Методические подходы к изучению объемов тел вращения

Весь круг вопросов по теме «**Тела вращения**» можно условно разделить на две группы:

1) Цилиндр и конус:

a) Определение, поверхность, симметрия, касательная плоскость, сечение осевое и перпендикулярное оси, вписанные и описанные многогранники;

b) Объем;

c) Площадь боковой поверхности.

2) Шар и сфера:

a) Определение, симметрия, сечение, касательная плоскость;

b) Объем шара;

c) Площадь сферы.

Последовательность изучаемых тел вращения: цилиндр, конус, шар – соответствует обычно последовательности: призма, пирамида, правильные многогранники. Цилиндр (цилиндрическая поверхность) и призма (поверхность призмы) имеют очень много общих свойств. Аналогичное замечание можно сделать и относительно понятия пирамиды и конуса. Во всех школьных учебниках выделяется для изучения поверхность шара – сфера.

Существует 4 подхода к изложению теории объемов.

1) «Метод исчерпывания» (А.В.Погорелов). Объёмы тел вращения определяются как пределы последовательностей объёмов вписанных и описанных многогранников, при этом сложность составляет вычисление объёма шара - приходится вводить формулу для объёма тела вращения через определённый интеграл.

2) Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла (Л.С.Атанасян, Александров).

3) С помощью принципа Кавальери.

4) По формуле Симпсона (Киселев).

Атанасян Л.С. Геометрия 10-11

- На изучение темы «Объемы тел» отводится 19 ч. Входят такие разделы, как: объем прямоугольного параллелепипеда, объемы прямой призмы и цилиндра, объемы наклонной призмы, пирамиды и конуса, объем шара и площадь сферы, объемы шарового сегмента, шарового слоя и шарового сектора.
- Основная цель – продолжить систематическое изучение многогранников и тел вращения в ходе решения задач на вычисление их объемов.
- В курсе стереометрии понятие объема вводится по аналогии с понятием площади плоской фигуры, и формулируются основные свойства объемов. Существование и единственность объема тела в школьном курсе математики приходится принимать без доказательства. Поэтому нужные результаты устанавливаются, руководствуясь больше наглядными соображениями.

- В учебнике Л.С.Атанасяна в главе «Объемы тел» объем цилиндра выводится с применением интуитивных представлений учащихся о предельном переходе из объема призмы. Объемы конуса, шара, шарового сегмента выводятся с помощью интеграла.

Теорема. ***Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.***

Доказательство. Впишем в данный цилиндр P радиуса r и высоты h правильную n-угольную призму F_n (рис. 167), а в эту призму впишем цилиндр P_n (основания этого цилиндра на рисунке 167 заштрихованы). Обозначим через V и V_n объемы цилиндров P и P_n, через r_n — радиус цилиндра P_n. Так как объем

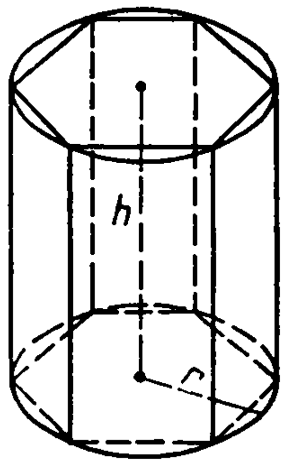


Рис. 165. Призма, вписанная в цилиндр.

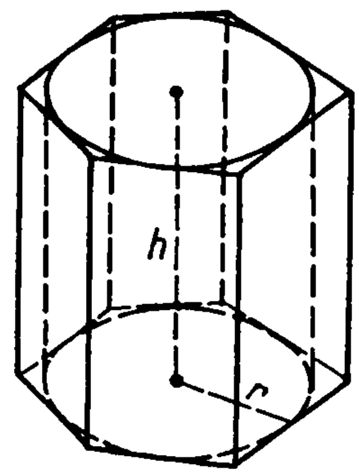


Рис. 166. Призма, описанная около цилиндра.

