Обучение решению тригонометрических уравнений и неравенств

Анализ учебного материала курса алгебры и начал анализа позволяет выделить следующее:

- Введение понятий «арксинус», «арккосинус», «арктангенс», «арккотангенс» числа а.
- Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.
- Рассмотрение приемов решения некоторых видов тригонометрических уравнений и их систем.

Введение определения *arcsina*

Ставится задача: найти *одно решение* уравнения **sin***x* = *a*, и выделяется условие, которое гарантирует хотя бы одно решение, т. е. такие значения *a*, при которых уравнение имеет решение: $-1 \le a \le 1$.

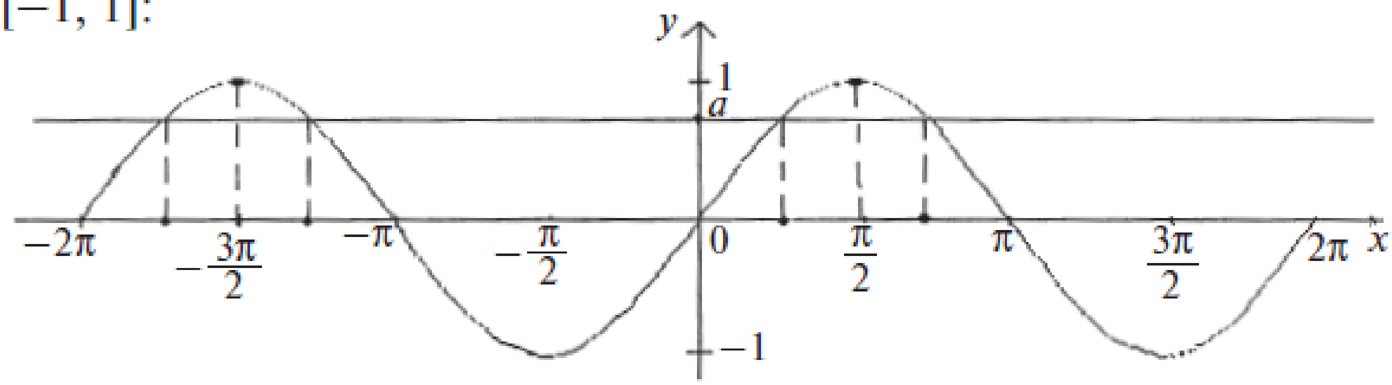
Поскольку пока это уравнение решить алгебраическим способом ученики не могут, предлагается разрешить поставленную задачу с использованием графического метода (используется готовый рисунок на доске).

Начинают с $a = 1$. Решая графически уравнение $\sin x = 1$,

ученики получают корни: $x = \dfrac{\pi}{2}$, $x = -\dfrac{3\pi}{2}$, ...

Таким образом, ученики выяснили, что, данное уравнение имеет бесконечно много корней, хотя задача и была найти только один корень.

Далее рассматривается произвольное число *a* из промежутка $[-1, 1]$:



Применяется графический метод, выясняется, что уравнение имеет бесконечное множество корней, напоминается задача урока о нахождении *одного* корня этого уравнения, возвращаются к подходу, примененному при решении уравнения $x^2 = 7$:

1) выбрали промежуток, на котором уравнение имеет один корень,

2) ввели новое обозначение ($\sqrt{7}$),

3) другой корень выразили через первый ($-\sqrt{7}$).

Тот же подход используется для уравнения $\sin x = a$ (последний этап переносится на следующие уроки).

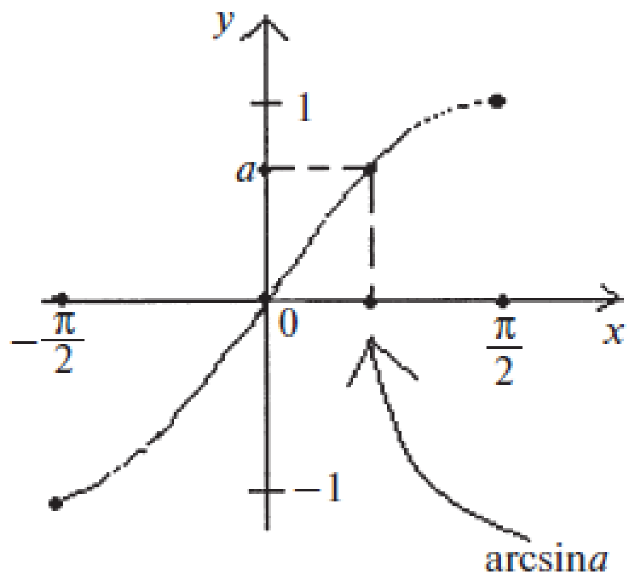
1) Выбирается промежуток, на котором уравнение $\sin x = a$, где $-1 \leq a \leq 1$, имеет ровно одно решение. Используя теорему о корне, ученики предлагают разные промежутки.

