Формирование понятия производной. Исследование функций с помощью производной.

Цели изучения темы

1) Обучающие: изучить определения основных понятий и их свойства, формировать умения находить производные элементарных функций, применять производную к исследованию функции и решению физических задач.

2) Развивающие цели: развивать мышление: логическое (в форме понятий, суждений, умозаключений). Развитие операционного мышления (умение анализировать , сравнивать, обобщать, делать выводы). Развитие мировоззрения - показать применение математики к изучению реальной действительности, развитие функционального мышления, алгоритмического (например, алгоритм нахождения производной). Развитие познавательных, личностных, регулятивных, коммуникативных УУД.

3) Воспитательные: воспитывать интерес к предмету через решение задач (например, задачи на экстремумы), воспитание отдельных качеств личности.

Понятие предела и непрерывности

Пропедевтика изучения начинается в основной школе. Понятие последовательности является базовым для введения арифметической и геометрической прогрессий – частных случаев числовых последовательностей, изучаемых в курсе алгебры 9-го класса.

В большинстве учебников алгебры общие сведения о последовательностях даются в том объеме, в котором они необходимы для изучения прогрессий: последовательность, член последовательности, порядковый номер члена, конечная и бесконечная, способы задания: формулой *n*-го члена и рекуррентный (индуктивный). В ряде учебников приводятся и другие способы задания: словесный – описанием членов последовательности, если не существует формула (например, – это простое число, – это цифра, стоящая на *n*-м месте в десятичной записи числа); табличный (для конечных последовательностей), графический (дискретное множество точек, расположенных справа от оси ординат).

Термин «предел», как правило не вводится и не определяется. Его заменяют словами «стремление к числу $\frac{b_1}{1-q}$ при $n \to \infty$»

Существуют различные равносильные определения понятия предела функции в точке: на языке «$\varepsilon - \delta$» (по Коши), на языке абсолютной погрешности, на языке последовательностей (по Гейне), на языке понятия окрестности (топологическое). В общеобразовательных классах, как показал опыт, учащиеся затрудняются в усвоении любого из определений. Поэтому сущность свойства «функция имеет предел в точке» необходимо разъяснить на наглядно-интуитивном уровне, рассматривая графики функций, иллюстрирующих всевозможные случаи наличия и отсутствия предела в точке. Анализируя графики, учащиеся объясняют, к какому числу стремится (приближается, подходит) значение функции, когда x стремится к указанному числу a, т.е. каков предел $f(x)$ при $x \to a$. В ряде учебников вводится знак lim – сокращенная запись латинского слова «лимес», в переводе означающего «предел». Запись: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$ учащиеся должны уметь иллюстрировать на графиках.

Теоремы о пределах (правилах предельного перехода) даются учащимся без доказательства; необходимость их обусловлена дальнейшим использованием в выводе формул дифференцирования.

Непрерывность – одно из основных для математического анализа свойств функции; требование непрерывности присутствует в большинстве важнейших теорем анализа.

Понятие непрерывности функции, тесно связанное с понятием предела, сначала рассматривается в точке, а затем на промежутке. Обратившись к графикам функций, которые были предложены учащимся при введении понятия предела функции в точке, необходимо взглянуть на них с другой точки зрения – акцент сделать на понятие непрерывности функции в точке. После анализа графиков можно подвести учащихся к краткому (но вполне строгому) определению: «Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если выполняется соотношение $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

При работе с определением важно выделить три существенных признака: 1) функция $f(x)$ должна быть определена в точке $x = a$; 2) функция $f(x)$ должна иметь предел в точке $x = a$; 3) предел функции $f(x)$ должен быть равен значению функции в точке $x = a$. Затем сообщить ученикам, что точки, в которых нарушается по крайней мере один из признаков, называют точками разрыва функции.

В учебниках встречаются и другие определения непрерывности функции в точке.

Например, в учебнике А.Н. Колмогорова и др. «функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$». При этом малым изменениям аргумента в точке соответствуют малые изменения значений функции при ссылке на операцию предельного перехода.

М.И. Башмаков вводит понятие принципа непрерывности, который на языке приращений формулирует так: «Если $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$».

