Методика обучения учащихся решению задач на построение сечений многогранников

В школьном курсе выделяются несколько видов задач на построение сечений многогранников плоскостью в зависимости от данных задачи:

1) Секущая плоскость задана тремя точками;

2) Секущая плоскость задана ребром одной грани и точкой, лежащей в плоскости другой грани;

3) Секущая плоскость должна проходить через одну из данных прямых параллельно плоскости (или другой прямой).

Самым распространенным в школе видом задач на сечение является задача на построение сечения, заданного тремя точками. Если сечение задано тремя точками, то возможны два случая:

- среди трех точек есть две, которые лежат в одной грани многогранника;
- среди трех данных точек нет двух, лежащих в одной грани многогранника.

Основными теоретическими положениями построения сечения многогранника являются следующие:

1) Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.
2) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
3) Если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает и линию пересечения плоскостей.
4) Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны.

***Схема 1*. Построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через три заданные точки, среди которых есть две, лежащие в одной грани.**

1. Провести прямую через точки секущей плоскости, лежащие в одной грани (плоскости) и выделить точки ее пересечения с ребрами многогранника. Если две данные точки сечения лежат на ребрах многогранника и в одной грани, то их соединяют отрезком.

2. Построить точки пересечения прямой секущей плоскости с плоскостями (с плоскостью) граней многогранника. Для этого:

а) выбрать прямую и точку секущей плоскости, причем выбранные точка и прямая должны лежать в плоскостях разных граней (плоскостях);

б) найти линию пересечения этих граней (плоскостей);

в) построить точку пересечения этой линии с выбранной прямой.

3. Вернуться к первому шагу.

Схема 2. **Построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через три заданные точки, среди которых нет двух, лежащих в одной грани.**

1. Через две данные точки провести дополнительную плоскость. (Из трех данных точек оставляют ту, которая лежит на основании. Если задана призма, то дополнительная плоскость строится параллельно боковым ребрам. Если задана пирамида, то дополнительная плоскость строится через ее вершину.)

2. Выполнить схему 1.

Задача. *Построить сечение пирамиды SABCD плоскостью, проходящей через точки M, P, K, где $M \in SD$, $P \in SC$, $K \in ABCD$* (смотри рис. 2, *а*).

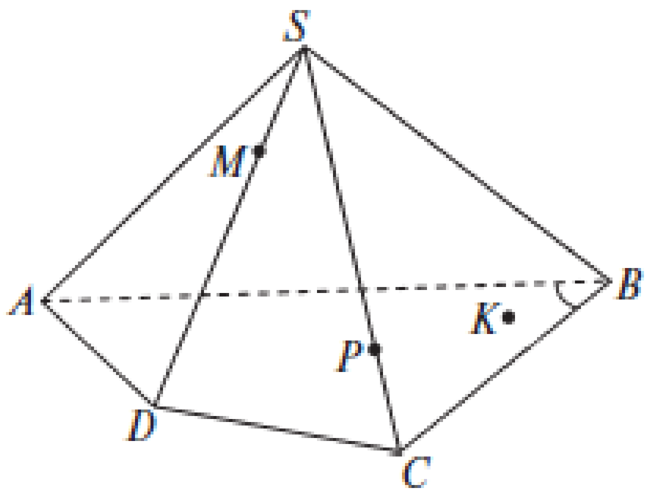


Рис. 2, *а*

1-й этап. Анализ условия и поиск решения.

1. Какого типа эта задача?

— Эта задача на построение сечений многогранника плоскостью, проходящей через три заданные точки.

2. Есть ли среди заданных точек две, лежащие в одной грани?

— Да, точки M и P лежат в передней грани.

3. Как поступаем в таком случае?

— Соединяем их и выясняем, будет ли прямая MP пересекать плоскость основания, в которой расположена точка K.

4. Каков ответ и что это дает для дальнейшего построения (поможет ли он в построении следа секущей плоскости на плоскость основания)?

