Изучение тригонометрических функций в школьном математики.

Основные образовательные цели изучения тригонометрических функций:

- *Систематизировать знания учащихся о тригонометрических функциях числового аргумента.*
- *Обобщить и расширить знания о свойствах тригонометрических функций.*
- *Закрепить и развить умения проводить тождественные преобразования тригонометрических выражений.*
- *Познакомить с решением простейших тригонометрических уравнений и неравенств, рассмотреть некоторые приемы решения тригонометрических уравнений и их систем.*

Под термином «тригонометрические» объединены четыре основные функции: синус(sin), косинус(cos), тангенс(tg), котангенс (ctg). Две тригонометрические функции, отличающиеся начальным слогом «ко», называют взаимно дополнительными (но не обратными), или сходными, или кофункциями; углы их в прямоугольном треугольнике в сумме составляют 90 градусов.

Существуют и обратные им функции именуемые аркфункциями («аркусами») – arcsin (arc –это сокращение от латинского аркус, т.е. «дуга»), arccos и другие, которые изучаются в классах с углубленным изучением математики.

Отличия от других функций

1. Тригонометрические функции отличаются от других тем, что только они начинают изучаться в курсе геометрии основной школы, чтобы с их помощью установить метрические соотношения между сторонами и углами в треугольнике (прямоугольном и произвольном) – важнейшей фигуре геометрии. Без включения соответствующих понятий и теорем курс геометрии был бы незавершенным. Решение любых треугольников – основной мотив для их изучения. Элементы тригонометрии используются и в других темах курса, например, при изучении скалярного произведения векторов, правильных многоугольников, площадей фигур.

2. Тригонометрические функции отличаются от других функций тем, что они первоначально вводятся как функции угла (сначала острого, затем тупого), т.е. аргументом их служит геометрический объект, которому сопоставляется некоторое число. Говорят о геометрическом их определении. Затем определения вводятся для произвольного угла (обобщенного угла или угла поворота), измеряемого как в градусах, так и в радианах. Радианная система измерения углов позволяет говорить о тригонометрических функциях числового аргумента. Между тригонометрическими функциями угла и числа существует тесная взаимосвязь, например синус числа t считается как синус угла в t радиан. Последние также допускают геометрическое истолкование, чем и отличаются от других числовых функций. Определения, связанные с прямоугольным треугольником, являются частными случаями общих определений, связанных с единичной (числовой, координатной, тригонометрической) окружностью.

3. Тригонометрические функции выделяются среди других видов функций характерным для них свойством периодичности, которое используется для построения графиков, при решении задач. Введение их создает инструмент математического описания и изучения периодических процессов и явлений. У учащихся часто создается ложное представление о том, что периодическими функциями являются только тригонометрические, поэтому учителю необходимо дать готовые графики других периодических зависимостей, а также предложить ученикам их сконструировать самим, поняв смысл повторяющейся закономерности.

4. Для первоначального получения их графиков в отличие от других изучаемых функций можно воспользоваться особым приемом, не требующим таблицы значений функции, основанным на использовании тригонометрической окружности; иногда применяют формулы приведения. Заметим, что этот прием годится только для тригонометрических функций.

Тригонометрические функции относят к трансцендентным функциям, что затрудняет «ручные» вычисления их частных значений для некоторых значений аргумента, например sin 18 , cos 18 , sin 15 , cos 15 . Использование единичной окружности и графика не обеспечивает необходимую точность. В математике используют косвенные средства для составления таблиц. Тогда можно говорить о табличном способе задания функций. На практике применяется калькулятор.

Традиционная методическая схема введения тригонометрических функций такова:

1 этап. Вначале определяются тригонометрические функции для острого угла прямоугольного треугольника.

2 этап. Затем введенные понятия обобщаются для углов от 0 до 180.

3 этап.Тригонометрические функции определяются для произвольных угловых величин и действительных чисел.

Более привычен для общеобразовательной школы геометрический способ, который совершенствовался в методическом отношении многократно.

