы найти медиану массива данных в электронных таблицах, удобно использовать функцию

МЕДИАНА()

На рисунке показан пример.

fx =МЕДИАНА(C1:C5)		
C	D	E
1		
9		
5		
6		
3	Медиана	5



I Таблицы

Таблицы нужны, чтобы упорядочивать большие массивы данных. Гораздо легче искать информацию в таблице, чем в обычном тексте, потому что в таблице каждое значение находится в своей ячейке, а однородные сведения сгруппированы в одной графе. Если данные подходящим образом помещены в таблицу, то их удобно сравнивать. Кроме того, в таблицах удобно проводить несложные вычисления и подсчёты. А электронные таблицы позволяют быстро работать даже с большими массивами данных. В первой главе мы будем учиться представлять статистические данные с помощью таблиц и извлекать из них информацию.

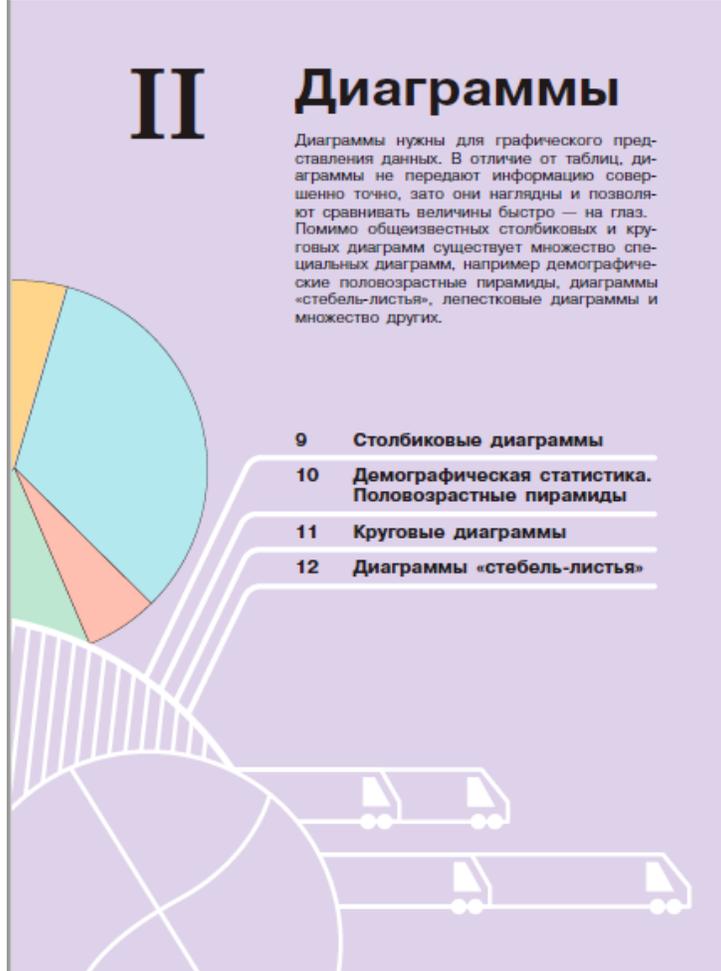
- 1 Сбор данных и построение таблицы
- 2 Статистические данные в таблицах
- 3 Поиск информации в таблицах
- 4 Вычисления в таблицах
- 5 Крупнейшие города России
- 6 Подсчёты и измерения в таблицах
- 7 Упорядочивание данных в таблицах
- 8 Таблицы сопряжённости



II Диаграммы

Диаграммы нужны для графического представления данных. В отличие от таблиц, диаграммы не передают информацию совершенно точно, зато они наглядны и позволяют сравнивать величины быстро — на глаз. Помимо общеизвестных столбчатых и круговых диаграмм существует множество специальных диаграмм, например демографические половозрастные пирамиды, диаграммы «стебель-листья», лепестковые диаграммы и множество других.

- 9 Столбчатые диаграммы
- 10 Демографическая статистика. Половозрастные пирамиды
- 11 Круговые диаграммы
- 12 Диаграммы «стебель-листья»



III Описательная статистика. Средние значения и размах

В этой главе речь идёт о том, как описать одним-двумя числами важные свойства большого массива данных. Отсюда и название главы — «Описательная статистика». Существует множество описательных показателей, по которым можно судить о средних значениях, рассеивании, асимметрии и характере изменения статистических данных. В статистике широко используются среднее арифметическое и медиана. Иногда требуются другие средние, например, урезанное среднее.

