Показательные уравнения и неравенства

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

1) *Например, в теории межпланетных путешествий решается задача об определении массы топлива, необходимого для того, чтобы придать ракете нужную скорость* ***v.*** *Эта масса* ***M*** *зависит от массы* ***m*** *самой ракеты (без топлива) и от скорости* $\mathbf{v_o}$*, с которой продукты горения вытекают из ракетного двигателя. Если не учитывать сопротивление воздуха и притяжение Земли, то масса топлива определяется формулой:*

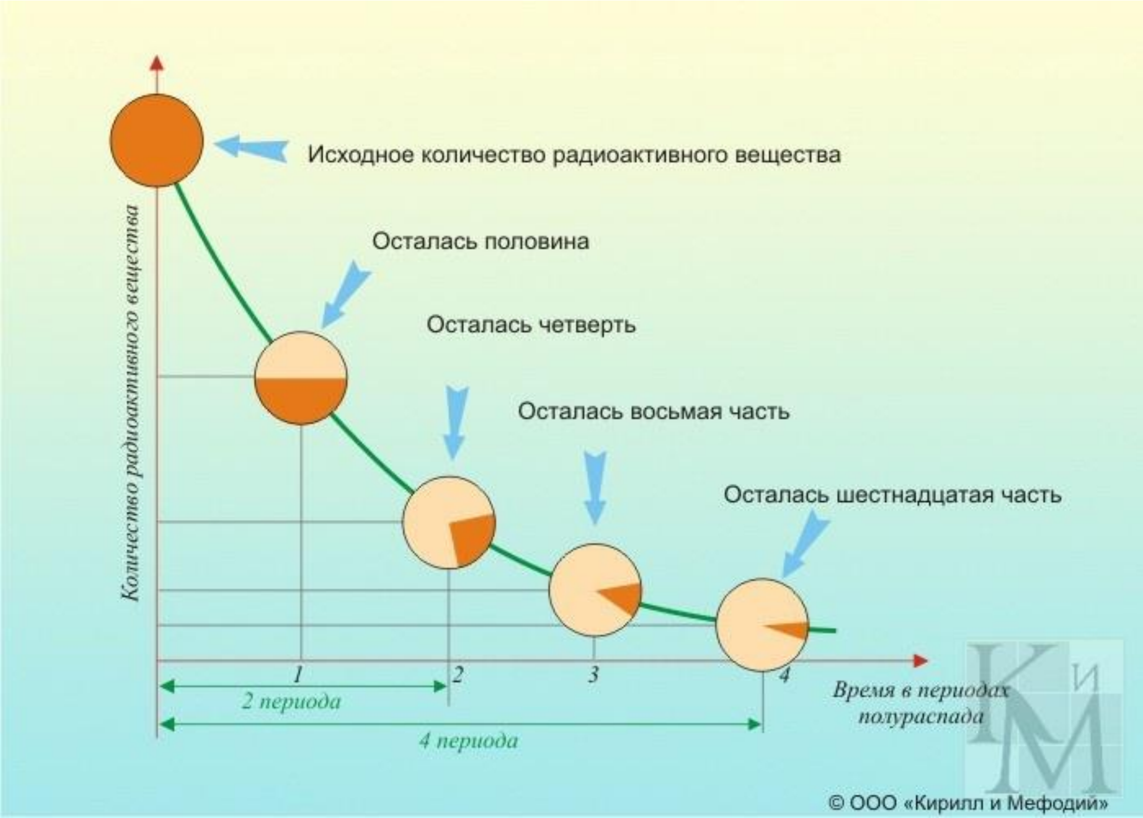
$\mathbf{M = m(e^{v/vo}-1)}$ *(формула К.Э. Циолковского).*

Например, для того чтобы ракета с массой 1,5т имела скорость 8000м/с, надо взять примерно 80т топлива.

Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

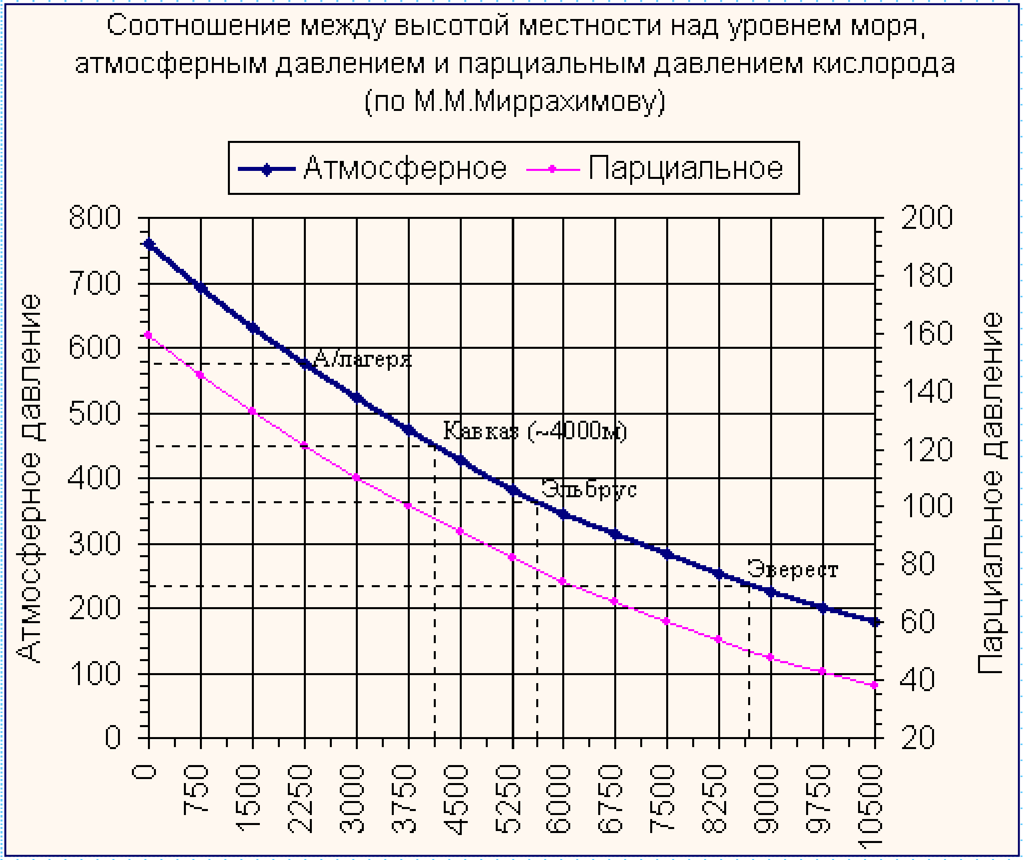
2) Радиоактивный распад вещества задаётся формулой $\boldsymbol{m = m_0(1/2)^{t/t_o}}$, где $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{m_o}$ – масса радиоактивного вещества в момент времени $\boldsymbol{t}$ и в начальный момент времени $\boldsymbol{t = 0; T}$ - период полураспада (промежуток времени, за который первоначальное количество вещества уменьшается вдвое).

Когда радиоактивное вещество распадается, его количество уменьшается. Через некоторое время остаётся половина первоначального количества вещества. Чем больше период полураспада, тем медленнее распадается вещество.



Показательная функция часто используется при описании различных физических процессов

3) *Изменение атмосферного давления **p** в зависимости от высоты **h** над уровнем моря описывается формулой $p = p_o \cdot a^k$, где p_o – атмосферное давление над уровнем моря, **a** – некоторая постоянная.*



Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют показательными уравнениями

Методы решения показательных уравнений:

1. Метод уравнивания показателей.
2. Метод введения новой переменной.
3. Функционально-графический метод.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^6$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

$$Ответ:\ 5$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

$$Ответ:\ 2$$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

$$Ответ:\ 2;\ 4$$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$\frac{0{,}2^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0{,}04^{x-2}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x-0{,}5} : 5^{0{,}5} = 5 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{x-2}$$

$$5^{0{,}5-x-0{,}5} = 5 \cdot \left(5^{-2}\right)^{x-2}$$

$$5^{-x} = 5^{1-2x+4}$$

$$5^{-x} = 5^{5-2x}$$

$$-x = 5 - 2x$$

$$x = 5$$

Ответ : 5

Пример 5

$$4^{x} + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$\left(2^{2}\right)^{x} + 2 \cdot 2^{x} - 24 = 0$$

$$\left(2^{x}\right)^{2} + 2 \cdot 2^{x} - 24 = 0$$

Пусть $2^{x} = t$, *где* $t > 0$ *тогда*

$$t^{2} + 2t - 24 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6$ *не уд – ет условию* $t > 0$