Сообщается, что математики выбрали $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, видимо, посчитали, что на этом участке график наиболее читаем.

Проверяется для этого промежутка теорема о корне: функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ возрастает, значит уравнение $\sin x = a$, где $-1 \le a \le 1$, на этом промежутке имеет ровно один корень.

2) Стирается ненужная часть графика, и описывается словами корень на этом промежутке: *число из промежутка* $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, *синус которого равен* a, *если* $-1 \le a \le 1$, затем вводится термин и запись: $\arcsin a$.

Определение. Арксинусом числа a, где $-1 \le a \le 1$, называется число (угол) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.



Сравнивается это определение с определением $\sqrt{a}$:

$\dfrac{\sqrt{a}}{\arcsin a}$ — число из промежутка $\dfrac{[0;+\infty)}{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$, $\dfrac{\text{квадрат}}{\text{синус}}$ которого равен a.

Сравниваются и условия, которым должно удовлетворять a:
в первом случае: $a \geq 0$, во втором: $-1 \leq a \leq 1$.

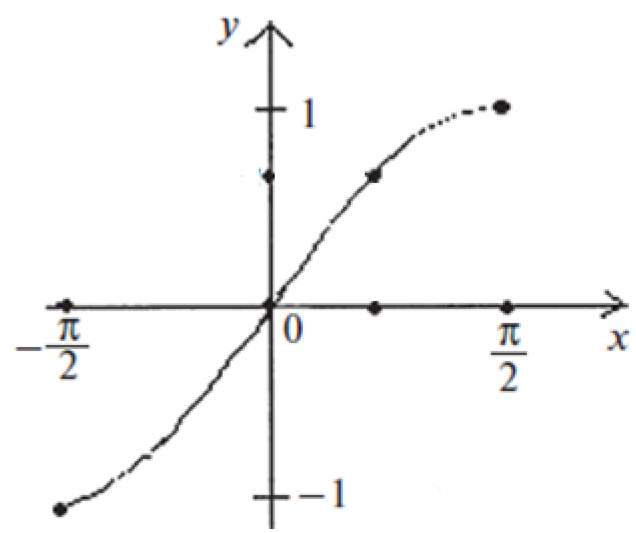
Выделение свойств арксинуса. Прежде чем решать следующие примеры, предлагается рассмотреть и доказать некоторые свойства арксинуса, которые могут облегчить вычисления и контролировать себя.

1-е свойство следует из определения арксинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin a \le \frac{\pi}{2}$$

2-е свойство выражено формулой

$\mathbf{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$



Доказательство:

Функция $y = \sin x$ симметрична относительно 0. Отсюда очевидно равенство отрезков OA и OB. Значит, $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Формулируется правило: *Знак «минус» можно выносить за знак арксинуса*.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Содержание

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$

$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$

$\sin x = 0$

$x = \pi n,\ n \in Z$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\cos x = a$$
$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\cos x = 1$$
$$x = 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$\cos x = -1$$
$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$tgx = a$$
$$x = \pm\, arctga + \pi n,\ n \in Z$$

$$ctgx = a$$
$$x = \pm\, arcctga + \pi n,\ n \in Z$$

$$arctg(-a) = -arctga$$

$$arcctg(-a) = \pi - arcctga$$

Метод введения новой переменной

- <u>**Схема решения**</u>
- **Шаг 1.** Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.
- **Шаг 2.** Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t).
- **Шаг 3.** Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.
- **Шаг 4.** Сделать обратную замену.
- **Шаг 5.** Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

Метод введения новой переменной

Пример 1: Решим уравнение

$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Решение.

Вводим новую переменную

$\sin x = y$. Тогда мы получаем квадратное уравнение:

$2y^2 + y - 1 = 0$, из которого

$y_1 = 1\backslash 2$ и $y_2 = -1$

Метод введения новой переменной

Таким образом:

$\sin x = 1/2$ и $\sin x = -1$

Находим значения *x*:

1) $x = (-1)^k \pi/6 + \pi k$

2) $x = -\pi/2 + 2\pi n$

Ответ:

$x = (-1)^k \pi/6 + \pi k, \ k \in Z$

$x = -\pi/2 + 2\pi n, \ n \in Z$

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

Схема решения

Шаг 1. Привести данное уравнение к виду

а) $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени)

или к виду

б) $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

Шаг 2. Разделить обе части уравнения на

а) $\cos x \neq 0$;

б) $\cos^2 x \neq 0$;

и получить уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

а) $a \operatorname{tg} x + b = 0$;

б) $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$.

Пример 1: Решите уравнение

$$3 \cos x - 2 \sin x = 0.$$

Решение:

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

$3\cos x - 2\sin x = 0 / : \cos x,$

$3 – 2\,\mathrm{tg}x = 0,$

$\mathrm{tg}x = 1{,}5,$

$x = \mathrm{arctg}1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \mathrm{arctg}1{,}5 + \pi n,\ n \in Z$

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

Пример 2:

$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x – 4 = 0.$

Решение.