— Мы видим, что прямая MP пересекает плоскость основания пирамиды, значит, мы сможем найти их точку пересечения, тогда в плоскости основания сможем построить прямую, проходящую через эту точку и данную точку K.

5. Поможет ли эта прямая (след секущей плоскости на плоскости основания) дальнейшему построению?

— Мы сможем построить пересечение этой прямой с плоскостями других граней, поскольку плоскость основания их пересекает.

2-й этап. Осуществление построения с элементами рассуждений.

Возможно использование трафарета:

Точка → *Грань* →

Прямая → *Плоскость* → *Линия пересечения*

→ Точка пересечения

Построение

1. Строим MP (рис. 2, *б*).

2. Построим точку пересечения прямой MP с плоскостью, которой лежит точка K. Рассуждаем:

Точка K → *Грань* **нижняя** →

Прямая MP → *Плоскость* **передняя** → **Линия пересечения *CD***

→ **Точка пересечения *E***

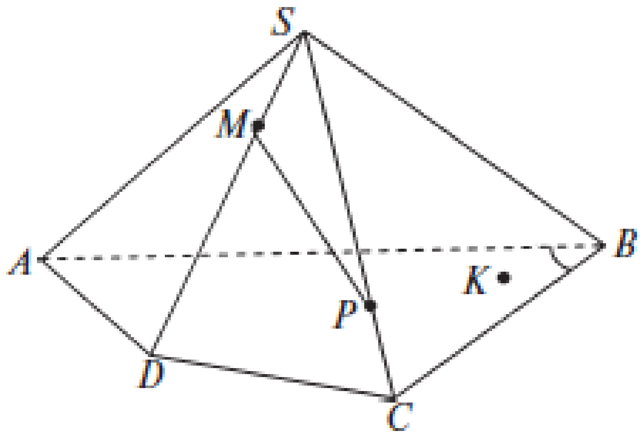


Рис. 2, *б*

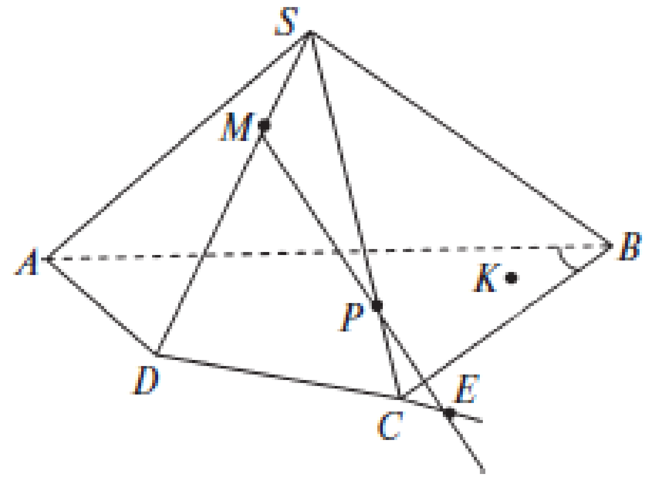


Рис. 2, *в*

Итак, $E = MP \cap DC$ (рис. 2, *в*).

3. Строим прямую EK и выделяем точки ее пересечения с ребрами пирамиды:

$F = EK \cap CB$,

$O = EK \cap AB$ (рис. 2, *г*).

4. Строим PF, точки P и F лежат в правой грани (рис. 2, *д*).

