# Логарифмические уравнения и неравенства. Методы решения

# *Что такое логарифм?

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$a > 0, a \neq 0, b > o.$$

# Основные свойства логарифмов

1) Логарифм произведения положительных сомножителей равен сумме логарифмов этих сомножителей:

$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a N_1 + \log_a N_2$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$).

**Замечание.** Если $N_1 \cdot N_2 > 0$, тогда свойство примет вид

$\log_a N_1 \cdot N_2 = \log_a |N_1| + \log_a |N_2|$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 \cdot N_2 > 0$).

2) Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_b N_2 \quad (a > 0,\ a \neq 1,\ N_1 > 0,\ N_2 > 0).$$

**Замечание.** $\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a |N_1| - \log_b |N_2|$

($a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 N_2 > 0$).

3) Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм этого числа:

$$\log_a N^k = k \log_a N \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0).$$

**Замечание.** Если $k$ - четное число ($k = 2s$), то

$$\log_a N^{2s} = 2s \log_a |N| \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ N \neq 0).$$

4) Формула перехода к другому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \qquad (a > 0,\ a \neq 1,\ c > 0,\ c \neq 1,\ b > 0),$$

в частности, если $b = c$, получим

$$\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$$

($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$).

5) Из вышеуказанных свойств вытекают следующие формулы:

$$\log_{a^c} b^d = \frac{d}{c}\log_a b, (\mathrm{a} > 0,\ \mathrm{a} \neq 1,\ \mathrm{b} > 0,\ \mathrm{c} \neq 0),$$

$$\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b, (\mathrm{a} > 0,\ \mathrm{a} \neq 1,\ \mathrm{b} > 0,\ \mathrm{c} \neq 0),$$

$$\log_{a^c} b^c = \log_a b, (\mathrm{a} > 0,\ \mathrm{a} \neq 1,\ \mathrm{b} > 0,\ \mathrm{c} \neq 0),$$

$$\log_{a^{2k}} b = \frac{1}{2k}\log_{|a|} b, (\mathrm{b} > 0,\ \mathrm{a} \neq 0,\ |\mathrm{a}| \neq 1),$$

$$\log_a b^{2k} = 2k\log_a |b|, (\mathrm{b} > 0,\ \mathrm{a} \neq 0,\ |\mathrm{a}| \neq 1)$$

1. Область определения логарифмической функции есть множество положительных чисел.
2. Область значений логарифмической функции - множество действительных чисел.
3. При $a > 1$ логарифмическая функция строго возрастает ($0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$), а при $0<a<1$, - строго убывает ($0<x_1<x_2 \Rightarrow \log_a x_1>\log_a x_2$).
4. $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ $(a > 0, a \neq 1)$.
5. Если $a > 1$, то логарифмическая функция отрицательна при $x \in (0;1)$ и положительна при $x \in (1;+\infty)$, а если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при $x \in (0;1)$ и отрицательна при $x \in (1;+\infty)$.
6. Если $a > 1$, то логарифмическая функция выпукла вверх, а если $a \in (0;1)$ - выпукла вниз.

# Логарифмические уравнения

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

1) Простейшее логарифмическое уравнение $\mathbf{\log_a x = b}$.

Решением является $x=a^b$

2) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ⟵ $\begin{cases} f(x)= g(x), \\ g(x)>0, \\ f(x)>0. \end{cases}$

$\begin{cases} f(x)= g(x), \\ g(x)>0, \end{cases}$ ⟷ $\begin{cases} f(x)= g(x), \\ g(x)>0, \\ f(x)>0. \end{cases}$ ⟷ $\begin{cases} f(x)= g(x), \\ f(x)>0. \end{cases}$

4) $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

неравносильный переход

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad \cancel{\Leftrightarrow} \quad f(x) = g(x)$$

# Методы решения логарифмических уравнений

* **Использование определения логарифма**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Пример