1) $5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x – 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$

$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x – 4\sin^2 x – 4\cos^2 x = 0;$

$\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x – 4\cos^2 x = 0 \ /\cos^2 x \neq 0.$

Метод решения однородных уравнений (первой и второй степеней)

2) $tg^2\, x + 3tg\, x – 4 = 0$.

3) Пусть $tg\, x = t$, тогда $t^2 + 3t – 4 = 0$;

$t = 1$ или $t = -4$, значит

$tg\, x = 1$ или $tg\, x = -4$.

Из первого уравнения

$x = π/4 + πn,\ n Є Z$;

из второго уравнения

$x = -arctg\ 4 + \pi k,\ k Є Z$.

Ответ: $x = π/4 + πn,\ n Є Z;\ x = -arctg\ 4 + πk,\ k Є Z$.

Функциональный метод

Использование свойств:

1.Выделение полного квадрата из квадратичного трехчлена.

2.Свойство ограниченности функции косинус или синуса

3.Свойство ограниченности квадратичной функции:

$$(x+m)^2+k \geq k$$

Функциональный метод

Пример 1. Решите уравнение

$\cos 2\pi x = x^2 - 8x + 17$

Решение: $\cos 2\pi x = x^2 - 8x + 17$

$$\cos 2\pi x = (x-4)^2 + 1 .$$

Оценим левую и правую части уравнения:

$-1 \le \cos 2\pi x \le 1$ и $(x-4)^2+1 \ge 1$. Следовательно, равенство достигается, если $\cos 2\pi x = 1$ и $(x-4)^2+1 = 1$.

Решая второе уравнение системы, получаем $x = 4$. Подставляем это значение в первое уравнение и убеждаемся в верности равенства. Следовательно, $x = 4$ корень исходного уравнения.

Ответ: $x = 4$

Методы использования различных тригонометрических формул

- Схема решения
- **Шаг 1.** Используя всевозможные тригонометрические формулы, привести данное уравнение к уравнению, решаемому методами I, II, III.
- **Шаг 2.** Решить полученное уравнение известными методами.

Методы использования различных тригонометрических формул

Пример.

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$

Решение:

1) $(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$

$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0.$

2) $\sin 2x \cdot (2\cos x + 1) = 0;$

$\sin 2x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0;$

Методы использования различных тригонометрических формул

Из первого уравнения

$x = \pi n/2,\ n \in Z;$

из второго уравнения: $\cos x = -1/2.$

$x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $\boldsymbol{x = \pi n/2,\ n \in Z;\ x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z.}$

Пять способов решения одной задачи

Решим уравнение:

sinx + cosx = 1 .

Это уравнение можно решить несколькими способами,

предложим 5 способов.

1 способ:
С помощью формул приведения

Представим $\sin x = \cos(\pi/2 + x)$.

Воспользуемся формулой суммы косинусов:

$2\cos((\pi/2 + 2x)/2)\cos \pi/4 = 1$, тогда

$\sqrt{2} \cos (\pi/4 + x) = 1$,

$\pi/4 + x = \pm\arccos(1/\sqrt{2}) + 2\pi n, n \in Z$

$x_1 = 2\pi n, n \in Z$; $x_2 = -\pi/2 + 2\pi n, n \in Z$

2 способ: (с помощью вспомогательного аргумента)

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$, получим: $(1/\sqrt{2})\sin x + (1/\sqrt{2})\cos x = (1/\sqrt{2})$, тогда $\sin x \cos\pi/4 + \sin\pi/4 \cos x = (1/\sqrt{2})$,

$\sin(\pi/4 + x) = (1/\sqrt{2})$,

$\sin(\pi/4 + x) = (1/\sqrt{2})$,

$\pi/4 + x_1 = \pi/4 + 2\pi n, n \in Z$,

$\pi/4 + x_2 = 3\pi/4 + 2\pi n, n \in Z$,

$x_1 = 2\pi n, n \in Z$,

$x_2 = \pi/2 + 2\pi n, n \in Z$.

3 способ: приведение уравнения к однородному

$$\sin x + \cos x = 1$$

Разложим левую часть по формулам двойного аргумента, а

правую часть заменим тригонометрической единицей:

$$2\sin x/2 * \cos x/2 + \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \sin^2 x/2 + \cos^2 x/2$$

$$2\sin x/2 * \cos x/2 – 2\sin^2 x/2 = 0$$

$$\sin x/2 * (\cos x/2 - \sin x/2) = 0$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные при этом не теряют смысла, поэтому

$$\sin x/2 * (\cos x/2 - \sin x/2) = 0 \Rightarrow \sin x/2 = 0 \text{ или}$$

$$\cos x/2 - \sin x/2 = 0$$

$$\sin x/2 = 0;\ x/2 = \pi k;\ x = 2\pi k;\ k \in \mathbf{Z};$$

3 способ: приведение уравнения к однородному

$\sin x/2 - \cos x/2 = 0$ – однородное уравнение первой степени. Делим обе его части на $\cos x/2$ ($\cos x/2 \neq 0$, так как, если $\cos x/2 = 0$, $\sin x/2 - 0 = 0 \Rightarrow \sin x/2 = 0$, что противоречит тождеству $\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2 = 1$). Получим

$$\operatorname{tg} x/2 - 1 = 0;\ \operatorname{tg} x/2 = 1;\ x/2 = \pi/4 = \pi n;$$

$$x = \pi/2 + 2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x = 2\pi k;\ k \in \mathbf{Z} \text{ или } x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