Вернемся к исходной переменной

$$2^{x} = 4$$

$$x = 2$$

Ответ : 2

Показательные уравнения. Примеры

Пример 6. Найдите ошибку в данном решении

$$2^{2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}-\frac{5}{2}\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=6$$

$$\textit{Пусть}\quad 2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t,\ \ t>0$$

$$t^2-\frac{5}{2}t-6=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=-\dfrac{3}{2}, \\ t_2=4 \end{array}\right.$$

$$t_1=-\frac{3}{2}\ \ \textit{не уд}-\textit{ет условию}\quad t>0$$

Вернемся к исходной переменной

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$$

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=2^2$$

$$\textit{ОДЗ}:$$

$$x^2-2\ge 0$$

$$x^2\ge 2$$

$$|x|\ge\sqrt{2}$$

$$x\in(-\infty;-\sqrt{2}\,]\cup[\,\sqrt{2}:+\infty)$$

$$x+\sqrt{x^2-2}=2$$

$$\sqrt{x^2-2}=2-x$$

$$x^2-2=4-4x+x^2$$

$$4x=6$$

$$x=1{,}5$$

$$\textit{Ответ}:\ 1{,}5.$$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 7. Найдите ошибку

$$\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{\frac{3x+3}{x}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-2^{3+\frac{3}{x}}+12=0$$

$$2^{\frac{6}{x}}-8\cdot 2^{\frac{3}{x}}+12=0$$

$$\textit{Пусть}\quad 2^{\frac{3}{x}}=t,\ \ t>0$$

$$t^2-8t+12=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1=2, \\ t_2=6; \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$2^{\frac{3}{x}}=2 \qquad \textit{или} \qquad 2^{\frac{3}{x}}=6$$

$$\frac{3}{x}=1 \qquad\qquad \frac{3}{x}=\log_2 6$$

$$x=3 \qquad\qquad x=\frac{3}{\log_2 6}$$

$$\textit{Ответ}:\ 3;\ \frac{3}{\log_2 6}.$$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 8

$$9\cdot 27^{x-\frac{2}{3}}-\frac{2}{81}\cdot 9^{x+2}=9$$

$$9\cdot\frac{27^x}{27^{\frac{2}{3}}}-\frac{2}{81}\cdot 9^x\cdot 9^2=9$$

$$9\cdot\frac{27^x}{9}-2\cdot 9^x=9$$

$$27^x-2\cdot 9^x-9=0$$

Пусть $3^x=t$, *где* $t>0$, *тогда*

$$t^3-2t^2-9=0$$

$$t^3-3t^2+t^2-9=0$$

$$t^2(t-3)+(t-3)(t+3)=0$$

$$(t-3)(t^2+t+3)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=3 \\ t^2+t+3=0 - \text{нет корней} \end{array}\right.$$

Вернемсяк исходнойпеременной

$$3^x=3$$

$$x=1$$

Ответ: 1.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 9 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 54 \cdot \frac{9^x}{9} = 0$$

$$5 \cdot 5^{2x} - 13 \cdot 15^x + 6 \cdot 9^x = 0$$

Разделим на 9^x, *тогда*

$$\frac{5 \cdot 5^{2x}}{9^x} - \frac{13 \cdot 15^x}{9^x} + \frac{6 \cdot 9^x}{9^x} = 0$$

$$5 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^x + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^x = t$, *где* $t > 0$, *тогда*

$$5t^2 - 13t + 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^x = 2$$

$$x = -1 \qquad\qquad x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

Ответ: $-1;\ \log_{\frac{5}{3}} 2.$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 10 (составление отношения)