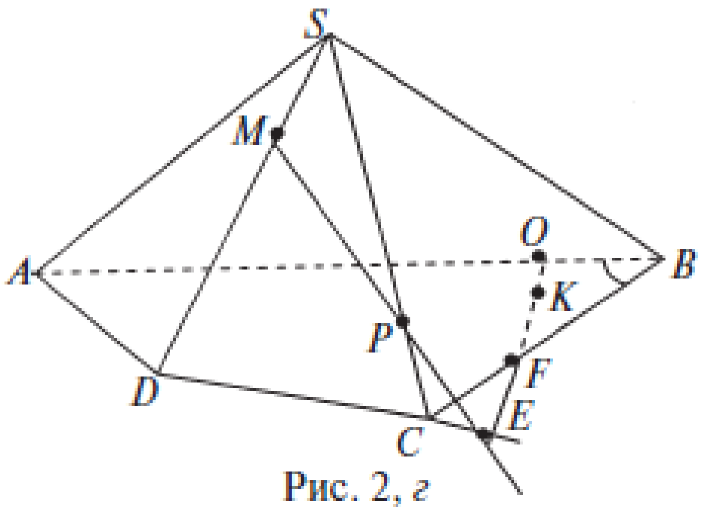


Рис. 2, *г*

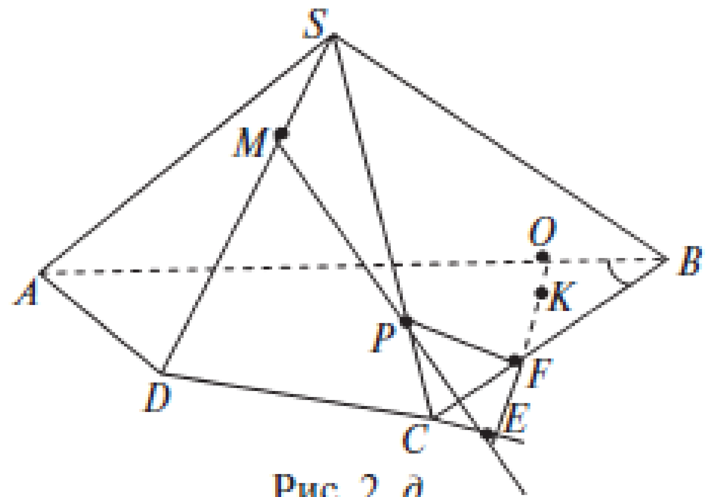


Рис. 2, *д*

5. Построим точку пересечения прямой *EK* с плоскостью левой грани, в которой лежит точка *M* сечения. Рассуждаем:

Точка M → *Грань* левая ↘

Прямая EK → *Плоскость* нижняя → Линия пересечения *AD*

↓

Точка пересечения *X*

Итак, $X = EK \cap AD$ (рис. 2, *е*).