4 способ: Возведение обеих частей уравнения в квадрат

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1;$$

$$1 + \sin 2x = 1;$$

$$\sin 2x = 0;$$

$$2x = \pi k;\ x = \pi k/2,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Полученное решение эквивалентно объединению четырех решений:

$x = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z},$

$x = \pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z},$

$x = \pi + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z},$

$x = -\pi/2 + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}.$

Проверка показывает, что второе и третье решения – посторонние.

5 способ: универсальная подстановка

Используемые формулы:

$\sin x = 2\operatorname{tg} x/2 \,/\, (1 + \operatorname{tg}^2 x/2)$;

$\cos x = (1 – \operatorname{tg}^2 x/2) \,/\, (1 + \operatorname{tg}^2 x/2)$;

$\operatorname{tg} x = 2\operatorname{tg} x/2 \,/\, (1 – \operatorname{tg}^2 x/2)$.

5 способ: универсальная подстановка

С учетом приведенных формул уравнение

$$\sin x + \cos x = 1$$

запишем в виде

$$2\operatorname{tg} x/2 \,/\, (1 + \operatorname{tg}^2 x/2) + (1 - \operatorname{tg}^2 x/2)/(1 + \operatorname{tg}^2 x/2) = 1.$$

Умножим обе части уравнения на $(1 + \operatorname{tg}^2 x/2)$:

$2\operatorname{tg} x/2 + 1 - \operatorname{tg}^2 x/2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x/2;$

$$2\operatorname{tg}^2 x/2 - 2\operatorname{tg} x/2 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x/2 = 0;\ \operatorname{tg} x/2 = 1$$

1) $x/2 = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$., $x = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2) $x/2 = \pi/4 + \pi n$; $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Арифметический

Геометрический

Алгебраический

Функционально-графический

Арифметический способ

перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$\boxed{1) \cos x = 0}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z.$$

Если n=0,то

$$x = \frac{\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=1,то

$$x = \frac{3\pi}{2}, \ \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=-1,то

$$x = -\frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=-2,то

$$x = -\frac{3\pi}{2}, \ -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$2)\ \sin x=\frac{1}{2},$$

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n \quad \text{или} \quad x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Если n=-1, то

$$x=-\frac{11\pi}{6},\ -\frac{11\pi}{6}\notin\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x=-\frac{7\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6}\notin\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=0, то

$$x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\in\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x=\frac{5\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\notin\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=1, то

$$x=\frac{13\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6}\notin\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x=\frac{17\pi}{6},\ \frac{17\pi}{6}\notin\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right].$$

$$\text{Ответ}:-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}.$$

Алгебраический способ

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;
б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Решить уравнение : $\dfrac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0.$

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 7x = 0, \\ \sin 5x - 1 \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ 5x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z, \\ x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z; \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}; n, k \in Z;$$

$$\frac{1}{14} + \frac{n}{7} \neq \frac{1}{10} + \frac{2k}{5}; n, k \in Z;$$

Найдём все «неподходящие» n.

$$\frac{1}{14}+\frac{n}{7}=\frac{1}{10}+\frac{2k}{5};n,k\in Z;$$

$$5+10n=7+28k;n,k\in Z;$$

$$10n=2+28k;n,k\in Z;$$

$$5n=1+14k;n,k\in Z;$$

$$n=\frac{1+14k}{5};n,k\in Z;$$

$$\boxed{n=2k+\frac{4k+1}{5};n,k\in Z;}$$

$$\frac{4k+1}{5}=a, \quad k\in Z, \quad a\in Z.$$

$$n=2k+\frac{4k+1}{5};\, n,k\in Z;$$

$$k=\frac{5a-1}{4};$$

$$k=5t+1;$$

$$k=a+\frac{a-1}{4};$$

$$\frac{a-1}{4}=t; \quad a\in Z, \quad t\in Z.$$

$$a=4t+1;$$

$$n=14t+3$$

$$t\in Z, n\in Z.$$

Все «неподходящие» n

Итак,

$$\frac{\cos 7x}{\sin 5x - 1} = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z; \quad n \neq 14t + 3, t \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z; \quad n \neq 14t + 3, t \in Z.$