$$4^x - 3^{x-1} = 4^{x-1} + 3^x$$

$$4^x - 4^{x-1} = 3^x + 3^{x-1}$$

$$4^{x-1}(4-1) = 3^{x-1}(3+1)$$

$$4^{x-1} \cdot 3 = 3^{x-1} \cdot 4 \qquad \Big| : \left(3^{x-1} \cdot 3\right), \ \textit{т.к.}\ 3^{x-1} \cdot 3 > 0$$

$$\frac{4^{x-1} \cdot 3}{3^{x-1} \cdot 3} = \frac{3^{x-1} \cdot 4}{3^{x-1} \cdot 3}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

Ответ: 2.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 11 (замена переменной)

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$$

Заметим, что $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{4-3} = 1$

Пусть $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$, *где* $t > 0$, *тогда* $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x} = \dfrac{1}{t}$

уравнение примет вид:

$$t + \frac{1}{t} = 4, \qquad \Big| \times t$$

$$t^2 - 4t + 1 = 0, \;\; D = 16 - 4 = 12$$

$$t_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$t_2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 11 (замена переменной)

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2-\sqrt{3} \qquad \text{или} \qquad \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2+\sqrt{3}$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$$

$$\frac{x}{2} = -1$$

$$x = -2$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{x}{2}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = 1$$

$$x = 2$$

Ответ: $-2;\ 2.$

Функционально-графический метод

- *Чтобы решить уравнение вида*

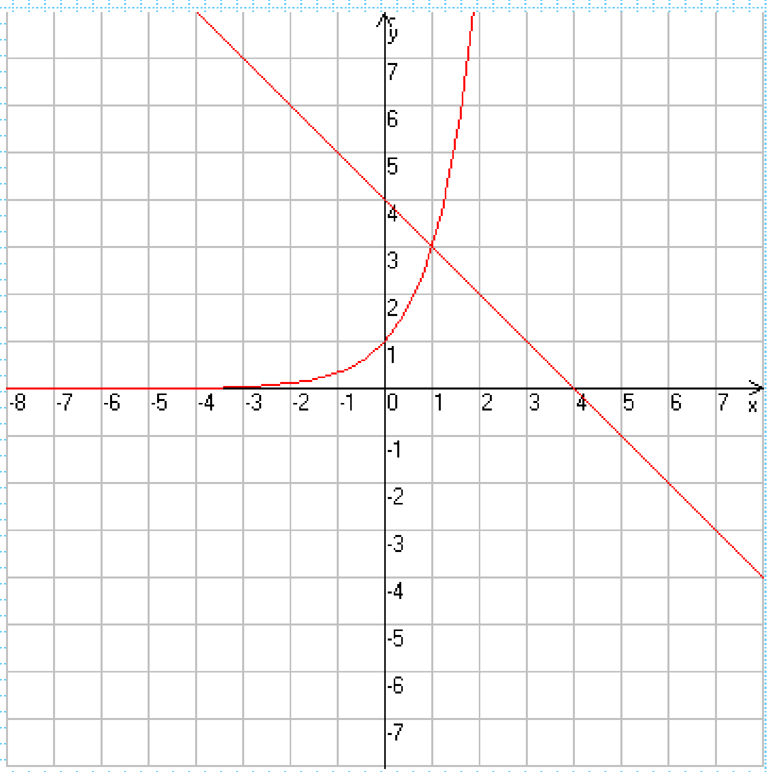
$f(x)= g(x)$ функционально-графическим методом нужно:

- *Построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ в одной системе координат.*
- *Определить абсциссы точек пересечения графиков данных функций.*
- *Записать ответ.*

Решите уравнение:

$3^x = 4 - x.$

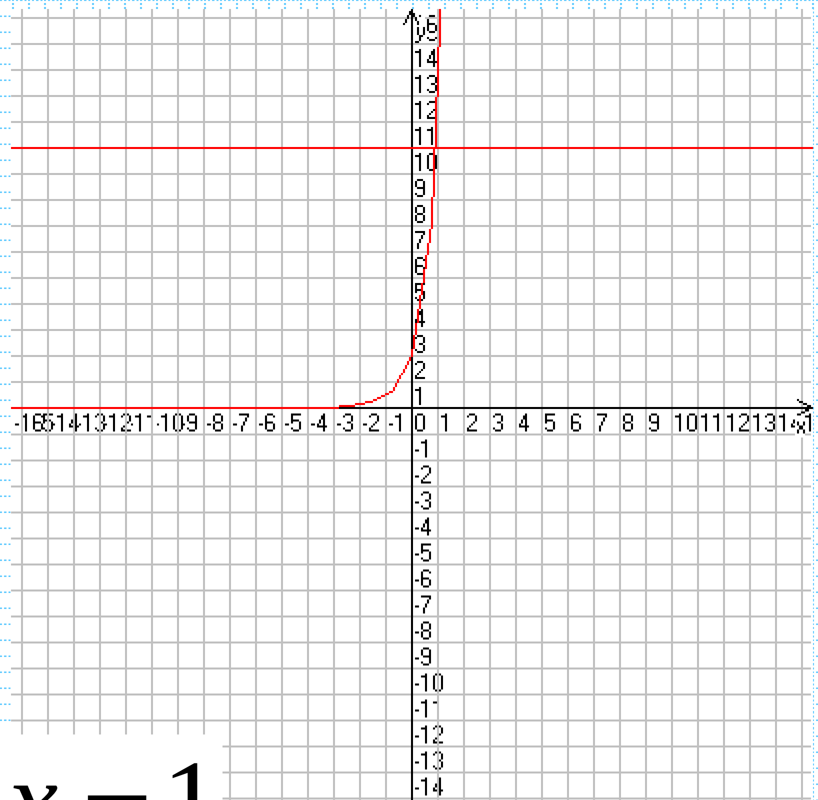
$y = 3^x$ $y = 4 - x$



$Ответ: x = 1$

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

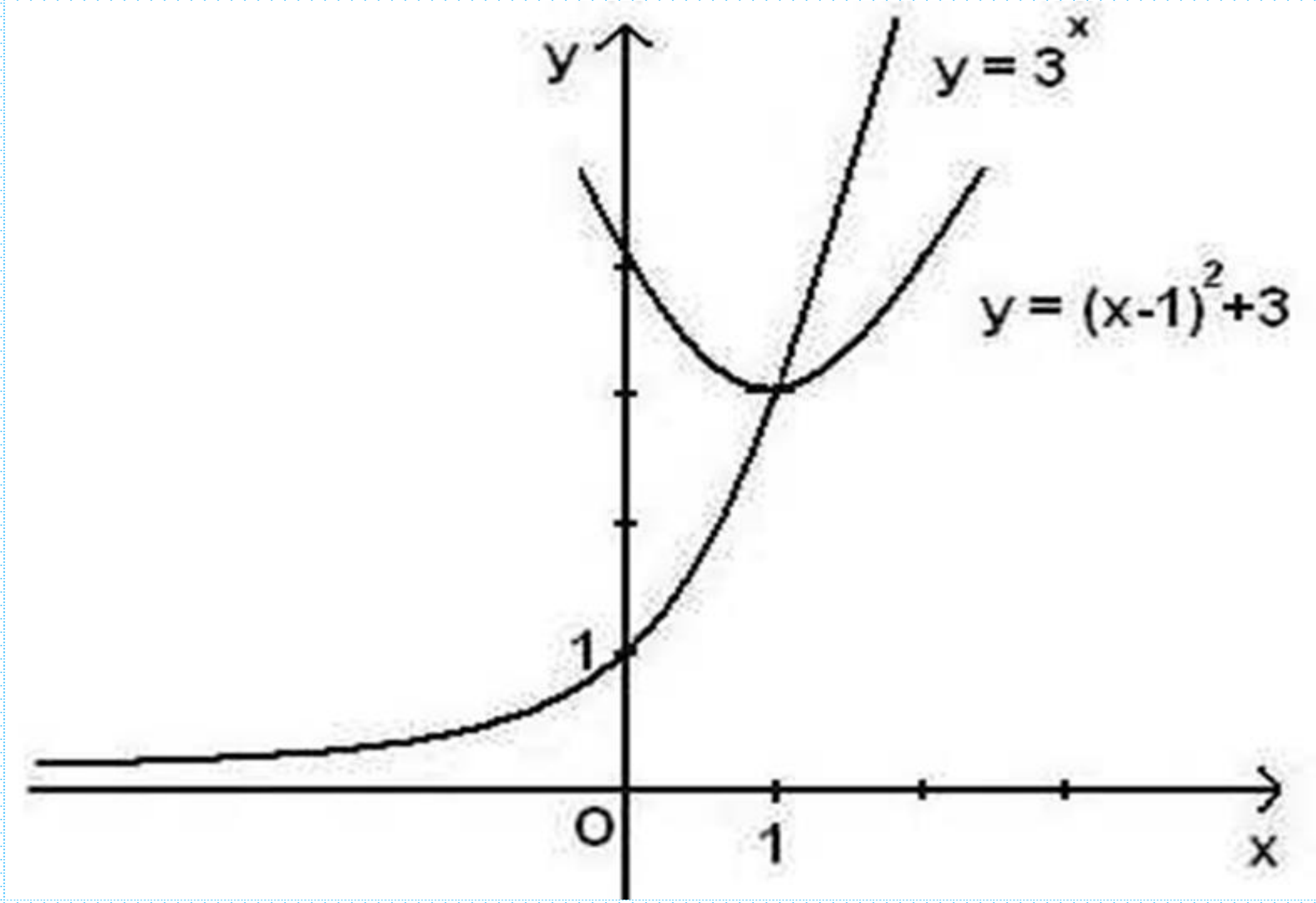
$$3^x + 7^x = 10.$$



$$\text{Ответ}: x = 1$$

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$$3^{x} = (x-1)^{2} + 3$$


y
y = 3^x
y = (x-1)^2+3
1
O
1
x

РЕШИТЬ УРАВНЕНИЕ

$$2^{|x|} = \cos x.$$

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos x = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x = 0$.

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

Свойства сравнения выражений вида a^x, $a \neq 1$, $a > 0$

1. Если $0 < a < 1$ или $a > 1$, то равенство $a^r = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $r = s$.

2. Если $0 < a < 1$, то
   а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow x < 0$;
   б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow x > 0$.

3. Если $a > 1$, то
   а) неравенство $a^x > 1$ справедливо $\Leftrightarrow x > 0$;
   б) неравенство $a^x < 1$ справедливо $\Leftrightarrow x < 0$.

4. Если $a > 1$, то
   а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) > h(x)$;
   б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) < h(x)$.

5. Если $0 < a < 1$, то
   а) неравенство $a^{f(x)} > a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) < h(x)$;
