Обучение решению иррациональных уравнений и неравенств

Иррациональными называются уравнения и неравенства, в которых переменные или рациональные функции находятся под знаком корня.

Учебный материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики, а его изучение в современной методике обучения математике организовано в отдельную содержательно-методическую линию.

Этапы общего приема решения уравнения, неравенства:

1. Определить вид уравнения, неравенства.
2. Определить стандартное оно или нет.
3. Если стандартное, то решить в соответствии с известным правилом, алгоритмом.
4. Если нестандартное, то выяснить, какие преобразования необходимо выполнить, чтобы свести его к стандартному, либо перейти к использованию искусственных приемов решения.
5. Выполнить эти преобразования.
6. Сделать проверку.
7. Записать ответ.

Существует два основных метода решения уравнений и неравенств с переменной – **алгебраический и графический**.

Основная идея алгебраического метода решения иррациональных уравнений – это сведение данного уравнения с помощью различных преобразований к рациональному уравнению, последнее же решается с помощью уже известных приемов решения. При этом выделяют два основных способа избавления от иррациональности: 1) возведение в степень, 2) введение новой переменной.

Существует два основных подхода к решению данного типа уравнений и неравенств: с использованием равносильных преобразований и без использования равносильных преобразований.

Использование равносильных преобразований при решении иррациональных уравнений

Уравнение $A(x)=B(x)$, в котором хотя бы одно из выражений $A(x)$, $B(x)$ иррационально, называется иррациональным.

Отметим некоторые свойства: 1. Все корни четной степени, входящие в уравнение, являются арифметическими, т.е. определены только при неотрицательном значении подкоренного выражения. 2. Все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любом действительном значении подкоренного выражения. 3. Функции $y=\sqrt[2k]{x}$ и $y=\sqrt[2k+1]{x}$ являются возрастающими на своей области существования.

$$\sqrt[2k]{A(x)}=B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=B^{2k}(x), \\ B(x)\ge 0. \end{cases} \qquad \sqrt[2k]{A(x)}=\sqrt[2k]{B(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=B(x), \\ B(x)\ge 0. \end{cases}$$

$$\sqrt[2k+1]{A(x)}=B(x) \Leftrightarrow A(x)=B^{2k+1}(x) \qquad \sqrt[2k+1]{A(x)}=\sqrt[2k+1]{B(x)} \Leftrightarrow A(x)=B(x).$$

Решите уравнение $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{x-1}$.

Решение.

$$\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{x-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2-2x=x-1, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2-3x+1=0, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \longrightarrow D=3^2-4=5,\quad x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \end{array}\right. \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$

Проверка: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\vee 1,$

$3-\sqrt{5}\vee 2,$

$1\vee\sqrt{5},$

$1<\sqrt{5}.$

$$\Updownarrow$$

$$x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Решите уравнение $\sqrt{5-2x}+\sqrt{x-1}=2$.

Решение.

$$\sqrt{5-2x}+\sqrt{x-1}=2 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x+x-1+2\sqrt{(5-2x)(x-1)}=4, \\ x-1\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(5-2x)(x-1)}=x, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(5-2x)(x-1)=x^2, \\ x\geqslant 1, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(5x-2x^2-5+2x)=x^2, \\ x\geqslant 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 9x^2-28x+20=0, \\ x\geqslant 1 \end{cases} \longrightarrow \frac{D}{4}=14^2-9\cdot 20=16, \quad x_{1,2}=\frac{14\pm 4}{9}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{10}{9}; \end{array}\right. \\ x\geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=\dfrac{10}{9}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{10}{9}$; 2.

Решите уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение. Возведем обе части уравнения в куб. Получаем $2x-1+x-1+3\cdot\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1})=1$. Тогда подставляя вместо $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ число *1* (из исходного уравнения), получим следствие исходного уравнения $3x-2+3\cdot\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1$. Решая уравнение, приходим к равносильной совокупности $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ 2x-1=-x^2+2x-1. \end{array}\right.$ Получим $x=1$ или $x=0$. Подстановкой проверим полученные корни.