- 13 Среднее арифметическое
- 14 Медиана
- 15 Наименьшее и наибольшее значения. Размах
- 16 Урезанное среднее
- 17 Как выбрать подходящее среднее





IV*

Описательная статистика. Квартили и частоты

В этой главе мы продолжим рассказ об описательной статистике. Мы познакомимся с квантилями и ещё двумя специальными средними значениями. Начав использовать математические обозначения, сумеем провести математические доказательства некоторых фактов.

Чтобы удобнее описывать массивы с повторяющимися значениями, используются частоты отдельных значений. Мы познакомимся с ними и увидим, как частоты значений массива связаны со средним арифметическим.

- 18* Квартили и межквартильный размах
- 19* Обозначения в статистике. Свойства среднего арифметического
- 20* Частоты значений
- 21* Среднее гармоническое и среднее геометрическое

V

Случайная изменчивость

Неизменные величины в жизни встречаются крайне редко. Даже те величины, которые в физике называют постоянными обычно подвержены изменчивости. Иногда мы можем указать причины и даже законы изменчивости. Но помимо закономерной изменчивости почти всегда присутствует разнонаправленная случайная изменчивость, причины которой известны частично, а порой неизвестны вовсе.

В этой главе мы обсудим несколько важных примеров изменчивости, которую приходится учитывать в повседневной жизни. Например, мы будем говорить о погрешностях и о точности измерений.

Кроме того, мы увидим, как разные виды изменчивости отражаются на диаграммах.

- 22 Примеры случайной изменчивости
- 23 Точность и погрешность измерений
- 24 Тенденции и случайные отклонения
- 25 Группировка данных и гистограммы
- 26 Рост человека
- 27 Статистическая устойчивость и оценки с помощью выборки

VI

Случайные события и вероятность

Попытка изучать изменчивость и случайность с помощью математики привела к появлению теории вероятностей. В этой главе мы познакомимся с основными понятиями теории вероятностей: случайными опытами и случайными событиями, которые происходят в этих опытах.

Вероятность случайного события — это числовая мера его правдоподобия. Чем больше шансов на осуществление события, тем больше его вероятность.

В нашей жизни играют большую роль маловероятные события. Мы расскажем о таких событиях и о том, как правильно к ним относиться.

- 28 Случайные события и случайные эксперименты
- 29 Вероятности и частоты событий
- 30 Монета и игральная кость в теории вероятностей
- 31 Как узнать вероятность события
- 32 Зачем нужно знать вероятность события



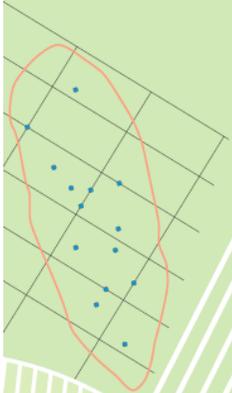


VII Рассеивание данных

Занимаясь в главах III и IV описательной статистикой, мы говорили о центральных мерах. Но для более полного описания изменчивых данных нужно знать не только их среднее, но и то, как данные рассеяны относительно своего среднего.

Чаще всего для описания и измерения рассеивания числовых данных применяются дисперсия и стандартное отклонение. Мы расскажем о них.

Кроме того, в этой главе мы познакомимся с двумя новыми для нас видами диаграмм.



- 33 Рассеивание числовых данных
- 34 Отклонения
- 35 Дисперсия числового набора
- 36 Стандартное отклонение числового набора
- 37 Диаграммы рассеивания
- 38* Свойства дисперсии и стандартного отклонения
- 39* Линейная связь на диаграмме рассеивания
- 40* Диаграмма «ящик с усами»

VIII Математическое описание случайных явлений

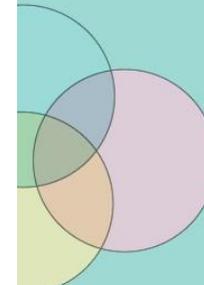
В этой главе мы повторим то, что уже знаем о вероятностях событий, и познакомимся с элементарными событиями — простейшими событиями случайного опыта. Все прочие события состоят из элементарных событий, подобно тому как геометрическая фигура состоит из точек. Интересной разновидностью случайного опыта служит опыт, в котором все элементарные события имеют одинаковые шансы на осуществление: они равновозможны. Чаще всего такие опыты искусственные; они связаны с играми или жребиями. Мы научимся вычислять вероятности событий в таких опытах.