Дано уравнение: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Решение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$$

$$\sin 2x = \cos x$$

$$2\sin x\cos x = \cos x$$

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$$

Тогда cos x = 0 или sin x = 0,5

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \quad k \in Z$$

Обе формулы можем объединить в одну:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z$$

имеет решение при $-1 \le a \le 1$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Найдём корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Итак, первый корень: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 4\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \le \pi k \le 4\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$2\pi \le \pi k \le 3{,}5\pi \quad \Big| \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$2 \le k \le 3{,}5$$

Так число k целое, то $k_1 = 2$ $k_2 = 3$

Находим корни, принадлежащие интервалу:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$$

Следующий корень: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \quad \Big| -\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \le 2\pi k \le 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{14\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{23\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{7}{6} \le k \le \frac{23}{12}$$

$$1\frac{2}{12} \le k \le 1\frac{11}{12}$$

Для полученного неравенства целого числа k не существует.

Следующий корень: $$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Решаем неравенство:

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi$$

$$\frac{5\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le 4\pi \quad \Big| -\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \le 2\pi k \le 4\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{10\pi}{6} \le 2\pi k \le \frac{19\pi}{6} \quad \Big| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{5}{6} \le k \le \frac{19}{12}$$

$$\frac{5}{6} \le k \le 1\frac{7}{12}$$

Так как число k целое, то k = 1.
Находим корень принадлежащий интервалу:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi \cdot 1 = \frac{5\pi}{6} + \frac{12}{6} = \frac{17\pi}{6}$$

Ответ: $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$

Геометрический способ:

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим их отбором на заданном промежутке;
б) изображение корней на координатной прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

Решить уравнение

$$2\sin 2x + \cos x + 4\sin x + 1 = 0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right].$

$$\boxed{2\sin 2x+\cos x+4\sin x+1=0;}$$

$$2\cdot 2\sin x\cdot\cos x+\cos x+4\sin x+1=0;$$

$$4\sin x\cdot\cos x+\cos x+4\sin x+1=0;$$

$$\cos x\cdot(4\sin x+1)+(4\sin x+1)=0;$$

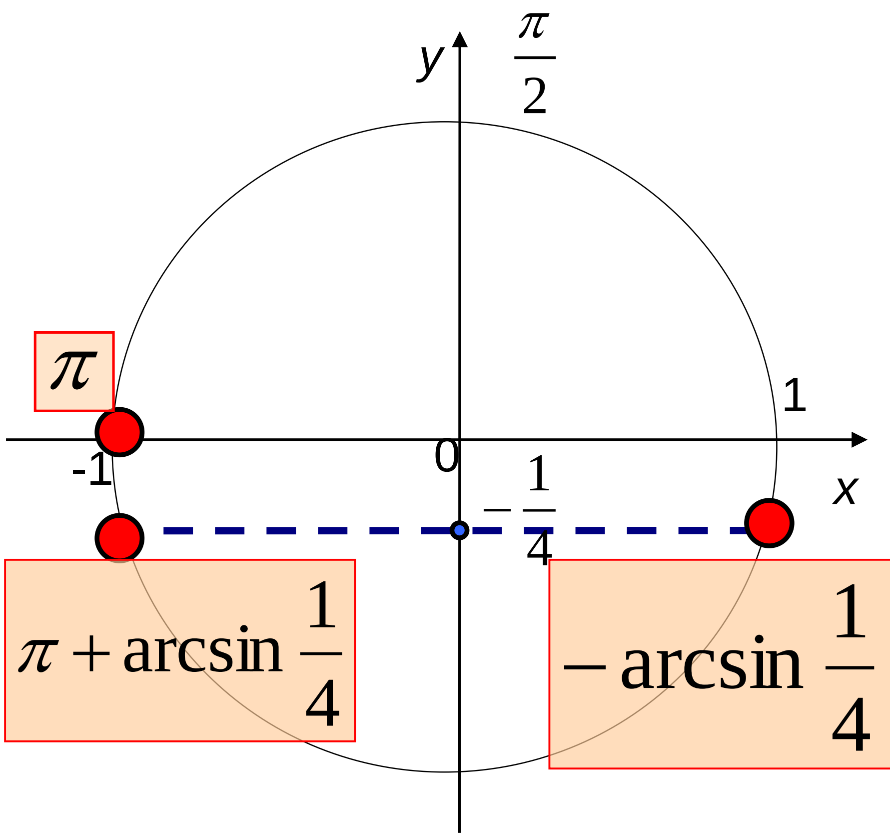
$$(4\sin x+1)\cdot(\cos x+1)=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}4\sin x+1=0,\\ \cos x+1=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{4},\\ \cos x=-1;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{4}, \\ \cos x = -1; \end{array}\right.$$