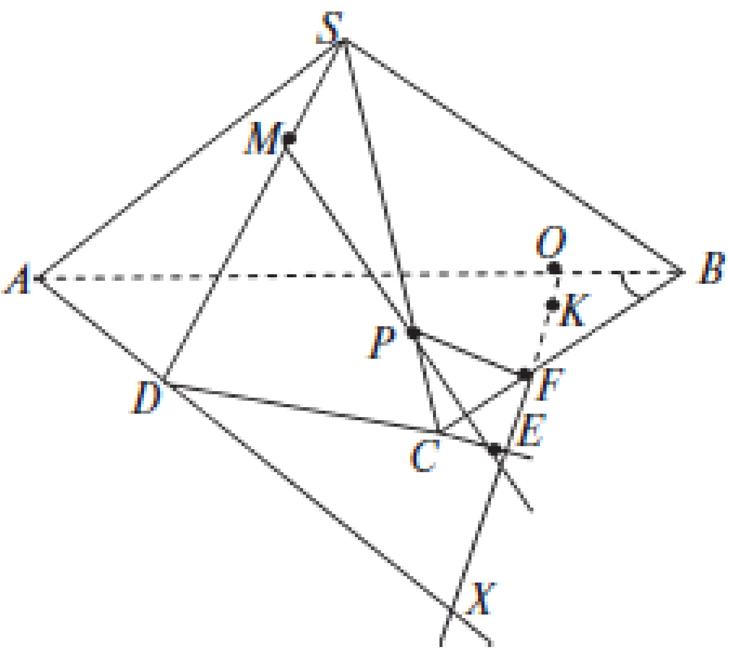


Рис. 2, *е*

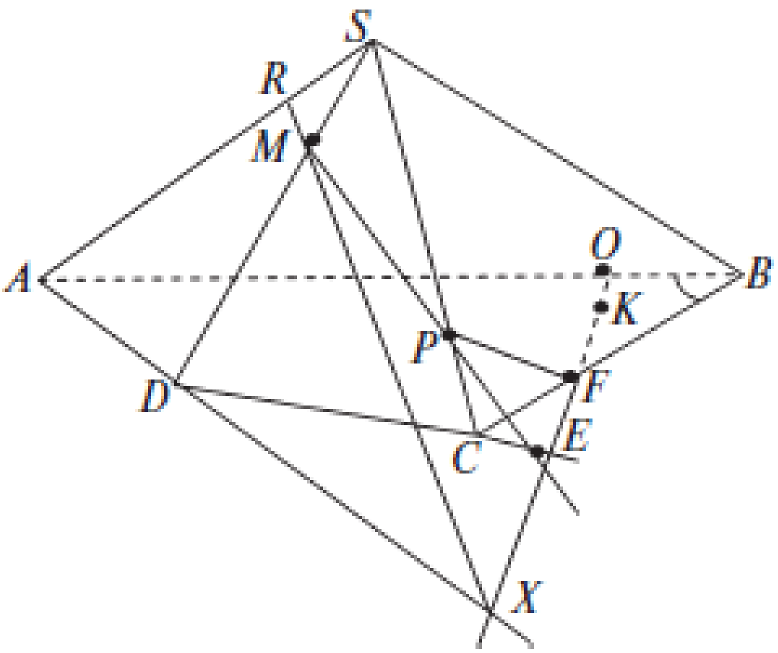


Рис. 2, *ж*

6. Строим прямую XM, поскольку эти точки лежат в плоскости левой грани, и выделяем точки ее пересечения с ребрами пирамиды:

$R = XM \cap AS$ (рис. 2, *ж*).

7. Строим RO, точки R и O лежат в задней грани (рис. 2, *з*).

8. $OFPMR$ – искомое сечение (рис. 2, *и*).