Ответ: $x=1$.

Без использования равносильных преобразований при решении иррациональных уравнений

Использование области определения уравнения

Решите уравнение $\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}=1$.

Решение. Область определения исходного уравнения $x^3 ? 2$. Тогда $x^3+2 ? 4$. Следовательно, $\sqrt{x^3+2}\geq 2$. А второе слагаемое $\sqrt{x^3-2}\geq 0$. Получаем, что уравнение не имеет решения.

Ответ: уравнение не имеет решений.

Использование монотонности при решении уравнений

Теорема. Уравнение $f(x)=0$, где $f(x)$ — строго возрастающая или строго убывающая на некотором множестве функция, не может иметь на этом множестве более одного решения.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что строго возрастающая (строго убывающая) функция в различных точках принимает различные значения.

Отсюда следует, что если удаётся угадать или быстро подобрать один корень подобного уравнения и показать проверяющему, что вы понимаете, почему других корней нет, то можно писать ответ.

Решите уравнение $\sqrt{x}=2-x$.

Решение. $\sqrt{x}=2-x \Leftrightarrow \sqrt{x}+x=2$. Очевидно, что $x=1$ — корень уравнения, и, поскольку левая часть строго возрастает (как сумма строго возрастающих функций), то других решений нет.

Ответ: 1.

Решите уравнение $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1}$.

Решение. $\sqrt{2x+5}=8-\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}-8=0$. Левая часть строго возрастает, как сумма строго возрастающих функций. При $x=10$ она равна нулю, при $x>10$ она больше нуля, а при $x<10$ — меньше нуля.

Ответ: 10.

Решите уравнение $\sqrt{13-x}-\sqrt{x}=1$.

Решение. Левая часть этого уравнения является строго убывающей функцией как разность строго убывающей и строго возрастающей, и, значит, уравнение имеет не более одного решения.

Очевидно, что $x=4$ является решением уравнения.

Ответ: 4.

Использование равносильных преобразований при решении иррациональных уравнений

Для всех $n \in N$ справедливы следующие равносильности:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x).$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2n}(x). \end{cases}$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x).$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x).$$

Решите неравенство $\sqrt{x} < 1 - x$.

Решение.

$$\sqrt{x} < 1 - x$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \leqslant 1, \\ x < (1-x)^2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 > 0, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \\ x > \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \end{array} \right. \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

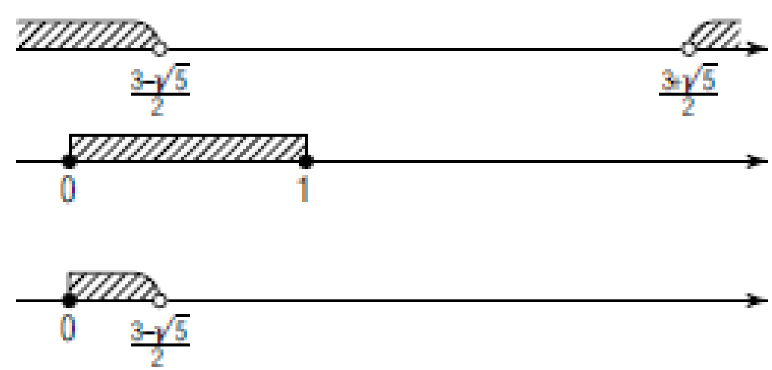
$$0 \leqslant x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Проверка: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \vee 1,$

$3 - \sqrt{5} \vee 2,$

$1 \vee \sqrt{5},$

$1 < \sqrt{5}.$



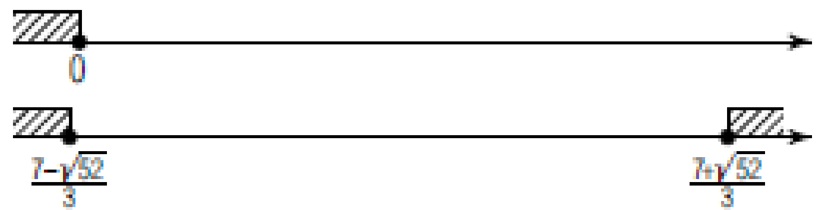
Ответ: $\left[0; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$

Решите неравенство $2\sqrt{x^2-4x}\geqslant x-1$.