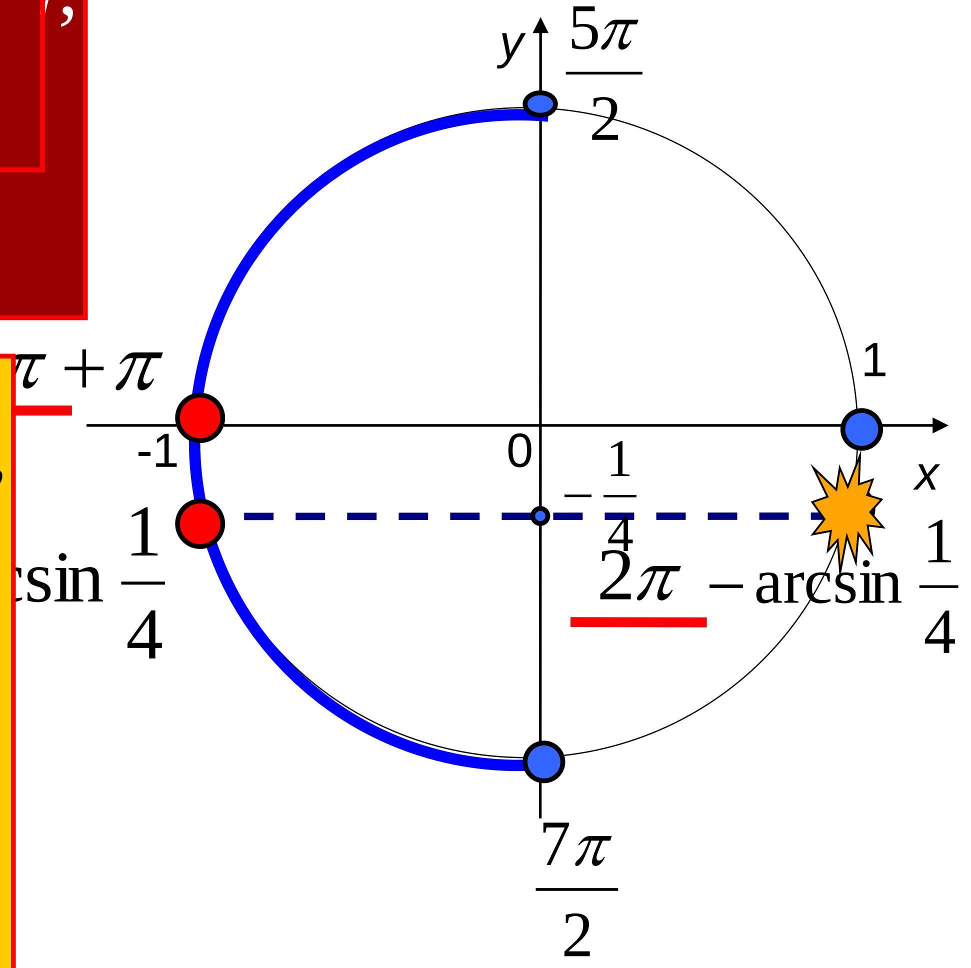
$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin\left(-\dfrac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z; \\ x = \pi + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = 3\pi + \arcsin\dfrac{1}{4}, \\ x = 3\pi. \end{array}\right.$$

?

$$\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$$



$Ответ: -\arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n,$

$\pi + \arcsin\dfrac{1}{4} + 2\pi n, n \in Z;$

$\pi + 2\pi k, k \in Z.$

$3\pi + \arcsin\dfrac{1}{4}; 3\pi.$

Функционально-графический способ

выбор корней с использованием графика простейшей тригонометрической функции.

Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x-\sqrt{2}\sin x-\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x-1}}=0;$$

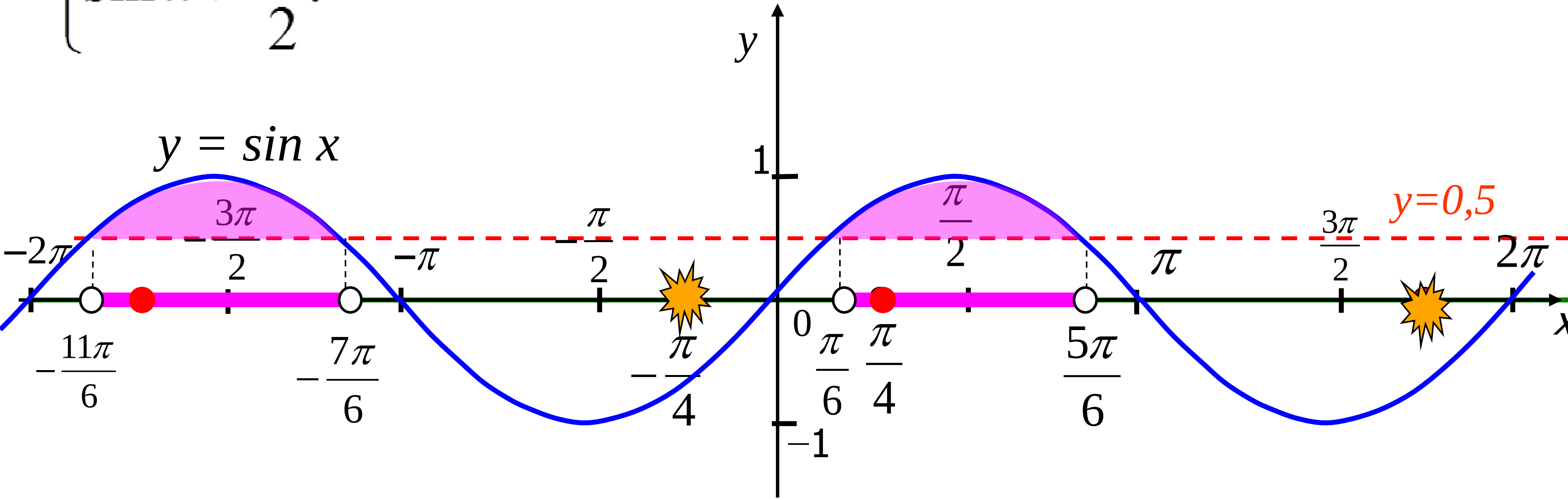
$$\frac{2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{2}\sin x-\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x-1}}=0;$$