$\mathbf{\log_2(5 + 3\log_2(x - 3)) = 3}$

Решение

$$5+3\log_2(x-3)=2^3 \Leftrightarrow \log_2(x - 3) = 1 \Leftrightarrow \underline{x=5}$$

# Методы решения логарифмических уравнений

* **Использование свойств логарифма**

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

Пример

$\mathbf{\log_3 x + \log_3(x + 3) = \log_3(x + 24),}$

Решение

О.Д.З.: $x>0$,

$x(x+3)=x+24 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 24 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\{-6;4\} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{x=4}$

# Методы решения логарифмических уравнений

* **Метод подстановки**

$$f(\log_a x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_a x \\ f(t)=0 \end{cases}$$

Пример

$$\lg^2 x - 3\lg x + 2 = 0$$

Решение

$$\begin{cases} \lg x = t \\ t^2-3t+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x=1 \\ \lg x=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \underline{x=\{10;100\}}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = (a^{\log_a b})^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$$

Пример

$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x} \Leftrightarrow$

**$5^{\lg x} = 25 \Leftrightarrow$ <u>$x=100$</u>**

# Методы решения логарифмических уравнений

* Уравнения, содержащие выражения вида

$$f(x)^{\log_a g(x)}$$

Пример $(x+2)^{\log_2(x+2)} = 4(x+2)$

Решение

$$\log_2(x+2)^{\log_2(x+2)} = \log_2(4(x+2)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+2) * \log_2(x+2) = 2 + \log_2(x+2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $\log_2(x+2)=t,$

$t^2-t-2=0.$

$\Rightarrow x = \{-3/2; 2\}$

# Методы решения логарифмических уравнений

- Метод оценки левой и правой частей

Пример

$$\log_2 (2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5.$$

Решение

1) $2x - x^2 + 15 = -(x^2 - 2x - 15) = -((x^2 - 2x + 1) - 1 - 15) = (16 - (x - 1)^2) \le 16 \Leftrightarrow \log_2 (2x - x^2 + 15) \le 4.$

2) $x^2 - 2x + 5 = (x^2 - 2x + 1) - 1 + 5 = (x - 1)^2 + 4 \ge 4;$

$$\begin{cases} \log_2 (2x - x^2 + 15) = 4, \\ x^2 - 2x + 5 = 4. \end{cases} \quad \underline{x=1}$$

# Методы решения логарифмических уравнений

- Использование монотонности функций. Подбор корней.

Пример

$$\log_2 (2x - x^2 + 15) = x^2 - 2x + 5.$$

Решение

$$\left.\begin{array}{l} 2x-x^2+15=t,\ t>0 \\ x^2-2x+5=20-t \end{array}\right\} \to \log_2 t=20-t$$

***$y=\log_2 t$*** – возрастающая, ***$y=20-t$*** – убывающая. Геометрическая интерпретация дает понять, что исходное уравнение имеет единственный корень, который нетрудно найти подбором, ***$t=16$***. Решив уравнение ***$2x-x^2+15=16$,*** находим, что ***$x=1$***

# Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется **логарифмическим уравнением**.

1) $\log_a f(x) > \log_a g(x) \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0, \\ a>1. \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} 0<f(x)<g(x), \\ 0<a<1. \end{array}\right.$

2) $\log_{h(x)}f(x)>\log_{h(x)}g(x) \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x)>g(x)>0, \\ h(x)>1. \end{array}\right.$ $\quad \left\{\begin{array}{l} 0<f(x)<g(x), \\ 0<h(x)<1. \end{array}\right.$

$$3)\ \log_{h(x)}f(x)>\log_{h(x)}g(x) \longleftrightarrow \begin{cases} (h(x)-1)(f(x)-g(x))>0, \\ h(x)>0, \\ f(x)>0, \\ g(x)>0. \end{cases}$$

$$4)\ f(\log_a x)>0 \longleftrightarrow \begin{cases} t=\log_a x, \\ f(t)>0. \end{cases}$$