   б) неравенство $a^{f(x)} < a^{h(x)}$ справедливо $\Leftrightarrow f(x) > h(x)$.

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^{6}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = 2^{t}\ \ монотонно$$

$$возрастает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

$$Ответ:\ \left(5; +\infty\right)$$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$т.к.\ функция\ \ y = \left(\frac{1}{3}\right)^{t}$$

$$монотонно\ убывает\ на\ R,\ то$$

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

$$Ответ:\ \left(2; +\infty\right)$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 3

$0{,}5^{x^2-3x} \le 0{,}5^{3x-8}$

$т.к.\ функция\ \ y=(0{,}5)^t$

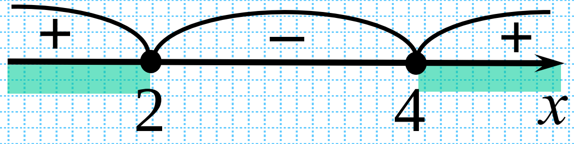
$монотонно\ \ убывает\ \ на\ R,\ то$

$x^2-3x \ge 3x-8$

$x^2-6x+8 \ge 0$

$н.ф.:\ \ x^2-6x+8=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$



$x \in (-\infty;\,2] \cup [4;\,+\infty)$

$Ответ\ :\ (-\infty;\,2] \cup [4;\,+\infty)$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \left| : \left(3^{3x}\right), \right. \ \text{т.к.} \ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} > 2$$

$$\text{Пусть} \ \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = t, \ \text{где} \ t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$$\text{т.к.} \ t^2 + t + 2 > 0 \ \text{для любых} \ t, \ \text{то} \ t - 1 > 0$$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