Решение.

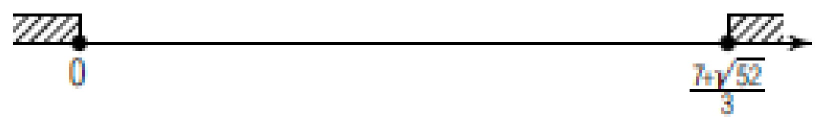
$$2\sqrt{x^2-4x}\geqslant x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1<0,\\ x^2-4x\geqslant 0;\end{cases}\\ 4(x^2-4x)\geqslant (x-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1;\\ \left[\begin{array}{l}x\geqslant 4,\\ x\leqslant 0;\end{array}\right.\end{cases}\\ 3x^2-14x-1\geqslant 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leqslant 0;\\ \left[\begin{array}{l}x\geqslant \dfrac{7+\sqrt{52}}{3},\\ x\leqslant \dfrac{7-\sqrt{52}}{3}\end{array}\right.\end{array}\right.$$



$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x\leqslant 0,\\ x\geqslant \dfrac{7+\sqrt{52}}{3}.\end{array}\right.$$



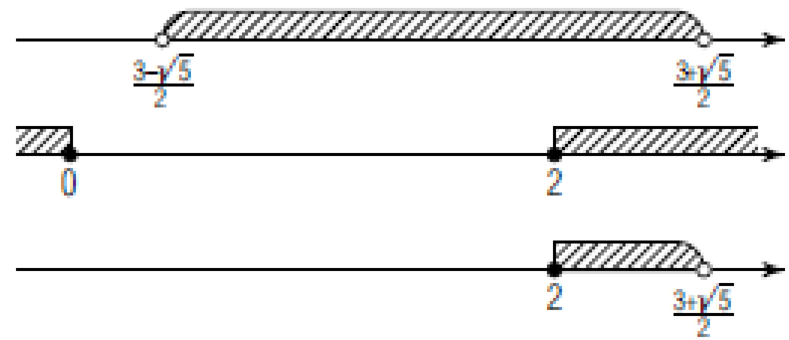
Ответ: $(-\infty;0]\cup\left[\dfrac{7+\sqrt{52}}{3};+\infty\right)$.

Решите неравенство $\sqrt{x^2-2x}<\sqrt{x-1}$.

Решение.

$$\sqrt{x^2-2x}<\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x<x-1, \\ x^2-2x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+1<0; \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \\ \left[\begin{array}{l} x\geqslant 2, \\ x\leqslant 0 \end{array}\right. \end{cases} \to \text{Проверка: } \frac{3+\sqrt{5}}{2}>\frac{3+1}{2}=2.$$



$$\Updownarrow$$

$$2\leqslant x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\left[2; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Решите неравенство $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\leqslant 3$.

Решение.

$$\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\leqslant 3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}\sqrt{x+1}\leqslant 9-x-(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x(x+1)}\leqslant 8-2x, \\ x\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