Существуют различные варианты генетических определений тригонометрических функций: через отношение сторон в прямоугольном треугольнике, с помощью тригонометрического круга (круга Эйлера) и «тригонометрических линий», координатное, векторное, с использованием понятия проекции отрезка на прямую и др.

В большинстве школьных учебников геометрии, алгебры и начал анализа предпочтение отдается определениям с помощью единичной окружности (именно окружности, а не круга) как наиболее удачным и современным на данном этапе изучения тригонометрических функций. Этот вариант, как показывает школьная практика, отличается большей доступностью и наглядностью; он опирается на известные из геометрии факты (система координат, уравнение и график окружности, преобразование поворота) и определение функции из алгебры.

Однако, как считают многие методисты (Г.И. Саранцев, И.М. Смирнова и другие), целесообразно сохранить, следуя истории развития тригонометрии и традициям, первоначальное определение тригонометрических функций для острого угла прямоугольного треугольника через отношение сторон, а затем уже осуществлять расширение их области определения с помощью единичной окружности.

В учебниках геометрии А. В. Погорелова; Л. С. Атанасяна и др. не подчеркивается функциональная природа вводимых понятий косинуса, синуса и тангенса угла $(0 < \alpha < 90)$, т. к. для геометрии важна их прикладная сторона, а не «общефункциональный подход».

В учебниках геометрии А. В. Погорелова; Л. С. Атанасяна и др. **не** подчеркивается функциональная природа вводимых понятий косинуса, синуса и тангенса угла $(0 < \alpha < 90)$, т. к. для геометрии важна их прикладная сторона, а не «общефункциональный подход». В учебниках И. М. Смирновой и др.; И. Ф. Шарыгина; А. Д. Александрова и др.; А. Л. Вернера и др. вводится термин «тригонометрические функции».

В учебниках А. В. Погорелова; Л. С. Атанасяна и др. сохраняется традиционный порядок тем: 1) синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника , 2) синус, косинус и тангенс для любого угла от 0 до 180 , изучаемые в различных разделах.

В учебнике А. Д. Александрова и др. определение синуса и косинуса дается сразу для любых углов от 0 до 180 , а тангенс вводится через их отношение. В учебнике И. М. Смирновой и др. все четыре функции вводятся одновременно.

И. Ф. Шарыгин сходные функции вводит попарно для острого угла.

На первом этапе для введения понятия синуса острого угла прямоугольного треугольника желательно подобрать несколько числовых данных, чтобы убедиться, что отношение противолежащего катета к гипотенузе не зависит от длины сторон прямоугольных треугольников, если они имеют один и тот же острый угол.

Например, рисуют острый угол, на одной из сторон которого отмечают несколько точек и из них проводят перпендикуляры на другую сторону, в полученных прямоугольных треугольниках составляют нужные отношения и убеждаются в их равенстве путем измерений и вычислений. Проведенные вычисления приведут к необходимости введения особых терминов для обозначения названий тех или иных отношений сторон прямоугольного треугольника, формулировке определений в словесной и символической формах.

Важным моментом является доказательство факта о том, что в прямоугольном треугольнике введенные понятия (отношение двух сторон) не зависят от его расположения и размеров, а зависят лишь от градусной меры угла.

Далее вводятся основные тригонометрические тождества; составляется таблица точных значений sinα, cosα, tg α для углов α, равных 30 45 ,60 градусам и выясняется изменение их при возрастании угла. Целесообразно выяснить функциональный характер этих тригонометрических понятий: каждому значению острого угла соответствует только одно значение синуса (косинуса, тангенса, котангенса) угла; можно ввести термин «тригонометрические функции» для острого угла прямоугольного треугольника.

На втором этапе в геометрии происходит расширение тригонометрических понятий острого угла на любой угол от 0 до 180 , включая граничные значения. Желание выразить зависимость между сторонами тупоугольного треугольника также определенно, как и для прямоугольного, и служит мотивировкой такого расширения. Тригонометрические понятия определяются для этих углов по тем же фор-мулам, что и для острого угла, но только в другой редакции. Учащимся предстоит переосмыслить такие термины как катет, гипотенуза на другие, связанные с окружностью радиуса *R* или единичной окружностью (*R*=1) и координатами её точек (абсцисса, ордината).

