Методические подходы к изучению объемов многогранников.

О понятии объема фигуры.

Понятие объема фигуры вводится аналогично понятию площади плоской фигуры.

Последовательность изучения объемов:

1. Подсчет числа кубиков.
2. Объем прямоугольного параллелепипеда
3. Объем призмы
4. Объем пирамиды
5. Объемы других многогранников.

Основной целью изучения свойств геометрических тек в пространстве, является развитие пространственных представлений учащихся, освоение способов вычисления практически важных геометрических величин и дальнейшие развитие логического мышления учащихся. Умение изображать важнейшие геометрические тела, вычислять их площади поверхностей и объемы имеют большую практическую значимость.

Изучение темы «Объемы многогранников» дает возможность учащимся:

- получить представление о широте геометрии в различных областях человеческой деятельности;
- усвоить сведения о пространственных формах;
- использовать сведения из планиметрии для описания пространственных фигур;
- иллюстрировать пространственные формы, в частности решить задачи на сечения;
- решить различные задачи на вычислении;
- решить задачи на доказательства и т. д.

Объем-это часть пространство занимаемое телом. Понятие объема имеет следующие свойства:

- каждое тело имеет определенный объем;
- два равных многогранника имеют один и тот же объем;
- объем составного многогранника равен сумме объемов составляющих;
- если многогранник является частью другого многогранника, то его объем не больше объема этого многогранника;
- объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Методы вычисления объемов многогранников

1. Использование интеграла при вычислении объема фигур по площадям его поперечных параллельных сечений.

- Теоретическое обоснование метода:

Рассмотрим фигуру D, ограниченную двумя опорными плоскостями α и β, проведенными перпендикулярно оси Ox через точку $x=a$ и $x=b$. Пусть фигура D обладает следующими свойствами:

1) любое поперечное сечение фигуры D плоскостью, перпендикулярной оси Ox, есть квадрируемая фигура σ, числовое значение площади которой равно значению функции $S(x)$, определенной и непрерывной на отрезке $[a;b]$;

2) ортогональные проекции любой пары поперечных сечений фигуры D плоскостями, перпендикулярными оси Ox, на опорные плоскости целиком содержатся одна в другой.

Тогда фигура D кубируема, и ее объем можно вычислить по формуле:

$$\int_a^b S(x)dx$$

(Этот метод можно применять для вычисления объема пирамиды, конуса и шара)

2. Использование формулы Симпсона для вычисления объема по площади параллельных сечений.

- Теоретическое обоснование метода:

Пусть D– фигура с допустимыми поперечными параллельными сечениями. Тогда объем фигуры, значения площадей поперечных сечений на сегменте [а;в] выражаются значениями квадратного трехчлена Q(x), вычисляется по формуле

$$V = \frac{b-a}{6} \cdot (Q_{\text{н}} + 4Q_c + Q_k)$$

где $Q_{\text{н}} = Q(a), Q_c = Q\left(\frac{a+b}{2}\right), Q_k = Q(b)$

соответственно площади начального, среднего и конечного сечений.

(Для вычисления объема пирамиды, конуса)

3. Применение принципа Кавальери для нахождения объемов фигур.

- Теоретическое обоснование метода:

Если две фигуры заключены между двумя параллельными плоскостями и обладают тем свойством, что при пересечении их любой плоскостью, параллельной указанным плоскостям, получаются фигуры-сечения, имеющие одинаковые площади, то объемы этих фигур равны.

(Вычисление объемов круглых тел)

Анализ учебников

1. Авторский коллектив Л.С. Атанасяна

Глава 7. Объемы тел: Понятие объема. Объем прямоугольного параллелепипеда. Объем прямой призмы и цилиндра. Объем наклонной призмы, пирамиды и конуса. Объем шара и площадь сферы.

Понятие объема вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры и формулируются свойства объемов. Существование и единственность объема тела принимается без доказательства.

Объем прямоугольного параллелепипеда выводится с использованием свойств объема и интуитивных представлений учащихся о предельном переходе. С помощью формулы объема прямоугольного параллелепипеда выводится формула объема треугольной пирамиды, основанием которого является прямоугольный треугольник. С использованием этого факта и свойств объема выводится формула объема прямой призмы. Объемы наклонной призмы и пирамиды выводятся с использованием интеграла.

2. И.Ф. Шарыгин «Геометрия 10-11»

Глава 5. Объем многогранников

5.1.Что такое объем?

5.2.Объем прямоугольного параллелепипеда

5.3.Принцип подобия

5.4.Объем пирамиды

5.6.Вычисление объемов многогранников

5.7.*Использование свойств объема при решении задач.

Учебник *И. Ф. Шарыгина* реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Его характеризует отказ от аксиоматического метода и акцент на использование наглядных методов в процессе построения теории и решения задач. В учебнике нетрадиционно изложены многие необходимые теоретические факты.

3. Учебники *И. М. Смирновой*

Концепция авторского подхода к геометрии как науке и учебному предмету. Их отличия связаны с учебными задачами, которые ставятся в том или ином профиле.

В учебнике для естественнонаучного профиля имеются теорема Эйлера, учебные пункты, посвященные правильным, полуправильным, звездчатым многогранникам, многогранникам, вписанным в сферу, описанным около сферы и т. п. Больше внимания в учебнике уделено изучению кривых и поверхностей, рассматриваются аналитические способы задания фигур. Наряду с декартовыми координатами в пространстве используются полярные и сферические координаты.

В учебнике для гуманитарного профиля:

направленность курса поддерживается за счет вопросов исторического, философского и мировоззренческого характера, рассмотрения приложений геометрии. При этом курс логически связан, содержит необходимые определения, свойства, теоремы и их доказательства. Большую роль играет наглядность.

После теоретического материала имеются задания для самоконтроля по теории и различные задачи, среди которых выделены важные задачи, используемые при решении других задач. Главы заканчиваются списком задач, с помощью которых можно повторить содержание главы.