- 41 Случайные опыты и элементарные события
- 42 Вероятности элементарных событий. Равновозможные элементарные события
- 43 Благоприятствующие элементарные события
- 44 Вероятности событий
- 45 Опыты с равновозможными элементарными событиями
- 46 Случайный выбор

IX Действия с событиями. Сложение вероятностей

С событиями, так же как с геометрическими фигурами или множествами, можно производить действия. В этой главе рассказывается о трёх основных действиях с событиями и о том, как правильно складывать вероятности двух событий, чтобы найти вероятность их объединения. Оказывается, способ сложения вероятностей зависит от того, являются эти события несовместными или нет.

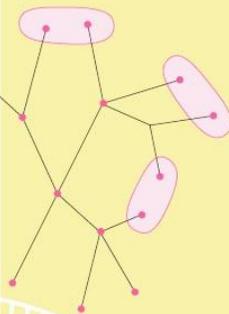


- 47 Противоположные события. Диаграммы Эйлера
- 48 Объединение событий
- 49 Пересечение событий
- 50 Формула сложения вероятностей
- 51 Решение задач с помощью координатной прямой



X Действия с событиями. Умножение вероятностей

Когда проводится случайный опыт, наступившие события могут менять вероятности других событий. Получаются условные вероятности, т. е. вероятности при определённом условии. Если же одно событие не влияет на вероятность другого, то такие события независимы. Познакомившись с условной вероятностью и независимыми событиями, мы узнаем, в каких случаях, почему и как вероятности событий умножаются. В этой главе мы обсудим, как можно находить вероятности событий с помощью специальной графической схемы — дерева случайного эксперимента.



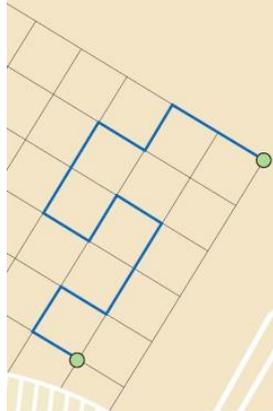
- 52 Условная вероятность. Правило умножения
- 53 Дерево случайного опыта
- 54 Независимые события
- 55 Об ошибке Эдгара По и о том, как победить стечение обстоятельств

XI Элементы комбинаторики

Часто приходится иметь дело с комбинациями, составленными из фигур, чисел, событий или предметов. Предметов может быть много, но комбинаций из них несравнимо больше. Их бывает так много, что их невозможно упорядочить или пересчитать непосредственно.

В этой главе мы знакомимся с комбинаторикой — разделом математики, который занимается перечислением комбинаций разных объектов.

В теории вероятностей комбинаторика применяется, когда событий в случайном опыте очень много и их невозможно выписать или даже просто перечислить без специальных методов.

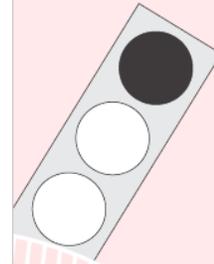


- 56 Комбинаторное правило умножения
- 57 Перестановки. Факториал
- 58 Правило умножения и перестановки в задачах на вычисление вероятностей
- 59 Число сочетаний
- 60 Число сочетаний в задачах на вычисление вероятностей

XII Испытания Бернулли

Испытание Бернулли, или просто испытание, — это простой случайный опыт, в котором всего два возможных элементарных события: успех и неудача. Пример испытания — бросание монеты. Из таких простых опытов можно составлять гораздо более сложные. В этой главе мы рассказываем о важных случайных опытах:

— испытания до наступления первого успеха;
— серия, состоящая из заранее известного количества испытаний Бернулли.
Помимо этого, мы займёмся случайным выбором нескольких предметов из множества, которое состоит из предметов двух или нескольких видов.



- 61 Успех и неудача. Испытания до первого успеха
- 62 Серия испытаний Бернулли
- 63 Число успехов в испытаниях Бернулли
- 64 Вероятности событий в испытаниях Бернулли
- 65* Случайный выбор из конечной совокупности



XIII* Геометрическая вероятность

Иногда случайный опыт можно представить как выбор точки из некоторой фигуры на плоскости или из промежутка на прямой. В таком опыте каждое отдельное элементарное событие имеет нулевую вероятность, поэтому обычный способ подсчёта вероятностей не подходит. На помощь приходит геометрическая вероятность.