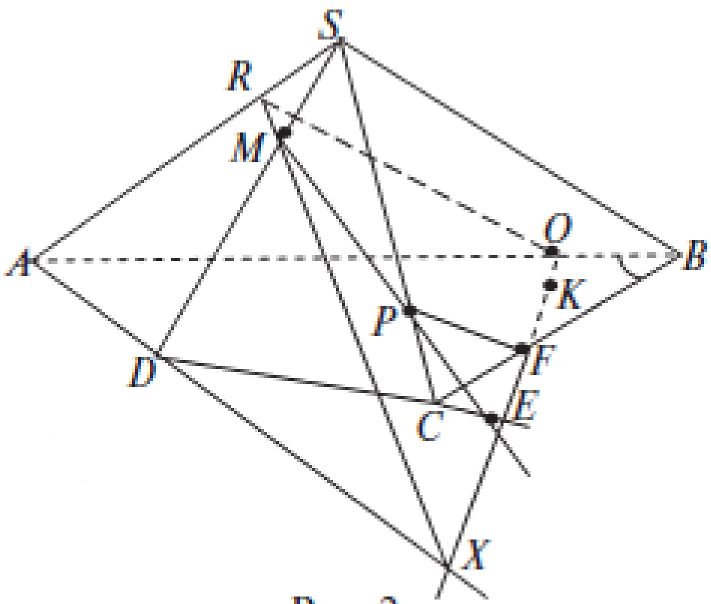


Рис. 2, *з*

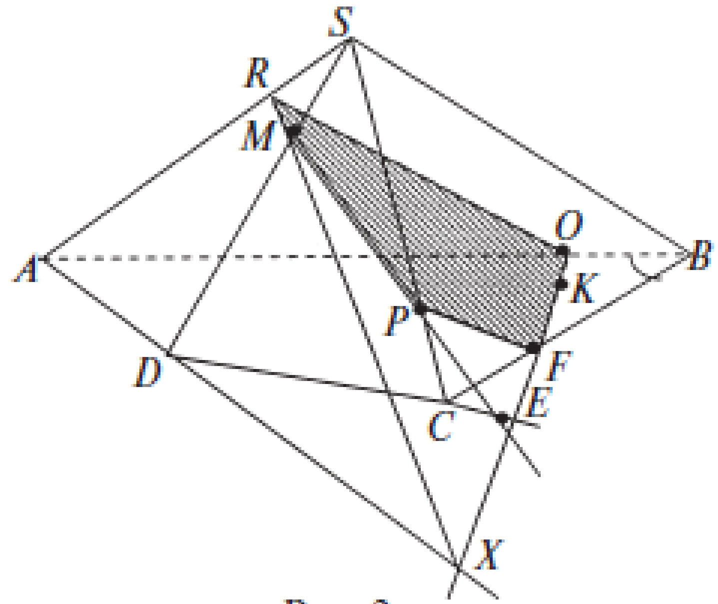


Рис. 2, *и*

3-й этап. Исследование решения.

1. Что полезного из решения задачи можно взять на будущее?

(Выслушиваются все ответы учащихся. Важно выделить, какие затруднения были у учащихся, и что помогло их преодолеть. Возможно, вопросы учителя, возможно, использование трафарета и т. д.)

2. На каком шаге построения можно было предложить иной способ?

— Четыре первых шага мы могли выполнить единственным способом, а вот пятый шаг можно было выполнить иначе.

3. Перечислите возможные варианты и наметьте пути дальнейшего построения.

— Сечение к этому моменту «оборвалось» на точках O и M, которые лежат соответственно в задней и левой гранях.

— Чтобы найти еще одну точку в плоскости задней грани, можно использовать либо прямую PF, либо прямую MP, принадлежащие секущей плоскости.

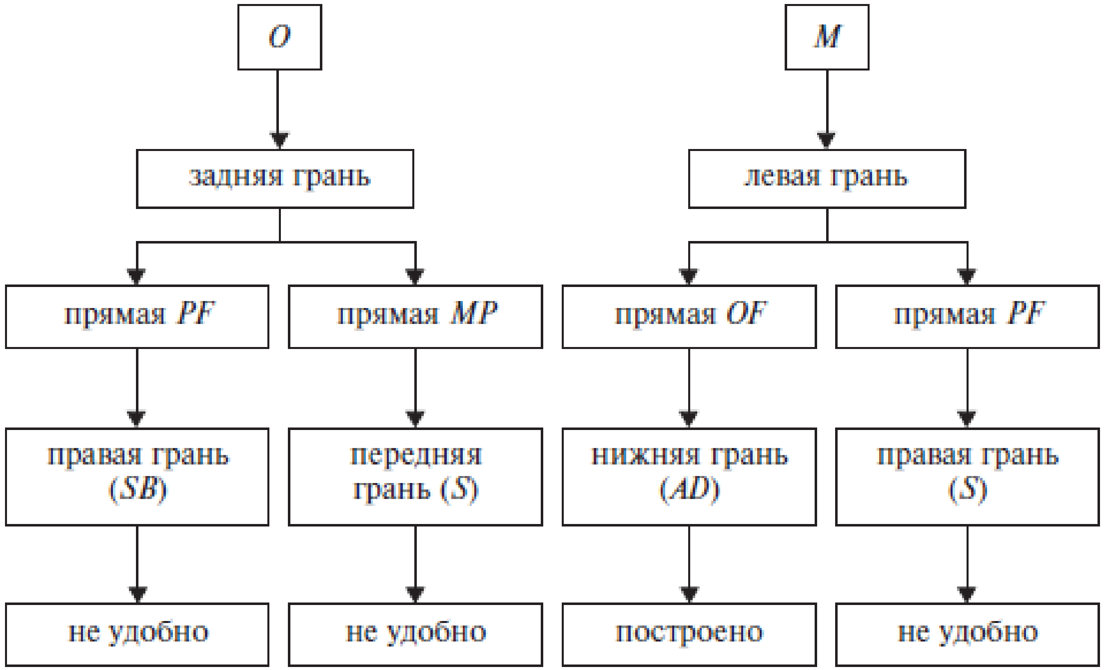
— Возьмем прямую PF. Она лежит в плоскости правой грани, которая пересекает заднюю по SB. Мы видим, что прямые PF и SB пересекаются далеко за пределами рисунка. Значит, этот способ построения не очень удобный.