Сравнительный анализ учебников по теме «Производная»

Категории для сравнения	Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. Учебник. 2009.	Никольский С.М. и др. Алгебра и начала анализа. 11 класс. 2009.
Место введения понятия производной (в 10 классе в начале курса или 11 классе, отсюда вывод о методическом значении темы.	Производная вводится во 2 полугодии 10 класса.	Производная вводится в 1 полугодии 11 класса, поэтому производная обобщает и систематизирует свойства различных функций – тригонометрических, логарифмических, степенных и др.
Математические понятия, используемые для введения понятия производной	Для введения понятия производная вводятся понятия предела последовательности, геометрическая прогрессия, предел функции. Данные понятия очень тщательно разобраны и приводится множество примеров для отработки навыков решения задач.	Изучение темы «Производная» начинается с введения понятия приращения функции и формулировки правила его вычисления. Потом рассматриваются дифференцируемые функции. При помощи предела дается определение дифференцируемой функции в точке. На примере доказываются дифференцируемости функций.

Методические особенности введения определения «производной»	Рассматривают две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых как раз и приводит к возникновению новой математической модели.	Сначала рассматриваются задачи с решениями на приращение функции, основываясь на этом вводится определение производной.
Методические особенности введения геометрического смысла производной функции	Именно с геометрического смысла и начинается эта тема. Представлены графики и полное описание. Сформулировано в форме задач с решениями.	Все объяснение дается на наглядных примерах.
Методические особенности изучения применения производной при исследовании функции	В учебнике описан алгоритм исследования функций: 1. Найти производную функции; 2. Найти стационарные и критические точки; 3. Определить знаки производной на получившихся промежутках; 4. Опираясь на теоремы сделать соответствующие выводы о монотонности функции и экстремумах.	В учебнике дается множество теорем по данной теме. Явный алгоритм не представлен.

Содержание темы «Производная»

Схема 1

Схема 2

Применение производной к исследованию функций

- Монотонность ⇓ Правила
- Экстремум ⇓ Критерии
- Наибольшее и наименьшее значение ⇓ Правила
- Выпуклость ⇓ Правила

Схема 3

Приложения производной

- Задачи на max / min
- Задачи на нахождение скорости протекания процесса
- Задачи, решаемые с использованием вто-рой производной

Введению понятия производной необходима подготовительная работа, которая нужна для актуализации ранее изученного материала в алгебре (свойства функций), геометрии (секущая, касательная), физике (средняя и мгновенная скорость движения) с последующим уточнением и обогащением. В ряде учебников алгебры основной школы уже вводятся понятия приращения аргумента и приращения функции, дается их геометрическая иллюстрация на графике конкретной функции и на основе этих понятий даже определяется возрастание и убывание функции. Если материал не изучался, то необходимо качественно это сделать, т. к. он лежит в основе формирования понятия производной. При этом следует подчеркнуть, что приращение аргумента рассматривается относительно фиксированной точки и оно может быть, как положительным, так и отрицательным числом, а приращение функции может быть и нулем.

Символическая запись определения может различаться:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}$$

В некоторых учебниках производная истолковывается на языке приближенного равенства: $\Delta y \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$. Определение можно сформулировать и в словесной форме. При анализе определения необходимо выделить существенные признаки понятия. Кроме того, обратить внимание на следующие условия: x_0– фиксированная точка, функция определена в ней и ее окрестности, значение $x_0 + \Delta x$ принадлежит той же окрестности, существует предел разностного отношения. При соблюдении этих условий можно ставить задачу нахождения производной в точке и иметь в виду, что если существует производная функции в точке, то она является числом.

Затем необходимо ввести понятие производной на промежутке: если в каждой точке некоторого промежутка функция имеет производную, то она называется дифференцируемой на данном промежутке. Дифференцирование или нахождение производной – новая операция, связанная с предельным переходом. Следует заметить, что не всякая функция, даже непрерывная, имеет производную в каждой точке области определения, например функция $y = |x|$ является непрерывной, но недифференцируема в точке $x=0$. На графике в точке $x=0$ имеется заострение или «излом» («угол»).

Следующий этап в изучении темы в школьном курсе алгебры и начала математического анализа связан с вычислениями производных. Учащиеся знакомятся с теоремами (правилами) дифференцирования, формулами, позволяющими находить производные простейших функций (табличные производные), доказательство которых производится исходя из определения, а точнее алгоритма отыскания производной, которое следует из него. Проблема заключается в том, что если тема «Производные» дается перед рассмотрением каких-либо элементарных функций, то производные этих функций придется рассматривать позже, что может отвлечь от сути. С другой стороны, помещая производные в самый конец учебника, сложность материала может повышаться неравномерно, что может сказаться на успеваемости. Таким образом, знакомство с формулами производных других функций происходит по мере их изучения.