$$\frac{(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot(2\sin x-1)}{\sqrt{2\sin x-1}}=0;$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=\frac{1}{2};\end{array}\right.\\ \sin x>\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;\\ \sin x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \\ \sin x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



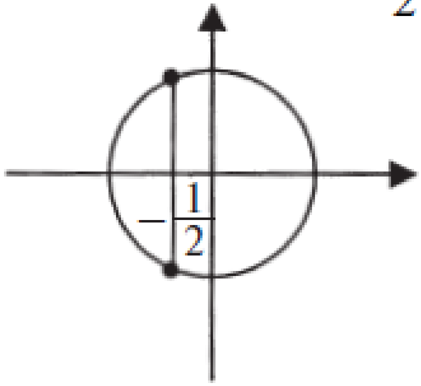
$$Ответ: \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Схемы решения простейших тригонометрических неравенств

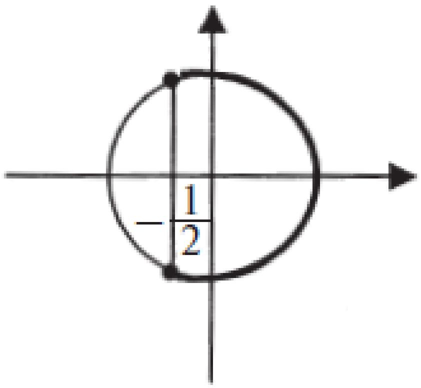
Схема № 1

Пример $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

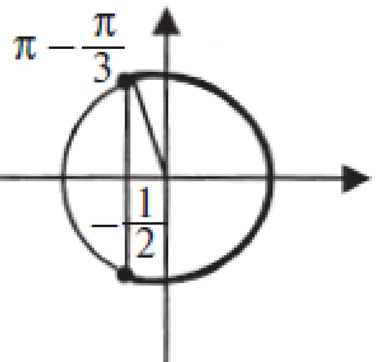
1. Заменить неравенство уравнением (устно), отметить на единичной окружности точки, соответствующие уравнению.



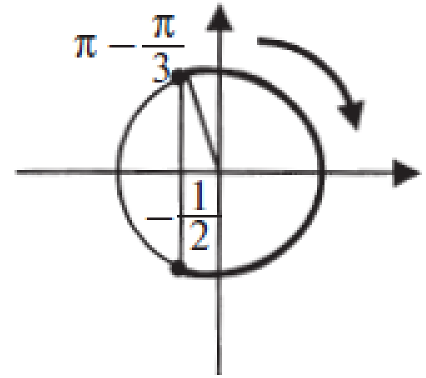
2. Отметить на единичной окружности точки, соответствующие неравенству (выделить соответствующую дугу).



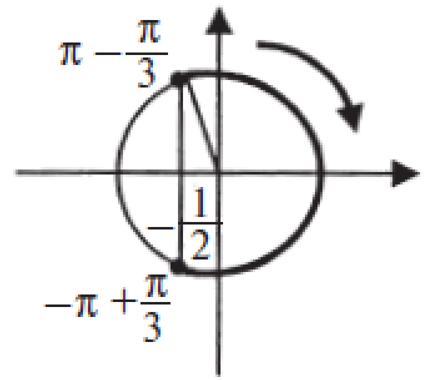
3. Определить, для какой точки соответствующий угол попадает в область значений аркфункции (основную точку), и найти угол, ей соответствующий (этот угол из промежутка $[0; \pi]$ и равен $\arccos a$).



4. Выбрать направление отсчета (от основной точки по отмеченной дуге). Если направление положительное, то угол, соответствующий второму концу дуги, будет положительным. Если направление отрицательное, то отрицательным.



5. Определить угол, соответствующий второму концу дуги.