$т.к.\ \ a = \dfrac{2}{3} < 1,\ \ то\ ф-ция\ \ y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x\ убывает\ на\ R$

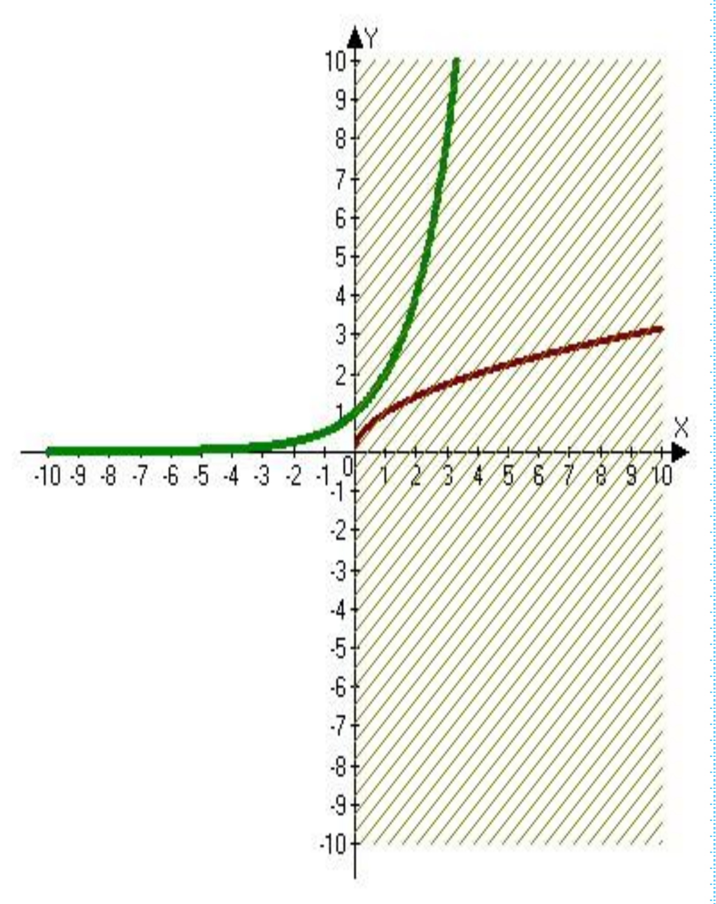
$$x < 0$$

$Ответ:\ (-\infty;\ 0).$

Решить неравенство

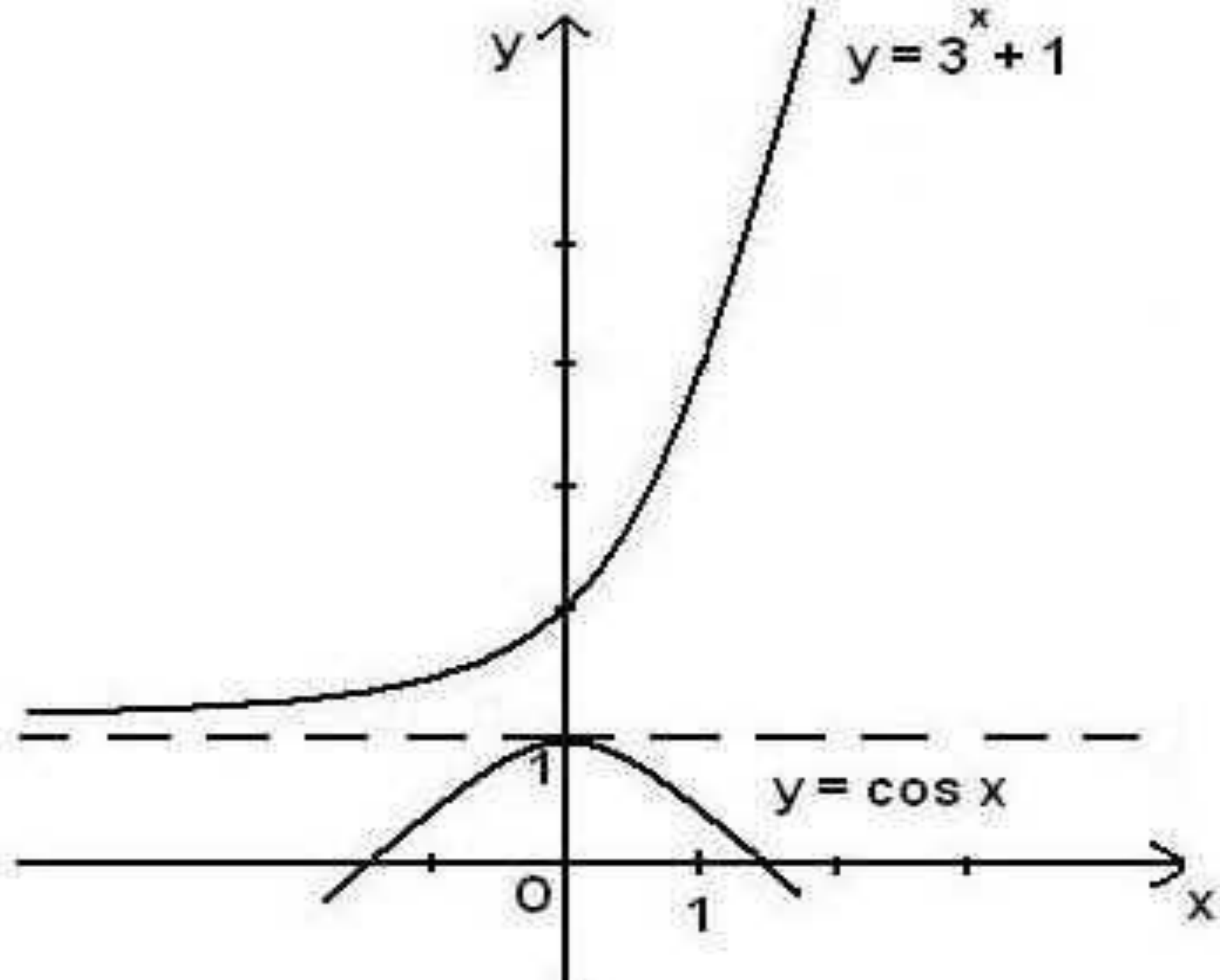
$$(2)^x > \sqrt{x}$$

$$Ответ: [0; +\infty)$$



Решить неравенство

$$\cos x \leq 1 + 3^x$$


y
$y = 3^x + 1$
1
$y = \cos x$
O
1
x

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$

$0 < a < 1$

$$f(x) > g(x)$$

$$f(x) < g(x)$$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)(f(x)-g(x)) > 0$$

при $a>0$

Найти ошибку

Пример 1:

$$\frac{(3^x-1)(2^{x^2}-16)}{x^2+x-2} \geq 0$$

Решение:

1. ОДЗ: $x^2+x-2 \neq 0$
2. Применяем равносильное преобразование по знаку по правилу 1:

$$\frac{(x-0)(x^2-4)}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

Решаем методом интервалов, учитываем ОДЗ, получаем ответ.

Ответ: $0 < x < 1; x \geq 2.$

Найти ошибку

Пример 2:

$$1 \leq 3^{\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right|} \leq 27$$

Решение:

$$3^0 \leq 3^{\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right|} \leq 3^3$$

Используя равносильную замену по знаку для показательной функции, получаем:

$(3-1)\left(\left|\frac{4x-3}{2x-1}\right| - 3\right) \leq 0$, используя равносильную замену для модуля, получаем:

$$\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)^2 - 3^2 \leq 0$$

$$\frac{x(5x-3)}{(2x-1)^2} \geq 0$$

$\frac{x(x-\frac{3}{5})}{(x-\frac{1}{2})^2} \geq 0$, решаем методом интервалов получаем ответ.

Ответ: $x \leq 0$; $x \geq \frac{3}{5}$; $x = \frac{3}{4}$.