Геометрический и физический смысл производной

Понятие производной можно формировать на основе классических задач о проведении касательной к кривой (Г. Лейбниц) и о мгновенной скорости механического движения (И. Ньютон), решение которых и приведет к «открытию» новой математической модели.

Обратившись к двум задачам, приведенным выше, можно объяснить физический (механический) и геометрический смысл. Физический смысл формулируют так: производная есть скорость движения материальной точки в определенный момент времени. Механический смысл второй производной заключается в том, что ускорение есть вторая производная координаты по времени. Таким образом, мгновенная скорость характеризует быстроту изменения перемещения, ускорение – быстроту изменения скорости.

При определения геометрического смысла производной необходимо обратить внимание обучающихся, что угол α мы измеряем между касательной к графику и положительным направлением оси X. При этом $\alpha \in [0, \pi)$. Если функция возрастает, то касательная образует острый угол α с положительным направлением оси X. Тангенс острого угла положителен. Следовательно, если функция возрастает, то её производная положительна. Если функция убывает, то касательная образует тупой угол α с положительным направлением оси X. Тангенс тупого угла отрицателен. Следовательно, если функция убывает, то её производная отрицательна.

Верны и обратные утверждения:

- *если производная функции положительна на некотором промежутке, то функция возрастает на данном промежутке;*
- *если производная функции отрицательна на некотором промежутке, то функция убывает на данном промежутке.*

Особый интерес представляют точки, в которых касательная параллельна оси X. Здесь целесообразно рассмотреть следующие случаи:

1. Касательная в точке горизонтальна, т. е. образует нулевой угол с осью X. Поэтому производная равна нулю. При переходе через точку касания x_1 производная меняет знак с (−) на (+) или с (+) на (−) (рис. 3).

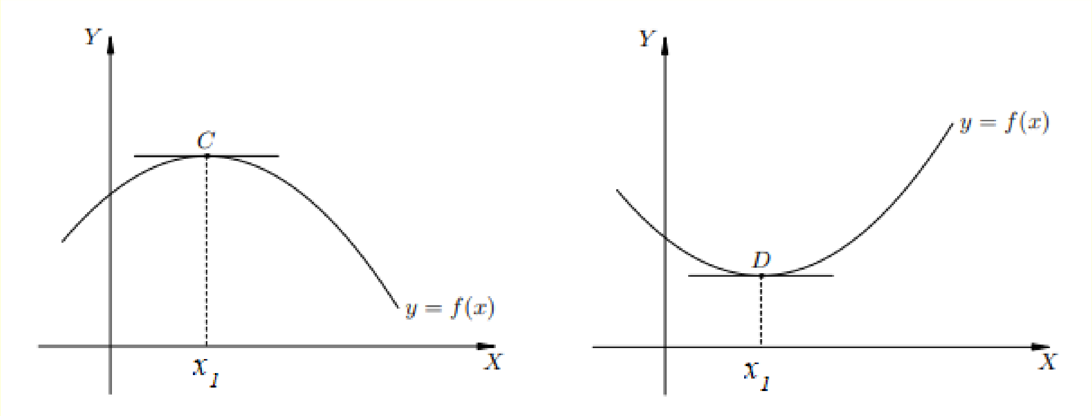


Рисунок 3.

1. Касательная в точке горизонтальна, т. е. образует нулевой угол с осью X. Поэтому производная равна нулю. При переходе через точку касания x_2 производная не меняет знак (рис. 4).

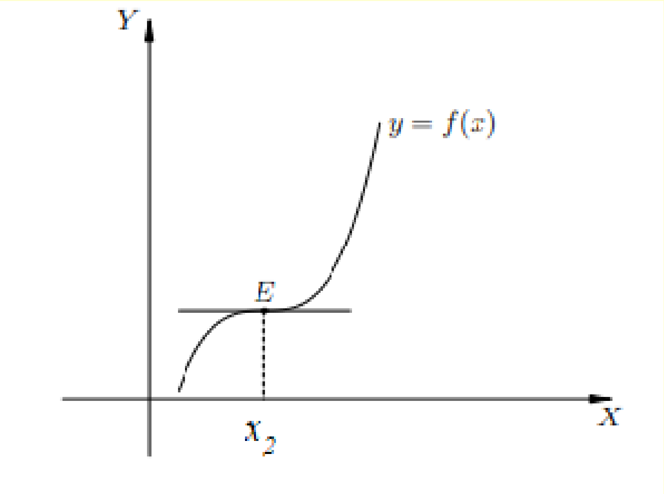


Рисунок 4

1. Касательная образует с осью X угол 90°. В этом случае производная в точке x_3 не существует, так как производная — это тангенс угла наклона касательной (рис. 5).