призмы F_n равен $S_n \cdot h$, где S_n — площадь основания призмы, а цилиндр P содержит призму F_n, которая, в свою очередь, содержит цилиндр P_n, то

$$V_n < S_n \cdot h < V. \qquad (1)$$

Будем неограниченно увеличивать число n. При этом радиус r_n цилиндра P_n стремится к радиусу r цилиндра P $\left(r_n = r \cos \frac{180°}{n} \to r \text{ при } n \to \infty\right)$. Поэтому объем цилиндра P_n стремится к объему цилиндра P: $\lim\limits_{n \to \infty} V_n = V$. Из неравенств (1) следует, что и $\lim\limits_{n \to \infty} S_n \cdot h = V$. Но $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \pi r^2$. Таким образом,

$$V = \pi r^2 h. \qquad (2)$$

Обозначив площадь πr^2 основания цилиндра буквой S, из формулы (2) получаем

$$V = S \cdot h.$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а. ***Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим конус с объемом V, радиусом основания R, высотой h и вершиной в точке O. Введем ось Ox так, как показано на рисунке 173 (OM — ось конуса). Произвольное сечение конуса плоскостью, перпендикулярной к оси Ox, является кругом с центром в точке M_1 пересечения этой плоскости с осью Ox (п. 55). Обозначим радиус этого круга через R_1, а площадь сечения через $S(x)$, где x — абсцисса точки M_1. Из подобия прямоугольных треугольников OM_1A_1 и OMA следует, что $\frac{OM_1}{OM}=\frac{R_1}{R}$, или $\frac{x}{h}=\frac{R_1}{R}$, откуда $R_1=\frac{xR}{h}$.

Так как $S(x)=\pi R_1^2$, то $S(x)=\frac{\pi R^2}{h^2}x^2$.

Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a=0$, $b=h$, получаем

$$V=\int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2}x^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi R^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi R^2h.$$

Площадь S основания конуса равна πR^2, поэтому $V=\frac{1}{3}Sh$.

Теорема

Объем шара радиуса R равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

▼ **Доказательство**

Рассмотрим шар радиуса R с центром в точке O и выберем ось Ox произвольным образом (рис. 192). Сечение шара плоскостью, перпендикулярной к оси Ox и проходящей через точку M этой оси, является кругом с центром в точке M. Обозначим радиус этого круга через r, а его площадь через $S(x)$, где x — абсцисса точки M. Выразим $S(x)$ через x и R. Из прямоугольного треугольника OMC находим

$$r = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Так как $S(x) = \pi r^2$, то

$$S(x) = \pi(R^2 - x^2). \qquad (1)$$

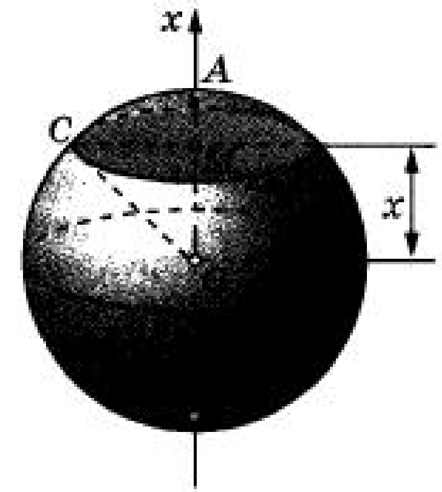


Рис. 192

Заметим, что эта формула верна для любого положения точки M на диаметре AB, т. е. для всех x, удовлетворяющих условию $-R \leqslant x \leqslant R$. Применяя основную формулу для вычисления объемов тел при $a = -R$, $b = R$, получаем:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi R^2 \int_{-R}^{R} dx - \pi \int_{-R}^{R} x^2 dx =$$

$$= \pi R^2 x \Big|_{-R}^{R} - \frac{\pi x^3}{3} \Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Теорема доказана. △

Шарыгин И.Ф. Геометрия 10-11

- Учебник И. Ф. Шарыгина реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии. Его характеризует отказ от аксиоматического метода и акцент на использование наглядных методов в процессе построения теории и решения задач.