Интересно, что в геометрических случайных опытах удобно считать, что событие и фигура — это одно и то же. Вероятности на плоскости измеряются отношением площадей фигур, на прямой — отношением длин промежутков.



66* Выбор точки из фигуры на плоскости

67* Выбор точки из отрезка и дуги окружности

XIV Случайные величины

Случайная величина — это величина, значение которой зависит от элементарного события, которым закончился опыт. Чтобы описать случайную величину, нужно знать все её возможные значения и их вероятности, то есть распределение вероятностей случайной величины.

Случайные величины служат для описания изменчивых величин, которые встречаются в природе и в повседневной жизни.



68 Примеры случайных величин

69 Распределение вероятностей случайной величины

70* Математическое ожидание случайной величины

71* Закон больших чисел и его применение



1 Сбор данных и построение таблицы

ПРИМЕР. В образовательном центре был сделан ремонт, и в начале учебного года руководство центра поручило сотруднице Елене собрать заявки на новую мебель от всех лабораторий и отделов. Елена принимает заявки по СМС и по электронной почте. В течение двух дней она получила несколько заявок.



Как видим, данные поступают в разное время, уточняются, меняются. Всё это трудно запомнить и неудобно хранить в разных местах. Нужно собрать все сведения в одну таблицу. Елена использует электронную таблицу. Она уже подсчитала и внесла в таблицу, сколько нужно рабочих столов.

Конечно, часть информации потеряна: мы не видим в таблице, сколько и какой мебели заказывали разные отделы. Но сейчас это не важно. Главное — собрать общий заказ. Таблицу можно расширить: указать цены и подсчитать общую сумму, которую придётся затратить на новую мебель. Получится таблица-смета, о которой мы поговорим позже (см. п. 4).



Вопросы

- 1 Какая информация, нужная для приобретения и расстановки мебели, не вошла в электронную таблицу на рисунке 1?
- 2 Приведите примеры таблиц, которые вы видели на улицах, в торговых центрах, аэропортах, на вокзалах или автобусных станциях.

	A	B	C
1			
2		Наименование	Количество
3	1	Стол рабочий	11
4	2	Шкаф для одежды	
5	3	Стул	
6	4	Кресло	
7	5	Тумбочка с ящиками	
8	6	Книжный шкаф	
9	7	Настольная лампа	
10	8	Маленький круглый стол	
11	9	Зелёный диван	



Упражнения

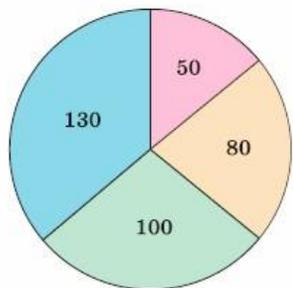
- 1 Перечертите таблицу из рисунка 1 в свою рабочую тетрадь и заполните её до конца.

Рисунок 1. Заказ мебели



11 Круговые диаграммы

Диаграмма 11. Деление пиццы



Четыре друга в складчину покупают круглую пиццу за 360 р. Иван внёс 50 р., Алексей — 80 р., Юрий — 100 р. и Пётр — 130 р. Построим круговую диаграмму 8, показывающую долю каждого (они, конечно, поделят потом пиццу поровну). Пицца стоит 360 р., поэтому каждому рублю соответствует сектор с углом 1° .

Если бы друзья делили пиццу не поровну, а пропорционально своим долям в общей сумме денег, то Ивану достался бы сектор пиццы с углом 50° , Юрию — сектор с углом 80° и т. д.

Деление круга на секторы, пропорциональные частям целого, настолько наглядно, что его используют в самых разных случаях. Полученная таким образом схема называется круговой диаграммой. В английском языке используется слово *pie chart* (пай чарт), что дословно означает «схема пирога», или «пироговая диаграмма».



Определение. Диаграмма, показывающая, как целое делится на части в виде секторов круга, углы которых пропорциональны долям единого целого, называется **круговой диаграммой**.

Чтобы построить круговую диаграмму на бумаге, нужны линейка, циркуль и транспортир. Чтобы раскрасить секторы, полезно иметь цветные карандаши или фломастеры. Нет необходимости строить углы очень точно. На рисунке 3 показаны две круговые диаграммы. На одной из них малый сектор имеет угол ровно 47° , а на второй угол равен 48° . Попробуйте определить, где какая диаграмма.