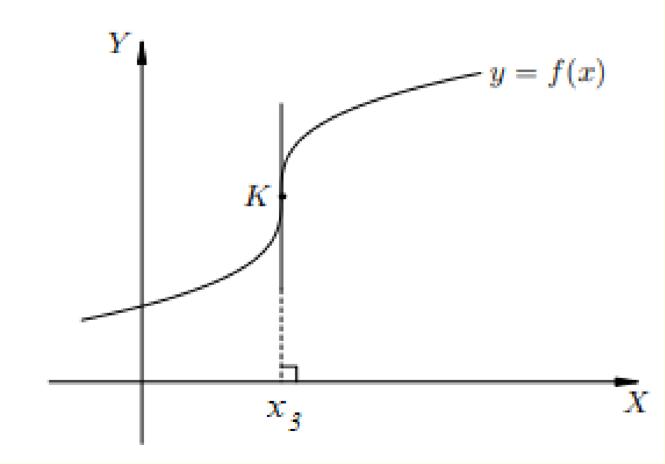


Рисунок 5

1. Касательная не существует. Например, когда на графике функции имеется излом. В точке излома касательную провести нельзя. На данном графике в точках F и G касательная не существует (рис. 6). Значит, не существует и производная в точке x_4, x_5.

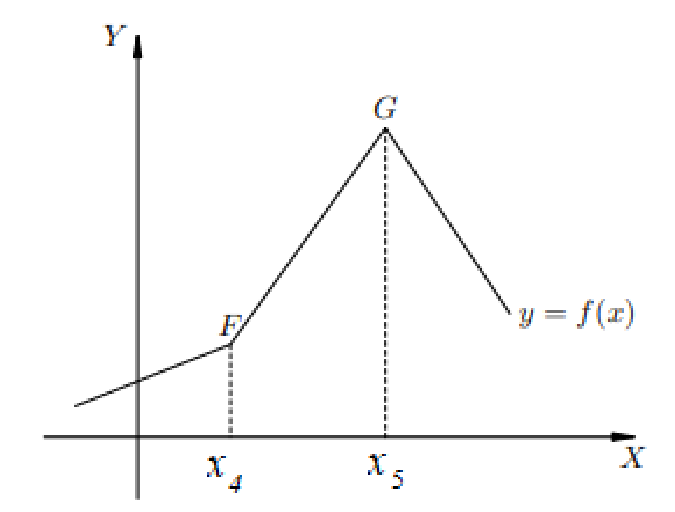


Рисунок 6

Все точки типа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 называются критическими точками.

Для изучения геометрического смысла производной, нужно осуществить повтор материала по линейной функции, ее угловому коэффициенту, понятия производной, а также уже рассмотренные задачи про мгновенную скорость, касательную к графику функции.

Исследование функций, особенно нахождение промежутков возрастания и убывания, является одним из основных способов применения производной в школьном курсе алгебры и начал анализа. С целью подготовки к осознанному усвоению признака возрастания и убывания функции рекомендовано рассмотреть обучающимися геометрические иллюстрации графиков функций с разным характером изменения и касательных в точках, принадлежащих к промежуткам возрастания и убывания. В ходе анализа расположения касательных по отношению к оси абсцисс (угол наклона) и определения таким образом знаков значений производной, обучающихся нужно подвести к самостоятельной формулировке необходимых признаков.

Материал по теории темы «Критические точки функции, ее максимумы и минимумы» – это основа для получения общего метода решения класса задач на нахождение экстремумов функций. На уроке по данной теме идет рассмотрение необходимого признака экстремума (теорема Ферма) и достаточного признака максимума и минимума. Доказательство признаков максимума и минимума функции необходимо проводить с привлечением учащихся.

При рассмотрении темы по нахождению наибольшего и наименьшего значений функции, рекомендовано уделить внимание следующему факту:наибольшее (наименьшее) значение функции не есть максимум (минимум) функции. В курсе анализа ученики доказывают теорему Вейерштрасса, утверждающую, что непрерывная на отрезке [a, b] функция f принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значение, т.е. существуют точки отрезка [a, b], где f принимает наибольшее и наименьшее на [a, b] значения.