Сначала нужно провести рассуждения относительно острого угла, помещенного в систему координат вместе с окружностью (или полуокружностью), а затем уже и тупого угла, осуществляя перенос полученных результатов первого случая. Необходимо разъяснить учащимся назначение точки пересечения окружности как основы всего построения с одной из сторон угла, её происхождение, иначе не будут поняты краткие формулировки типа: «синусом угла α называется ордината y точки M, а косинусом угла α – абсцисса x точки M» (Л. С.Атанасян и др.).

В процессе выполнения упражнений учащиеся продолжают заполнять таблицу значений функций, подмечают, что вычисление значений для тупых углов можно сводить к вычислению острых углов, знакомятся с некоторыми формулами приведения, которые используют в вычислениях. Можно акцентировать внимание на том, что тригонометрические понятия являются функциями угла α, где $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ (для tg α необходимо, чтобы α ≠ 90).

На третьем этапе изучения в старших классах нужно начать с систематизации тригонометрического материала, изученного в основной школе:

- *признаки равенства прямоугольных треугольников;*
- *синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника;*
- *соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника;*
- *значения синуса, косинуса и тангенса для углов 0°, 30°, 45°, 60°; 90°; 180°;*
- *основное тригонометрическое тождество;*

- *использование единичной полуокружности;*
- *введение определений для углов от 0° до 180°;*
- *формулы приведения.*

Анализ учебного материала курса алгебры и начал анализа позволяет выделить следующую последовательность изучения:

- *Закрепление представлений учащихся о радианной мере угла; отработка навыков перехода от градусной меры к радианной и наоборот.*
- *Формирование представлений об углах с градусной мерой, большей 360^0; формирование представлений об углах с положительной и отрицательной градусными мерами; перевод этих градусных мер в радианы (положительные и отрицательные действительные числа).*

- *Определение тригонометрических функций на языке радианной меры угла.*
- *Утверждение функциональной точки зрения на косинус альфа, синус альфа и тангенс альфа (трактовка cos α, sin α и tg α как функций действительного аргумента, установление области определения, области значений, четности и периодичности, построение графика функции, установление промежутков монотонности, знакопостоянства).*
- *Повторение известных и ознакомление с новыми тригонометрическими тождествами, ключом к которым является тождество-формула косинуса суммы двух аргументов.*

- Применение тригонометрических тождеств в тождественных преобразованиях.
- Введение понятий «арксинус», «арккосинус», «арктангенс», «арккотангенс» числа а.
- Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.
- Рассмотрение приемов решения некоторых видов тригонометрических уравнений и их систем.
- Производные тригонометрических функций.
- Функция вида $f(x)=A\cos(wt+\varphi)$, описывающая гармонические колебания.

В курсе алгебры и начал анализа слово «угол» понимается не в его привычном геометрическом смысле, а как «угол поворота» – направленная величина, которая может принимать любые значения. Обобщение понятия угла можно сделать, рассматривая вращательное движение, о котором учащиеся знают из курса физики. В частности, им известно, что мерой вращения служит величина угла поворота.

В тригонометрии любой угол рассматривают как результат вращения луча в плоскости вокруг начальной точки. Вращая луч вокруг этой точки от его начального положения до конечного, получим угол, который можно представить как несколько (возможно, ни одного) полных оборотов и часть полного оборота. Поскольку на плоскости имеются два противоположных направления, то возникает необходимость рассматривать положительный и отрицательный углы.

Учащиеся должны понимать, что угол в геометрии и угол в тригонометрии разные понятия, хотя называются одним и тем же словом; угол поворота не геометрическая фигура, а мера угла.