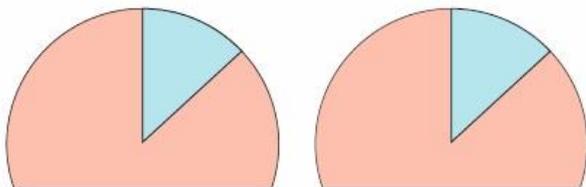
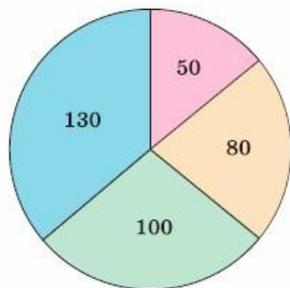


Рисунок 3. Какой угол меньше?



11 Круговые диаграммы

Диаграмма 11. Деление пиццы



Четыре друга в складчину покупают круглую пиццу за 360 р. Иван внёс 50 р., Алексей — 80 р., Юрий — 100 р. и Пётр — 130 р. Построим круговую диаграмму 8, показывающую долю каждого (они, конечно, поделают потом пиццу поровну). Пицца стоит 360 р., поэтому каждому рублю соответствует сектор с углом 1° .

Если бы друзья делили пиццу не поровну, а пропорционально своим долям в общей сумме денег, то Ивану достался бы сектор пиццы с углом 50° , Юрию — сектор с углом 80° и т. д.

Деление круга на секторы, пропорциональные частям целого, настолько наглядно, что его используют в самых разных случаях. Полученная таким образом схема называется круговой диаграммой. В английском языке используется слово *pie chart* (пай чарт), что дословно означает «схема пирога», или «пироговая диаграмма».



Определение. Диаграмма, показывающая, как целое делится на части в виде секторов круга, углы которых пропорциональны долям единого целого, называется **круговой диаграммой**.

Чтобы построить круговую диаграмму на бумаге, нужны линейка, циркуль и транспортир. Чтобы раскрасить секторы, полезно иметь цветные карандаши или фломастеры. Нет необходимости строить углы очень точно. На рисунке 3 показаны две круговые диаграммы. На одной из них малый сектор имеет угол ровно 47° , а на второй угол равен 48° . Попробуйте определить, где какая диаграмма.

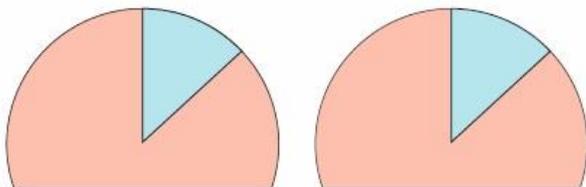


Рисунок 3. Какой угол меньше?

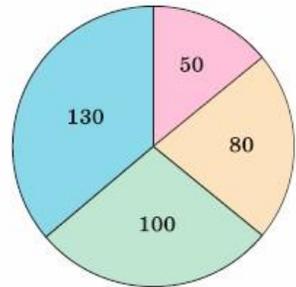


Важно! При построении круговой диаграммы не нужно откладывать углы с большой точностью. Небольшая погрешность не мешает правильно воспринимать диаграмму. Главные достоинства круговой диаграммы — наглядность восприятия и быстрота построения. Для точного представления и анализа данных диаграммы не годятся, для этого нужны таблицы.



11 Круговые диаграммы

Диаграмма 11. Деление пиццы



Иван
Алексей
Юрий
Пётр

Четыре друга в складчину покупают круглую пиццу за 360 р. Иван внёс 50 р., Алексей — 80 р., Юрий — 100 р. и Пётр — 130 р. Построим круговую диаграмму 8, показывающую долю каждого (они, конечно, поделают потом пиццу поровну). Пицца стоит 360 р., поэтому каждому рублю соответствует сектор с углом 1° .

Если бы друзья делили пиццу не поровну, а пропорционально своим долям в общей сумме денег, то Ивану достался бы сектор пиццы с углом 50° , Юрию — сектор с углом 80° и т. д.

Деление круга на секторы, пропорциональные частям целого, настолько наглядно, что его используют в самых разных случаях. Полученная таким образом схема называется круговой диаграммой. В английском языке используется слово *pie chart* (пай чарт), что дословно означает «схема пирога», или «пироговая диаграмма».