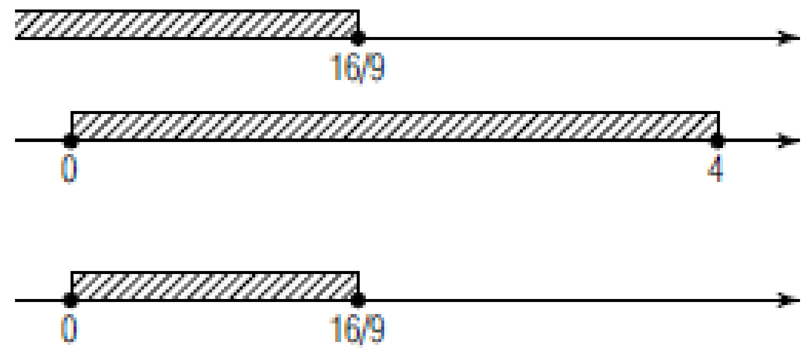
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)\leqslant (4-x)^2, \\ 0\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 9x\leqslant 16, \\ 0\leqslant x\leqslant 4 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$0\leqslant x\leqslant \frac{16}{9}.$$



Ответ: $\left[0; \frac{16}{9}\right]$.

Без использования равносильных преобразований при решении иррациональных неравенств

Использование монотонности при решении неравенств

Т е о р е м а Пусть $f(x)$ строго возрастает на своей области определения D_f и $f(x_0)=0$, тогда имеет место эквивалентность

$$f(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x<x_0, \\ x\in D_f. \end{cases}$$

Если же $f(x)$ строго убывает на D_f, то

$$f(x)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>x_0, \\ x\in D_f. \end{cases}$$

Неравенства противоположного знака и нестрогие неравенства рассматриваются аналогично.

Решите неравенство $\sqrt{x}<2-x$.

Р е ш е н и е. $\sqrt{x}<2-x \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2<0$. Левая часть строго возрастает при $x\geqslant 0$, а при $x=1$ равна нулю, значит, $0\leqslant x<1$.

О т в е т: $[0; 1)$.

Решите неравенство $\sqrt{4x+1}+\sqrt{2x-3}<4$.

Решение. Поскольку левая часть строго возрастает на области определения ($x \geqslant 3/2$) и $x=2$ — корень соответствующего уравнения, то $3/2 \leqslant x < 2$.

Ответ: $[3/2; 2)$.

Решите неравенство $\sqrt{13-x}-\sqrt{x} \geqslant 1$.

Решение. Левая часть является строго убывающей функцией (как разность строго убывающей и строго возрастающей). Нетрудно заметить, что при $x=4$ левая и правая части равны. Значит, решением неравенства является пересечение множеств $x \leqslant 4$ и $0 \leqslant x \leqslant 13$.

Ответ: $[0; 4]$.

Метод интервалов

1. Привести исходное неравенство (если необходимо) к виду $f(x) > 0$ (знак неравенства может быть другим: "$<$", "$\le$" или "$\ge$"; существенное значение имеет то, что в левой части неравенства стоит некоторая непрерывная в своей области определения функция, а в правой – ноль).
2. Найти область определения функции $y = f(x)$.
3. Найти нули функции $y = f(x)$ в области ее непрерывности (т.е. корни уравнения $f(x) = 0$) и точки разрыва (если они существуют).
4. Нанести с учетом области определения на числовую ось полученные точки (масштаб можно нарушить, т.к. для решения неравенства важен лишь порядок расположения, а не истинные расстояния между отмечаемыми точками). Полезно нули функции в случае нестрого неравенства отмечать заштрихованным кругом, в случае строго неравенства – окружностью, точки разрыва – окружностью; граничные точки области определения в случае возможности нахождения в них значения функции $y = f(x)$ – отмечать в соответствии с выполнением истинности неравенства в каждой такой точке.

5. На каждом из интервалов, полученных на числовой оси, определить знак функции $y = f(x)$ и поставить его над этим интервалом (знак определяется подстановкой произвольно выбранных наиболее удобных значений x из каждого интервала или используя свойство непрерывной функции о перемене знака).
6. Выбрать нужные по условию интервалы (и/или точки) и записать ответ.

Как видим, выделенные этапы совпадают с этапами решения рациональных неравенств с той лишь разницей, что здесь необходимо учитывать область определения неравенства. А поскольку большинство учащихся с решением рациональных неравенств методом интервалов справляются достаточно уверенно, то целесообразно при обучении их применению метода интервалов к решению иррациональных неравенств использование аналогии.