— Возьмем прямую MP. Она лежит в плоскости передней грани, которая пересекает плоскость задней грани пока только в одной точке S. Значит, для дальнейшего построения еще необходимо построить линию пересечения плоскостей передней и задней граней, значит, этот путь построения не очень удобен.

— Чтобы найти еще одну точку в левой грани, можно использовать либо прямую OF, либо прямую PF. Прямая OF использовалась в выполненном уже построении.

— Возьмем прямую PF. Она лежит в плоскости правой грани, которая пересекает плоскость задней грани пока только в одной точке S. Значит, для дальнейшего построения еще необходимо построить линию пересечения плоскостей правой и левой граней, значит, этот путь построения не очень удобен.

Все представленные рассуждения учащихся можно сопровождать схемой:



4. Давайте последний случай попробуем выполнить, поскольку есть задачи, когда необходимо уметь строить линию пересечения двух плоскостей.

Ученики, имея построение, изображенное на рисунке 2, *г*, выполняют построение линии пересечения плоскостей правой и левой граней – SY (рис. 2, *к*), затем находят точку пересечения прямой PF с плоскостью левой грани – точку Z (рис. 2, *л*) и завершают построение (рис. 2, *м*).

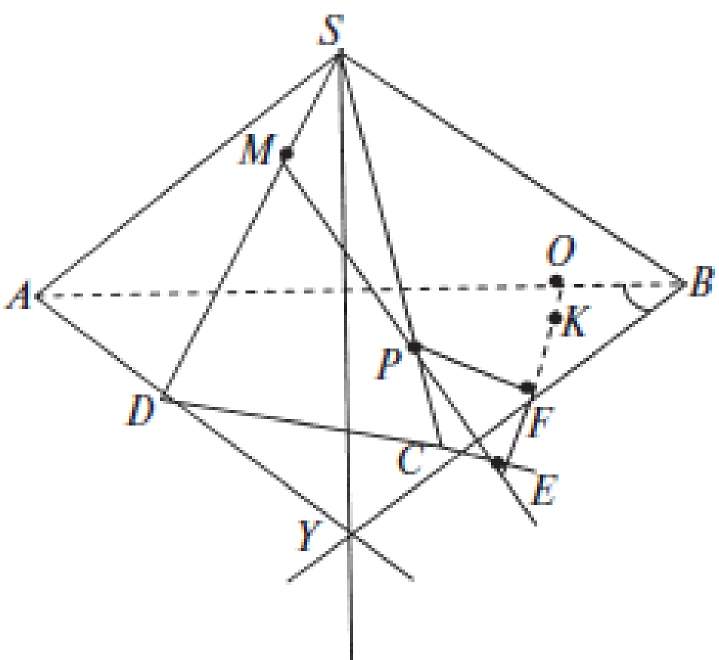


Рис. 2, *к*

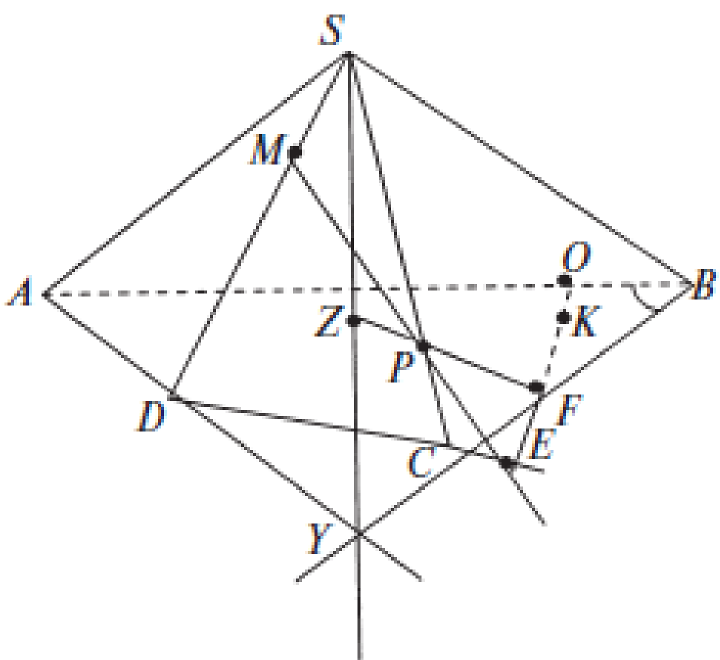


Рис. 2, *л*

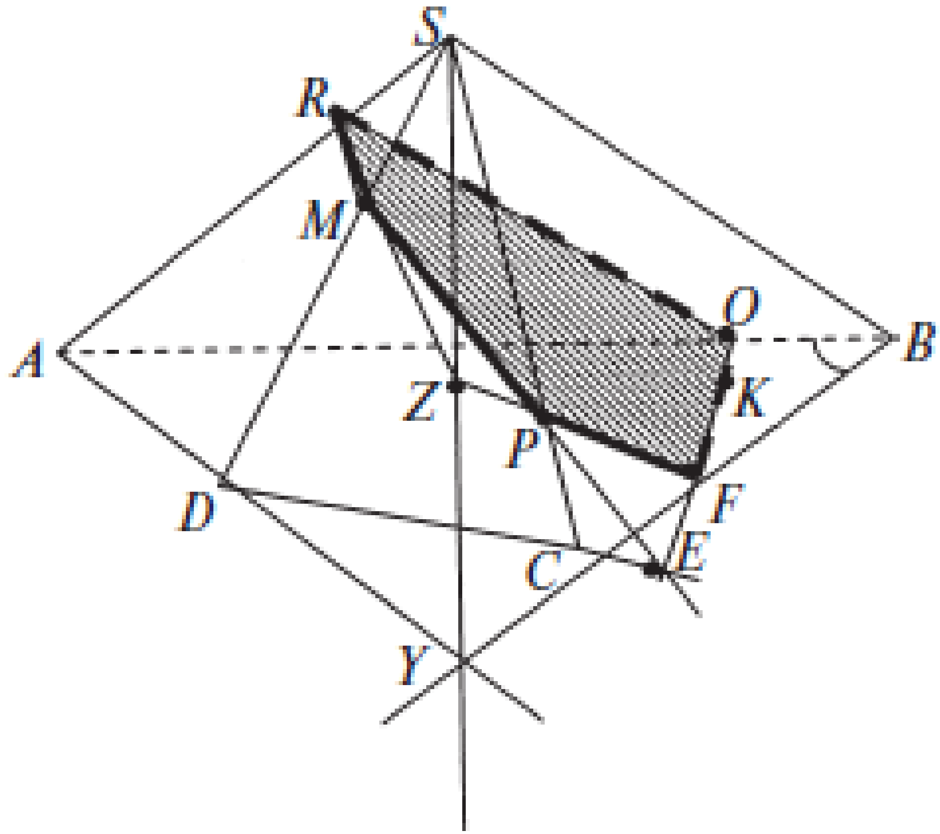
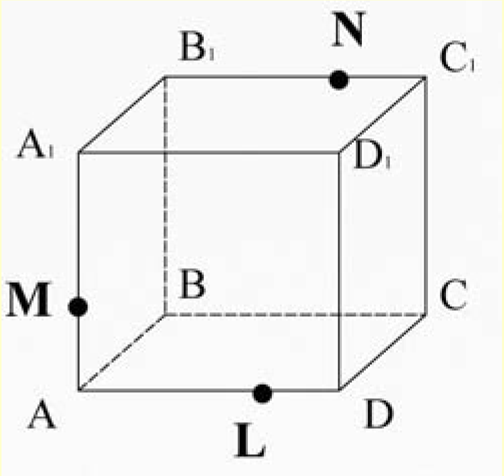
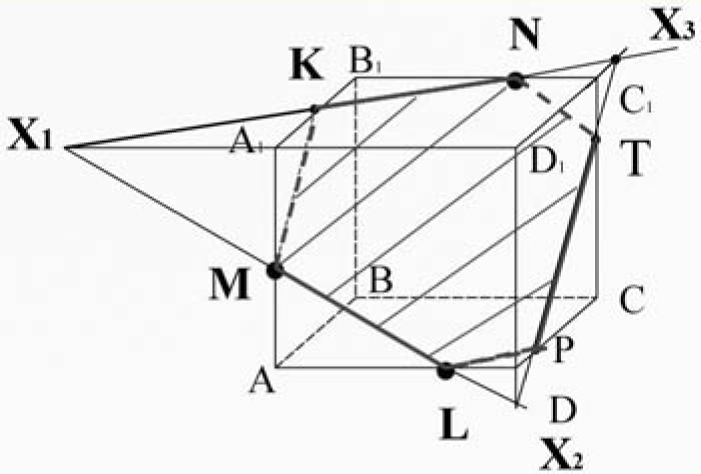