И. М. Смирнова для естественнонаучного профиля

- Учебник является одним из нескольких учебных пособий, написанных И. М. Смирновой и В. А. Смирновым.
- Учебник для естественнонаучного профиля позволяет углубить знания учащихся по геометрии, например, в учебнике уделено внимание к изучению кривых и поверхностей, рассматриваются аналитические способы задания фигур. Наряду с декартовыми координатами в пространстве используются полярные и сферические координаты.

- В учебниках И.Ф. Шарыгина и И.М. Смирновой для вывода объема шара использован принцип Кавальери. Его предлагается использовать и при решении задач.
- Применение **принципа Кавальери** для нахождения объема шара и его частей, объема шарового кольца (в шаре просверлен цилиндрический канал, ось которого - диаметр шара).
- **Сущность принципа Кавальери**:

Принцип Кавальери. Если при пересечении двух фигур Φ_1 и Φ_2 в пространстве плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях получаются фигуры F_1 и F_2 одинаковой площади (рис. 222), то объемы исходных пространственных фигур равны.

Для обоснования этого принципа представим фигуры Φ_1 и Φ_2 составленными из тонких слоев одинаковой толщины, которые получаются при пересечении фигур Φ_1 и Φ_2 плоскостями, параллельными некоторой заданной плоскости (рис. 222). Считая слои прямыми цилиндрами, из равенства площадей их оснований и равенства высот получаем, что равны и объемы соответствующих слоев. Следовательно, равны и объемы фигур Φ_1 и Φ_2, составленных из этих слоев.

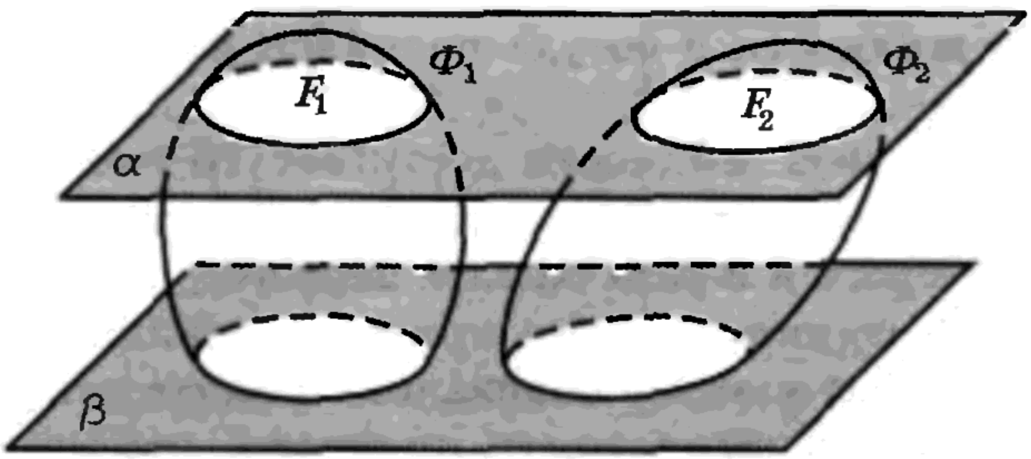


Рис. 222

То есть суть в переходе от равенства площади сечения, которая является производной от объёма по выделенному направлению, к равенству объёмов.