Определение. Диаграмма, показывающая, как целое делится на части в виде секторов круга, углы которых пропорциональны долям единого целого, называется **круговой диаграммой**.

Чтобы построить круговую диаграмму на бумаге, нужны линейка, циркуль и транспортир. Чтобы раскрасить секторы, полезно иметь цветные карандаши или фломастеры. Нет необходимости строить углы очень точно. На рисунке 3 показаны две круговые диаграммы. На одной из них малый сектор имеет угол ровно 47° , а на второй угол равен 48° . Попробуйте определить, где какая диаграмма.

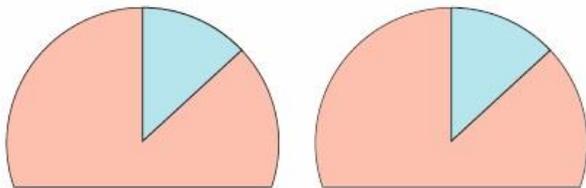
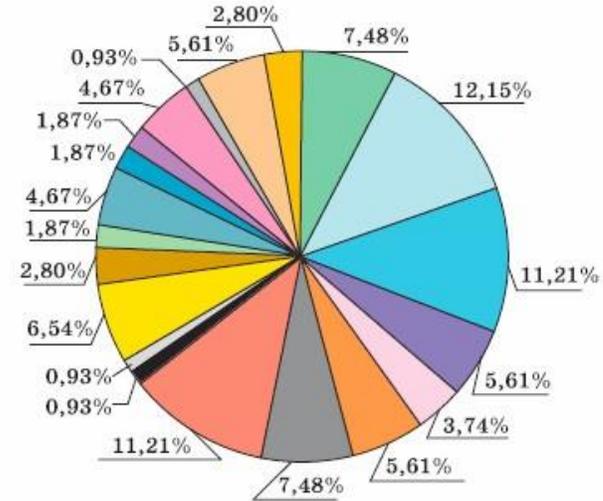


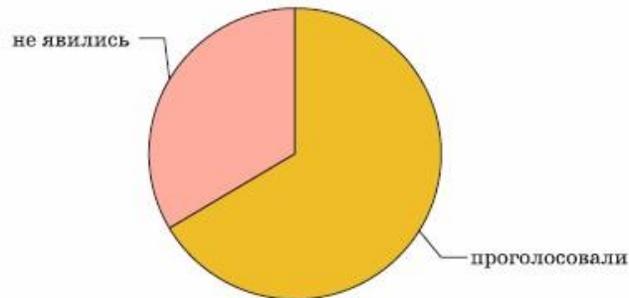
Рисунок 3. Какой угол меньше?

а) Структура занятости населения города



- Добыча железной руды
- Торговля
- Добыча апатитов
- Общественное питание
- Обогатительная промышленность
- Администрация
- Слюдяная промышленность
- МВД
- Прочие отрасли промышленности
- МЧС
- ЖКХ
- Финансовый сектор
- Здравоохранение
- Транспорт
- Образование
- Связь
- Культура
- Домохозяйство
- Спорт
- Безработные

б) Явка избирателей



в) Продажи разных сортов газированной воды

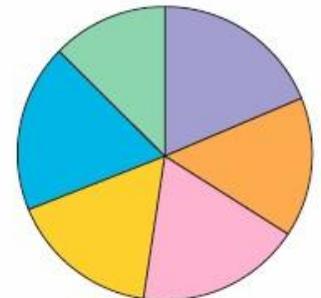


Рисунок 4. Примеры неудачных круговых диаграмм



Обязательное страхование гражданской ответственности

Каждый водитель в Российской Федерации должен быть застрахован по программе обязательного страхования гражданской ответственности (ОСАГО). Срок действия страхового полиса¹, как правило, один год.

Стоимость полиса получается умножением базового тарифа² на несколько коэффициентов. Коэффициенты зависят от водительского стажа, мощности автомобиля, региона, где используется автомобиль, от количества предыдущих страховых выплат и других факторов. Мы рассмотрим лишь два коэффициента.

Коэффициент «бонус-малус» (КБМ) зависит от класса водителя. Этот коэффициент понижает или повышает стоимость полиса в зависимости от количества ДТП в предыдущий год страхования. Сначала водителю присваивается класс 3. Каждый последующий год класс водителя рассчитывается в зависимости от числа страховых выплат в течение истекшего года, по таблице 6.