Исследование функции и построение ее графика

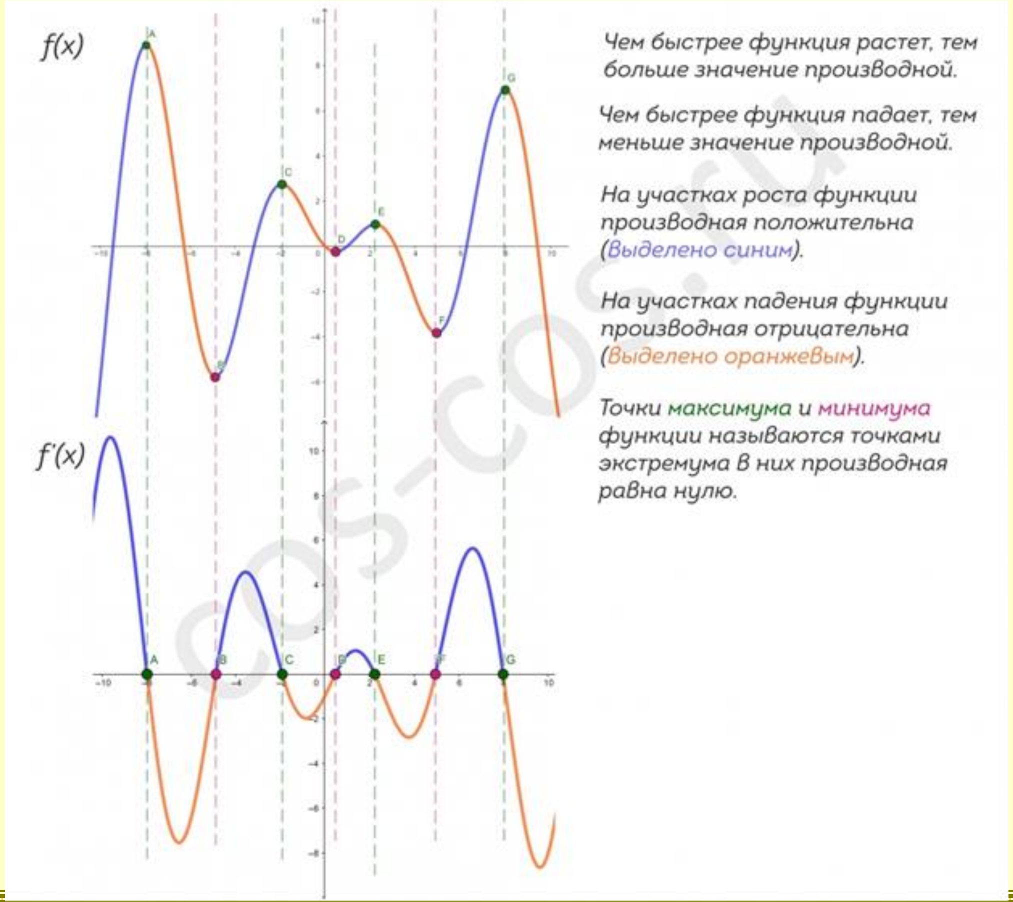
При построении графика функции необходимо провести ее предварительное исследование. Примерная схема исследования функции с целью построения ее графика имеет следующую структуру:

- Область определения и область допустимых значений функции.
- Четность, нечетность функции.
- Точки пересечения с осями.
- Асимптоты функции.
- Экстремумы и интервалы монотонности.
- Точки перегиба и промежутки выпуклости, вогнутости.
- Построение графика.

Теоретическая часть – основа метода исследования функции с помощью производной во всех учебниках одинакова. Различие наблюдается в подходе к вопросу доказательства теорем: доказательства не проводятся, а дается их геометрическая или физическая интерпретация; показывается схема доказательств; формула Лагранжа дается без доказательства, а на ее основе выполняются доказательства. Формальные доказательства всех теорем даются в вузовском курсе математического анализа, а в школе порой ограничиваются лишь наглядными представлениями и правдоподобными рассуждениями.

В основу построения графиков должно быть положено исследование свойств данной функции. Построение отдельных точек служит лишь цели уточнения графика. Обычно «исследование функции» и «построение графика» не разделяются, а проводятся одновременно.

Рассмотрим связь графика функции $f(x)$ и графика производной $f'(x)$. Производная характеризует скорость изменения функции. Мы смотрим, насколько круто идет вверх (или вниз) график функции, другими словами — насколько быстро меняется y с изменением x. Очевидно, что одна и та же функция в разных точках может иметь разное значение производной — то есть может меняться быстрее или медленнее.