Познакомив учащихся с градусной мерой углов поворота, важно, отметить, что она становится неудобной для описания непрерывного вращения, когда повороты совершаются на сколь угодно большие углы, т. к. с ней трудно связывать другие характеристики движения, например скорость.

В связи с этим была введена другая, более удобная мера угла поворота – радианная (радиусная), названная так потому, что за единицу принимается центральный угол, дуга которого равна радиусу.

Обучающиеся должны научиться одинаково свободно обращаться как с градусной, так и с радианной мерой, осуществлять переход от одной меры к другой, помня, что они связаны прямой пропорциональной зависимостью.

В методических пособиях перевод радиан в градусы и обратно рекомендуют осуществлять не по формулам, а путем составления пропорции, первой строчкой которой является соотношение π рад – 180 °; по памяти знать радианные меры часто встречающихся углов. У учащихся существует распространенная ошибка, когда они числа $\pi/2$, π, $3/2\ \pi$ ассоциируют только с углами и не осознают их действительными числами с определенной целой и дробной частями.

Важную роль в теории тригонометрических функций играет установление соответствия между множеством действительных чисел и множеством точек единичной окружности, которое позволяет изображать числа на этой окружности. Эта вторая геометрическая модель для множества действительных чисел. Ее главное отличие от первой модели – координатной прямой – заключается в том, что каждой точке на прямой соответствует только одно число, а здесь одной точке окружности соответствует бесконечное множество чисел. Окружность выступает в качестве системы координат, являющейся основой тригонометрии.

Для установления соответствия на единичной окружности выбирают начало отсчета – точку P0(1;0), которая является точкой пересечения окружности с положительной полуосью абсцисс, положительное направление движения от точки P0 по окружности – против часовой стрелки и единицу масштаба, равную радиусу *R*=1 (одному радиану). Возьмем произвольное число α. Повернув точку P0 на угол , получим точку Pα , соответствующую числу α. Заметим, что по традиции действительные числа в тригонометрии, как и меры углов в геометрии, обозначают буквами: α, α/3, *t* и др. Каждая точка окружности имеет и декартовы координаты – абсциссу и ординату. Таким образом, положение точки на окружности можно задать различными способами, что используется при введении определений тригонометрических функций.

В связи с этим А.Г. Мордкович замечает, что точку на окружности можно задать, используя две системы координат: «криволинейную» (числу *t* соответствует на окружности точка M(*t*); *t* – криволинейная координата точки M) и «декартову» (у точки M как у всякой точки координатной плоскости есть абсцисса и ордината; M(*x*;*y*) привычная для учащихся запись). Учащиеся должны научиться осуществлять переход от одной записи к другой.

Синус и косинус произвольного угла определяются с помощью единичной окружности как ордината или абсцисса точки, полученной поворотом точки Р0 на угол α. Они обобщают определения, данные в геометрии. Тангенс и котангенс произвольного угла определяются через отношения синуса и косинуса. После сообщения ученикам о том, что при решении задач приходится работать не с углами, а с физическими величинами (временем, температурой, скоростью и т.п.), необходимо определить тригонометрические функции для произвольного числа. В самих определениях слово «угол» заменяем словом «число» при радианной системе измерения углов. Рассматривая ту или иную функцию, в определенном смысле безразлично считать ее функцией числового или углового аргумента.

Единичная окружность широко применяется при ознакомлении со свойствами тригонометрических функций, доказательстве их, построении графиков, вычислении значений функций, доказательстве ряда формул, решении простейших уравнений и неравенств, знакомстве с тригонометрическими линиями (синусов, тангенсов и др.) и т.п. При отходе от этой геометрической модели при исследовании функций в учебниках вводятся более привычные для учащихся обозначения функции и аргумента: *y=sinx*, *y=cosx*, *y=tgx*, *y = ctg x*, которые являются числовыми функциями. Поскольку выражения x, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и x – действительные числа, записанные в тригонометрической форме, то считают, что все тригонометрические формулы, которым уделено в учебниках большое место, выражают определенные свойства тригонометрических функций. Например, формула $\sin(-x) = -sinx$ выражает свойство нечетности синуса, равенство $\sin(x + 2\pi k) = sinx$ при $k \in \mathrm{Z}$ свидетельствует о периодичности синуса, неравенство $\sin|x| \leq 1$ говорит о множестве значений синуса и др.