Пример $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6$.

Решение данного неравенства посредством равносильных преобразований довольно сложно, поэтому для его решения воспользуемся методом интервалов.

1. Перенесем слагаемые из правой части неравенства в левую, меняя при этом их знак на противоположный: $x\sqrt{10-x^2}-x^2+6>0$.

2. Область определения функции, стоящей в левой части неравенства есть промежуток $\left(-\sqrt{10}\right)\le x\le\sqrt{10}$.

3. Решим соответствующее уравнение:

$$x\sqrt{10-x^2}-x^2+6=0,$$

$$x\sqrt{10-x^2}=x^2-6,$$

$$x^2\left(10-x^2\right)=\left(x^2-6\right)^2,$$

$$x^4-11x^2+18=0;$$

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{2},\quad x_{3,4}=\pm 3.$$

Проверка показывает, что $x=\sqrt{2}$, $x=-3$ – посторонние корни, а $x=-\sqrt{2}$, $x=3$ – корни уравнения. Точек разрыва нет, поэтому переходим к следующему этапу.

4. Нанесем на числовую ось полученные точки $x=-\sqrt{2}$, $x=3$, отметив область определения $\left(-\sqrt{10}\right)\le x\le\sqrt{10}$ (рис. 1). При этом точки $x=-\sqrt{2}$, $x=3$ отметим окружностью – они «не закрашены» (поскольку неравенство строгое, а в данных точках левая часть неравенства принимает значение равное нулю), точки $x=\pm\sqrt{10}$ отметим также окружностью (поскольку решаемое неравенство при подстановке данных значений обращается в неверное числовое неравенство).

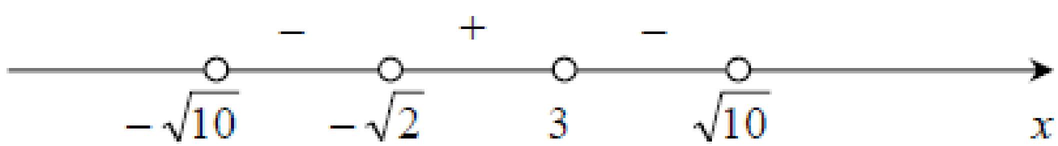


Рис. 1

5. Определим знаки на каждом из трех интервалов (промежутки $-\infty<x<-\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}<x<+\infty$ естественно не рассматриваем, как не принадлежащие области определения):

а) на интервале $\left(-\sqrt{10}\right)<x<-\sqrt{2}$ возьмем точку $x=-3$, тогда $(-3)\cdot\sqrt{10-(-3)^2}-(-3)^2+6=-3\cdot1-9+6=-6$, поскольку $-6<0$, то над данным интервалом ставим знак « – ».

б) на интервале $\left(-\sqrt{2}\right) < x < 3$ возьмем точку $x = 0$, тогда $0 \cdot \sqrt{10 - 0^2} - 0^2 + 6 = 6 > 0$, поэтому над данным интервалом ставим знак « + ».

а) на интервале $3 < x < \sqrt{10}$ возьмем точку $x = 3{,}1$, тогда $3{,}1 \cdot \sqrt{10 - (3{,}1)^2} - (3{,}1)^2 + 6 = 3{,}1 \cdot \left(\sqrt{10 - (3{,}1)^2} - 3{,}1\right) + 6 = 3{,}1 \cdot (0{,}6245 - 3{,}1) + 6 < 0$, поэтому над данным интервалом ставим знак « – ».

6. В ответ выбираем те промежутки значений x, где стоит знак « + », при этом учитываем вхождение в ответ точек, являющихся граничными. Получаем, что $x\sqrt{10 - x^2} - x^2 + 6 > 0$ при $\left(-\sqrt{2}\right) < x < 3$. Таким образом, ответ исходного неравенства есть промежуток $\left(-\sqrt{2}\right) < x < 3$.