Таблица 6. Класс водителя и коэффициент «бонус-малус»

Класс на начало годового срока страхования	Коэффициент КБМ	Класс по окончании годового срока страхования с учётом наличия страховых случаев				
		0 страховых выплат	1 страховая выплата	2 страховых выплаты	3 страховых выплаты	4 страховых выплаты
М	2,45	0	М	М	М	М
0	2,3	1	М	М	М	М
1	1,55	2	М	М	М	М
2	1,4	3	1	М	М	М
3	1	4	1	М	М	М
4	0,95	5	2	1	М	М
5	0,9	6	3	1	М	М
6	0,85	7	4	2	М	М
7	0,8	8	4	2	М	М
8	0,75	9	5	2	М	М
9	0,7	10	5	2	1	М
10	0,65	11	6	3	1	М
11	0,6	12	6	3	1	М
12	0,55	13	6	3	1	М
13	0,5	13	7	3	1	М

¹ Страховой полис — документ, удостоверяющий факт страхования. Часто стоимость услуги страхования называют стоимостью полиса.

² Наименьшее и наибольшее возможные значения базового тарифа устанавливаются Центральным банком России. В 2020 году для владельцев легковых машин базовый тариф составляет от 2746 до 4942 р.

Коэффициент возраста и водительского стажа (КВС) также влияет на стоимость полиса (табл. 7).

Таблица 7. Коэффициенты возраста и стажа

Стаж, лет \ Возраст, лет	0	1	2	3–4	5–6	7–9	10–14	более 14
16–21	1,87	1,87	1,87	1,66	1,66			
22–24	1,77	1,77	1,77	1,04	1,04	1,04		
25–29	1,77	1,69	1,63	1,04	1,04	1,04	1,01	
30–34	1,63	1,63	1,63	1,04	1,04	1,01	0,96	0,96
35–39	1,63	1,63	1,63	0,99	0,96	0,96	0,96	0,96
40–49	1,63	1,63	1,63	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
50–59	1,63	1,63	1,63	0,96	0,96	0,96	0,96	0,96
старше 59	1,60	1,60	1,60	0,93	0,93	0,93	0,93	0,93

Предположим, что в прошлом году некоторый водитель имел класс 5, и у него не было ни одной аварии, в которой он оказался бы виноват. Поэтому не было страховых выплат. Следовательно, его класс повысится до 6-го, а коэффициент КБМ снизится с 0,9 до 0,85.

Если бы в прошлом году была страховая выплата, то класс понизился бы до 3-го, а коэффициент вырос бы до 1.

Предположим, что в прошлом году, когда водитель заключал договор со страховой компанией, ему было 34 года, а за рулём он провёл 3 года. В этом случае его коэффициент КВС в соответствии с таблицей 7 равнялся 1,04. Но в этом году этому водителю уже 35 лет, а стаж составляет 4 года. Коэффициент снизится и станет равен 0,99.

ПРИМЕР. Когда Денис получил водительские права и впервые оформил полис ОСАГО, ему было 19 лет. Денис страховал свою гражданскую ответственность 3 года. В течение первого года были сделаны две страховые выплаты, а после этого выплат не было. В начале третьего года страхования Денис заплатил за полис ОСАГО 25 806 р.

Какой класс будет присвоен Денису на начало четвёртого года страхования и какие коэффициенты КБМ и КВС будут использованы при заключении договора на четвёртый год?

Сколько будет стоить полис на четвёртый год, если значения других коэффициентов, кроме КБМ и КВС, не изменятся?

Решим эту задачу, последовательно отвечая на все вопросы. В первый год у Дениса был класс 3, но после двух страховых выплат на второй год класс оказался минимальным (М). Так как больше аварий не было, на следующий год класс оказался 0, а на четвёртый год страхования Денису будет присвоен 1-й класс. Поэтому коэффициент КБМ будет равен 1,55.

На четвёртый год страхования Денису 22 года, и стаж у него 3 года. По таблице 7 находим, что КВС на четвёртый год равен 1,04.