Построение графиков проводится либо при первоначальном ознакомлении с функцией, либо на этапе исследования. Учебники различаются по способу построения графиков: по точкам, с помощью единичной окружности или ее части. При построении схематических графиков используются уже известные свойства, а иногда и выявляются дополнительные. График функции, являющийся наглядной геометрической интерпретацией ее свойств, позволяет решать простейшие уравнения и неравенства, особенно заданные на определенном промежутке. Учащиеся должны хорошо усвоить построение графиков функций $y=\sin x$ (синусоида) и $y=\mathrm{tg}\,x$ (тангенсоида), т. к. графики функций $y=\cos x$ *и* $y=\mathrm{ctg}\,x$ получаются из названных путем различных геометрических преобразований.

В ряде учебников изучение функций происходит параллельно с помощью единичной окружности и графика.

Очень полезно рассмотреть наглядное изображение чисел sin *x*, cos *x*, tg *x* и ctg *x* с помощью единичной окружности путем введения традиционных тригонометрических линий (отрезков). Обозначим эти линии: синусов − это отрезок [-1;1] оси ординат, с помощью которого находятся значения синуса; косинусов − это отрезок[-1;1] оси абсцисс, с помощью которого находятся значения косинуса; тангенсов − это прямая x=1, которая является касательной к окружности в точке P(1;0), с помощью которой находят значения тангенсов для чисел $\alpha \neq \pi/2+\pi k$, где k Z; ко-тангенсов − это прямая y=1, которая является касательной к окружности в точке P(0; π/2), с помощью которой находят значения котангенсов для чисел $\alpha \neq \pi k$, где $k \in$ Z .

Необходимо подчеркнуть, что касательные нужно рассматривать как координатные прямые и показать, что ординаты их точек соответственно будут tgα или ctgα при указанных выше исключениях.

В процессе выполнения упражнений учащиеся поэтапно на конкретных примерах, постепенно усложняя функцию, учатся строить графики тригонометрических функций вида y=A cos(ωx+φ). Чтобы учащиеся не допускали ошибок при построении графиков, им необходимо пользоваться равенством $A\cos(\omega x+\varphi)=A\cos(\omega(\mathrm{x}+\frac{\varphi}{\omega}))$. По построенным графикам функций учащиеся должны уметь устанавливать их свойства, т. е. читать графики.

Закрепляет знания учащихся о свойствах тригонометрических функций решение тригонометрических уравнений и неравенств. Решение простейших уравнений (неравенств) есть не что иное, как нахождение угла (числа) по заданному значению тригонометрической функции. Подобные задачи решались в курсе геометрии при решении треугольников. Теперь их решение рассматривается с помощью единичной окружности; вводятся понятия арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса числа, которые выступают в качестве имени главного угла, для которого та или иная функция имеет заданное значение. Знакомство с ними осуществляется лишь постольку, поскольку это необходимо для компактной записи решения уравнения или неравенства.

Основополагающим положением при решении тригонометрических уравнений является то, что если оно имеет решение, то их бесконечное множество. В этом состоит основное отличие их от алгебраических уравнений. Учащихся, проявляющих повышенный интерес к изучению математики, можно ознакомить с обратными тригонометрическими функциями, их свойствами и графиками.

Вывод: *Тригонометрические функции являются первыми трансцендентными функциями, изучаемыми в школьном курсе математики.*

Их роль и место определяются применением этих функций в теории и практике:

1) тригонометрические функции дают замечательный вычислительный аппарат для решения разнообразнейших задач планиметрии и стереометрии;

2) изучение тригонометрических функций позволяет весьма наглядно, просто и убедительно продемонстрировать важнейшие свойства функций: периодичность, четность и нечетность, ограниченность, монотонность.