Объём шара: Найдите объём шара радиуса ***R*.**

Решение. Рассмотрим три объекта: шар радиуса R**,** цилиндр высотой h=2R с радиусом основания R и пару конусов с общей вершиной и осью, с высотой h=R каждый и с радиусом основания R**.** Пусть оси конусов и цилиндра параллельны и направлены вдоль оси Z**,** центры шара, цилиндра и общая вершина конусов лежат в плоскости π, перпендикулярной Z. Рассмотрим сечение тел плоскостью, параллельной π и удаленной от неё на расстояние Z. Площадь сечения цилиндра πR^2**,** конусов πZ^2**.** Сечение шара - это круг радиуса r, причём $r^2 + z^2 = R^2$**.**

Площадь сечения шара $\pi r^2 = \pi R^2 - \pi z^2$. По принципу Кавальери объём шара равен разности объема цилиндра (R, h=2R) и пары конусов(R, h=R)

$$V = 2R \cdot \pi R^2 - 2 \cdot \frac{R \cdot \pi R^2}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Решение задачи по теме «Объемы тел вращения» с использованием общего приема решения

- *Задача:* Площадь боковой поверхности конуса, радиус основания которого *R*, равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найти объём конуса.

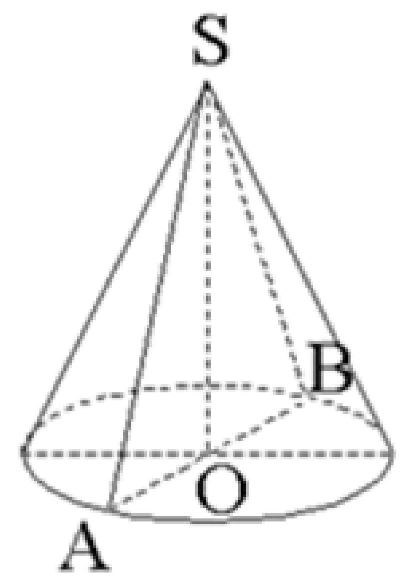
1) Анализ условия задачи.

Построение изображения.

Дано: конус, *SO* – высота, окр. *(O, OA),*

$OA=R$, $S_{бок}=S_{осн}+S_{\Delta ASB}$.

Найти: *V* – объём конуса.



2) *Поиск решения*.

Задача на вычисление, поиск решения начинаем с формулы:

$V = S_{осн}\, h$, $S_{осн} = \pi R^2$, $V = S_{осн}\, SO$.

Надо найти *SO*: применим алгебраический метод.

3) *Решение задачи* (алгебраический метод).

I. *Составление модели*.

Пусть $SO = h$, тогда $S_{\Delta}ASB = AB \cdot h = \cdot 2R \cdot h = Rh$.

$S_{бок} = \pi R \cdot SA$; Из ΔSOA по теореме Пифагора найдём $SA = ,$

$S_{бок} = \pi R.$

Зная, что $S_{осн} + S_{\Delta ASB} = S_{бок}$, составим уравнение: $\pi R = \pi R^2 + R\, h$.

II. *Решение модели:* $\pi R\sqrt{h^2+R^2} = \pi R^2 + R\,h$,

$\pi^2(h^2+R^2) = \pi^2R^2 + 2\pi R\,h + h^2$, $(\pi^2-1)\,h^2 - 2R\,h = 0$, $h_1 = 0$, $h_2 = \dfrac{2\pi R}{\pi^2-1}$.

III. Формирование ответа на вопрос задачи.

По смыслу задачи $h > 0$, следовательно, $h = \dfrac{2\pi R}{\pi^2-1}$, $V = \dfrac{2\pi^2R^2}{3(\pi^2-1)}$.

4) *Исследование:* В данном случае, процесс исследования можно опустить, предполагая, что $R > 0$.

Ответ: $V = \dfrac{2\pi^2R^2}{3(\pi^2-1)}$..

Анализ и обобщение решения задачи. Задача решена алгебраическим методом, суть которого состоит в том, что искомая величина находится с помощью уравнения (или системы уравнений), составленного по условию задачи. При составлении уравнений используются различные геометрические факты, формулы, теоремы (в данной задаче использовалась формула площади полной поверхности конуса). При решении задачи для нахождения искомой величины нашли сначала *вспомогательную неизвестную* величину – высоту конуса.