В начале третьего года страхования у Дениса был 0-й класс, и КБМ равнялся 2,3, а КВС равнялся 1,87 (ему был 21 год, а стаж был 2 года). Следовательно, за свой четвёртый полис Денис заплатит

$$25\ 806 \cdot \frac{1,55}{2,3} \cdot \frac{1,04}{1,87} = 9672 \text{ р.}$$



Глава 3. Элементы прикладной математики

- § 14. Математическое моделирование
- § 15. Процентные расчёты
- § 16. Абсолютная и относительная погрешности ..
- § 17. Основные правила комбинаторики
- § 18. Частота и вероятность случайного события .
- § 19. Классическое определение вероятности
- Сначала была игра*

- § 20. Начальные сведения о статистике
- Дисперсия*
- Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме ...*
- Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме ...*
- Итоги главы 3*

Глава 4. Числовые последовательности

- § 21. Числовые последовательности
- О кроликах, подсолнухах, сосновых шишках и «золотом сечении»*
- § 22. Арифметическая прогрессия
- § 23. Сумма n первых членов арифметической прогрессии
- § 24. Геометрическая прогрессия
- § 25. Сумма n первых членов геометрической прогрессии .
- § 26. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, у которой модуль знаменателя меньше 1
- Задание № 6 «Проверьте себя» в тестовой форме ...*
- Итоги главы 4*
- Элементы комбинаторики и теории вероятностей* .

[УМК «Алгебра 7 – 9» А.Г. Мерзляк и др.](#)





ГЛАВА I. ВЫРАЖЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА, УРАВНЕНИЯ

- § 1. ВЫРАЖЕНИЯ
 - 1. Числовые выражения
 - 2. Выражения с переменными
 - 3. Сравнение значений выражений
- § 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ
 - 4. Свойства действий над числами
 - 5. Тождества. Тождественные преобразования выражений
- § 3. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ
 - 6. Уравнение и его корни
 - 7. Линейное уравнение с одной переменной
 - 8. Решение задач с помощью уравнений
- § 4. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
 - 9. Среднее арифметическое, размах и мода
 - 10. Медиана как статистическая характеристика

Для тех, кто хочет знать больше

- 11. Формулы

Дополнительные упражнения к главе I

ГЛАВА V. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

- § 12. СТЕПЕНЬ С ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ И ЕЁ СВОЙСТВА
 - 37. Определение степени с целым отрицательным показателем
 - 38. Свойства степени с целым показателем
 - 39. Стандартный вид числа
- § 13. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ
 - 40. Сбор и группировка статистических данных
 - 41. Наглядное представление статистической информации

Для тех, кто хочет знать больше

- 42. Функции $y = x^{-1}$ и $y = x^{-2}$ и их свойства
- 43. Дисперсия и среднее квадратичное отклонение

Дополнительные упражнения к главе V

Глава V. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- § 11. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ
 - 30. Примеры комбинаторных задач
 - 31. Перестановки
 - 32. Размещения
 - 33. Сочетания

§ 12. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

- 34. Относительная частота случайного события
- 35. Вероятность равновероятных событий

Для тех, кто хочет знать больше

- 36. Сложение и умножение вероятностей

Дополнительные упражнения к главе V

[УМК Алгебра 7 – 9 Ю.Н. Макарычев и др.](#)





Пример 3. В результате многократных наблюдений установили, что вероятность попадания в мишень одного стрелка равна 0,9, а другого — 0,8. Каждый из стрелков сделал по одному выстрелу по мишени. Какова вероятность того, что мишень будет поражена?

► Рассмотрим такие события:

A — первый стрелок попал в мишень;

B — второй стрелок попал в мишень;

C — мишень поражена.

События A и B независимые. Однако воспользоваться в этом случае умножением вероятностей нельзя, так как событие C наступает не только тогда, когда оба стрелка попали в мишень, но и тогда, когда в мишень попал хотя бы один из них. Поступим иначе. Рассмотрим события \bar{A} , \bar{B} и \bar{C} , противоположные соответственно событиям A , B и C . События \bar{A} и \bar{B} являются независимыми, так как промах при выстреле по мишени первого стрелка (событие \bar{A}) не зависит от непоражения мишени вторым стрелком (событие \bar{B}). Событие \bar{C} означает совместное появление событий \bar{A} и \bar{B} . Поэтому

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}).$$

Из свойства вероятностей противоположных событий вытекает, что

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,9 = 0,1, \quad P(\bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2.$$

Отсюда получаем, что

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02.$$

Так как события C и \bar{C} противоположные, то теперь несложно найти вероятность события C :

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0,02 = 0,98.$$

Значит, вероятность того, что мишень будет поражена, равна 0,98. ◀