Формирование понятия первообразной и интеграла. И методика их изучения.

Начальные сведения об интегральном исчислении вводятся в 11 классе в курсе алгебры и начал анализа» в теме «Первообразная и интеграл».

1. Роль этой темы: Вместе с дифференциальным исчислением интегральное делает школьный курс логически стройным, шире, и глубже раскрывает значение математики для изучения других наук, способствует формированию у школьников диалектико-материалистического мировоззрения, облегчает изучение некоторых вопросов физики, геометрии.

Интегральное исчисление повышает научный уровень всего курса, помогает привести его по возможности в соответствие с современным состоянием науки, повышает математическую культуру выпускников школы.

Цель изучения данной темы – познакомить учащихся с интегрированием как операцией, обратной дифференцированию, показать применение интеграла к решению геометрических задач.

Данная тема включает в себя следующие вопросы: первообразная, основное свойство первообразной, три правила нахождения первообразных, площадь криволинейной трапеции, интеграл, формула Ньютона – Лейбница, применение интеграла.

В учебно-методической литературе наметились два основных способа построении теории интегралов:

I подход. На основе решения конкретных задач вводятся понятия интегральной суммы и определенного интеграла, рассматриваются некоторые его свойства и теорема существования. Далее доказывается, что производная определенного интеграла с переменным верхним пределом равна значению подинтегральной функции от верхнего предела. Вводится понятие первообразной, неопределенного интеграла и получают формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла. Заканчивают изложение применением интегрального исчисления к решению задач.

II подход. Сначала вводят понятие первообразной функции, неопределенного интеграла, изучаются его свойства и теоремы существования (без доказательства), устанавливают связь первообразной с площадью под графиком функции. Затем вводят понятие определенного интеграла (или как предела интегральных сумм, или как приращения первообразной), в конце – применение интеграла.

Школьный вариант расположен между ними, но ближе ко II подходу.

Достоинства I подхода – всестороннее выяснение идейного смысла определенного интеграла. Вначале изучения интегрального исчисления при решении различных задач учащиеся овладевают искусством перехода от равномерных процессов к неравномерным, составлением интегральных сумм, перехода от нее к интегралу.

Недостатки: Неоправданно большой разрыв во времени между введением понятия интеграла и его вычислением. Учащиеся сначала изучают задачи, приводящие к понятию интеграла, его свойства, только в конце темы занимаются непосредственным интегрированием. Это приводит к тому, что у них теряется интерес к изучению теории, а это влияет на отработку навыков решения задач.

Достоинства II подхода: 1) Ранее ознакомление школьников с основной задачей интегрального исчисления – нахождением по данной функции *f (x)* ее первообразной *F(x)* и овладение аппаратом для решения. 2) Обеспечение возможности вычислять интегралы, следовательно, прививать им навыки интегрирования в ходе изучения темы. 3) Результатом является лучшая подготовленность к решению задач геометрии и физики.

Недостатки: Определение определенного интеграла как приращения первообразной не позволяет полно раскрыть идейную сторону.

Перед изучением темы в 11 классе необходимо повторить предел функции, непрерывность и производную, физический и геометрический смысл производной. Целесообразно обратиться к таблице, в которой записаны функции и их производные, чтобы воспользоваться ею для отыскания функции, производная которой задана. Изучение новой темы можно начать с решения конкретных задач, в которых показывается, что произвольная постоянная имеет реальный смысл, учащиеся подводятся к определению первообразной, заполняется таблица первообразных. На первых порах правильность решения проверяется дифференцированием. Затем изучают основное свойство первообразной. Рассматриваются три правила нахождения первообразных, которые легко доказываются, опираясь на определение первообразной.

Следующим важным вопросом в данной теме является понятие криволинейной трапеции и нахождение ее площади. Перед его рассмотрением необходимо вспомнить все о площадях из геометрии и поставить проблему, как можно найти площадь произвольной фигуры *Ф*. Этот вопрос решается двояко: 1. Доказывается теорема о площади криволинейной трапеции: сначала вводится функция, затем доказывается, что она является первообразной. 2) Второй подход к нахождению площади криволинейной трапеции, образованный графиком непрерывной и неотрицательной функции и прямыми.

Применение интегралов рассматриваются при решении задач: на нахождение площади плоской фигуры; на вычисление пройденного пути за данный промежуток времени, на нахождение силы давления жидкости, работы переменной силы, на нахождение объемов тел.