Рис. 2, *м*

Пример 1.
Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через точки M, N, L.

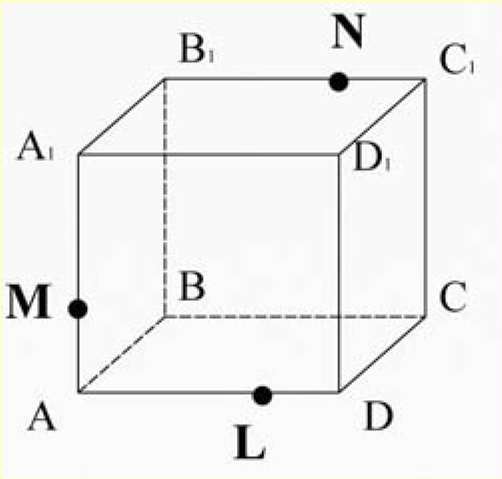


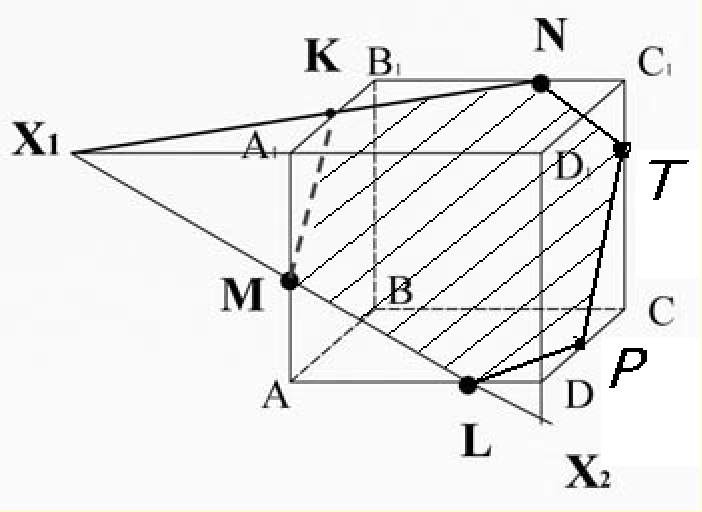


MKNTPL - искомое сечение.

Рассмотрим ту же самую задачу на построение сечения, но воспользуемся свойством параллельных плоскостей. Это облегчит нам построение сечения.

Пример 2. *Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через точки M, N, L.*





Через точку N, проведем прямую NT параллельную прямой ML. Прямые NT и ML лежат в параллельных плоскостях по свойству параллелепипеда.

Проведем прямую TP через точку T, параллельно прямой KM (они лежат в параллельных плоскостях).