6. Записать ответ в виде двойного неравенства с учетом периодичности функции (в двойном неравенстве слева пишется меньший угол).

$$2\pi n - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

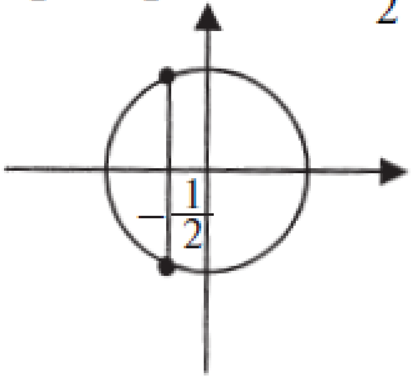
7. Записать ответ в виде промежутка.

$$\textit{Ответ:}\ \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in Z$$

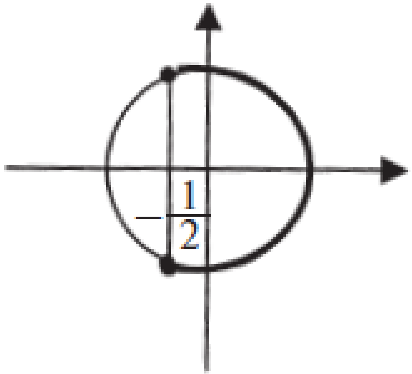
Схема № 2

Пример $\cos x \geq -\frac{1}{2}$

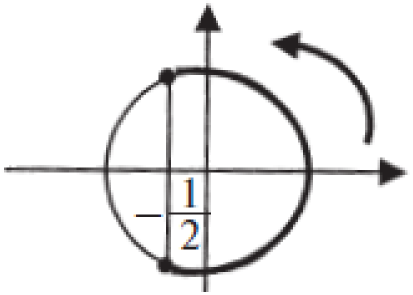
1. Заменить неравенство уравнением (устно) и отметить на единичной окружности точки, соответствующие уравнению.



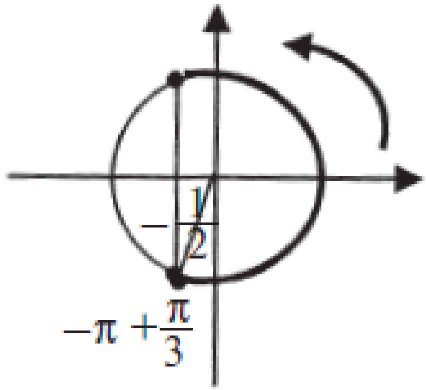
2. Отметить на единичной окружности точки, соответстующие неравенству (выделить соответствующую дугу).

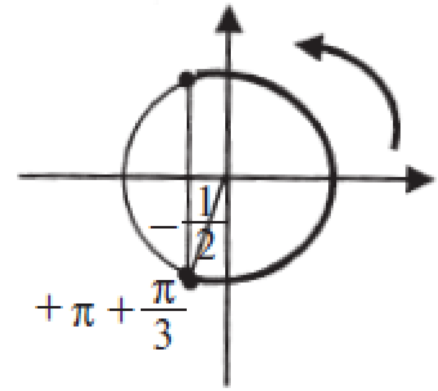


3. Указать направление отсчета (на выделенной дуге отмечается положительное направление, т. е. направление против часовой стрелки).

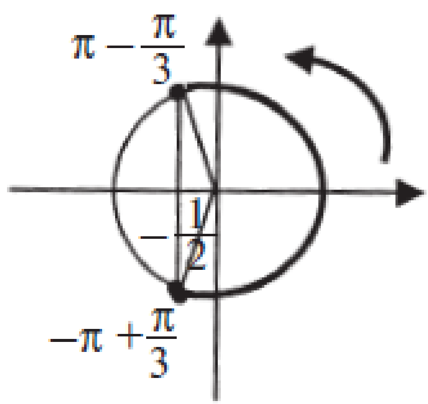


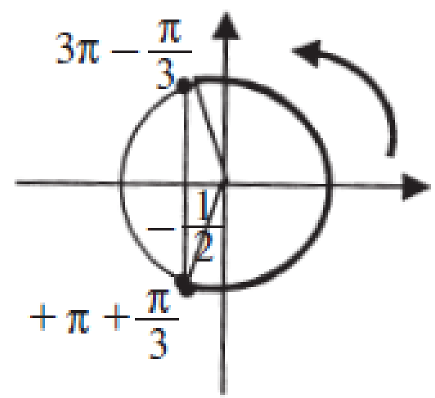
4. Найти начало дуги и угол, ему соответствующий.





5. Найти угол, соответствующий концу дуги.





6. Записать ответ в виде двойного неравенства с учетом периодичности функции (в двойном неравенстве слева пишется угол, соответствующий началу дуги).

$$2\pi n-\frac{2\pi}{3}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

или

$$2\pi n+\frac{4\pi}{3}\leq x\leq\frac{8\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$$

7. Записать ответ в виде промежутка.

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z$

или

$\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{8\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z$