# Методы решения логарифмических неравенств с переменным основанием

$$\log_{x^2+3x}(x+3)<\log_{x^2+3x}\left(x^2+3x\right)$$

Перейдем к равносильной системе неравенств:

$$\begin{cases} \left(x^2+3x-1\right)\left((x+3)-\left(x^2+3x\right)\right)<0 \\ x+3>0 \\ x^2+3x>0 \\ x^2+3x\neq 1 \end{cases}$$

Сначала преобразуем первое неравенство системы к виду

$$\left(x^2+3x-1\right)\left(-x^2-2x+3\right)<0$$

и решим это неравенство методом интервалов.

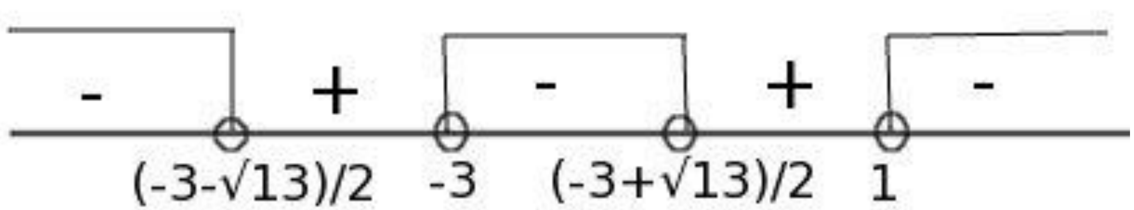
Корни квадратного трехчлена в первых скобках:

$$x_1=\frac{-3+\sqrt{13}}{2},\quad x_1=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$$

Корни квадратного трехчлена во вторых скобках:

$$x_1=1,\quad x_2=-3.$$

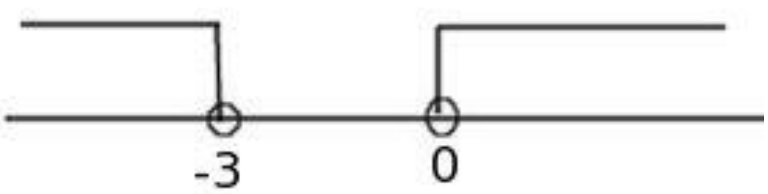
Нанесем эти корни на координатную прямую и расставим знаки:



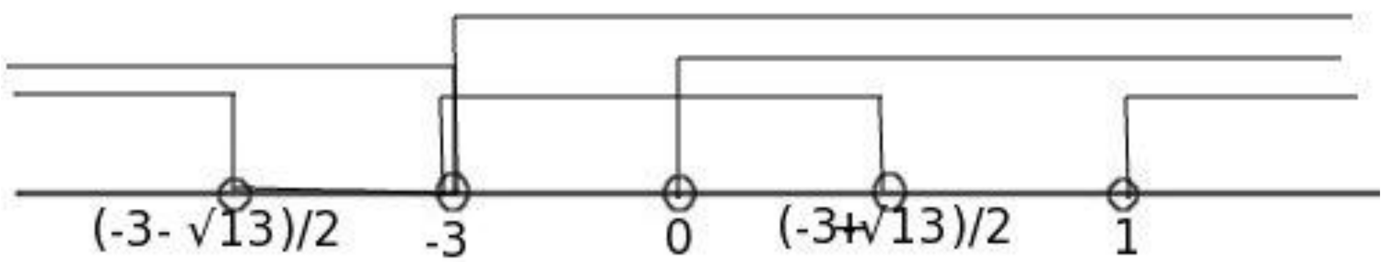
Решение второго неравенства системы:

$x>-3$

Решение третьего неравенства: $x^2+3x>0$




Теперь совместим решение всех неравенств на одной координатной прямой:




**Ответ:** $x\in\left(0,\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(1;\infty\right)$.