

Логико-дидактический анализ содержания темы
«Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Приведем логико-дидактический анализ темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей» в соответствии с учебником Атанасяна

1.Целеполагание

1.1 Цели изучения темы

Образовательные:

- Сформировать представления о прямых, перпендикулярных в пространстве, о перпендикулярности прямой и плоскости, о перпендикулярности плоскостей.
- Сформулировать признак перпендикулярности прямой и плоскости, ввести понятия углов между прямой и плоскостью, между плоскостями.

Развивающие:

- Развитие пространственного мышления при построении прямых, перпендикулярных плоскости, перпендикулярных плоскостей;
- Развитие вычислительных навыков при решении задач по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»;
- Развитие аккуратности при изображении условий различных задач;
- Развитие логического мышления при решении задач на доказательство по данной теме и при доказательстве утверждений;

- Развитие умения переносить свойства геометрических объектов на сходные с ними реальные объекты.

1.2 Содержание темы

На изучение темы по программе отводится 17 часов. В рамках изучения темы рассматриваются: перпендикулярные прямая и плоскость, перпендикуляр и наклонная, угол между прямой и плоскостью, двугранный угол, перпендикулярные плоскости.

1.3. Постановка учебных задач[4]

Учебные задачи:

– определить перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей как одно из возможных отношений между объектами в пространстве, используя аналогию или обобщение понятия перпендикулярности на плоскости;

– выявить условия существования, признаки и свойства различных из указанных выше комбинаций, используя аналогию с данным материалом, изложенным в планиметрии, и построения темы «Параллельность»;

– конструктивно определить расстояние и углы между парами объектов в пространстве;

– формировать обобщенный прием решения задач на вычисление расстояний и углов между пространственными фигурами (изображение, анализ чертежа, вычисление с помощью анализа или синтеза сводится к решению некоторого прямоугольного треугольника);

– формировать новый способ решения задач на построение сечений многогранников с помощью свойств параллельных и перпендикулярных плоскостей;

– формирование логической культуры, связанной с содержательной общностью понятий перпендикулярности на плоскости и в пространстве.

Диагностируемые цели.

По окончании изучения темы ученик:

Знает:

– определения (перпендикулярных прямых в пространстве; прямой, перпендикулярной к плоскости; перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки к плоскости, проекции наклонной на плоскость; расстояния от точки до плоскости; проекции точки и произвольной фигуры на данную плоскость; угла между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней; двугранного угла, граней и ребра двугранного угла; линейного угла двугранного угла; градусной меры двугранного угла; перпендикулярных плоскостей; прямоугольного параллелепипеда; измерений прямоугольного параллелепипеда; куба);

– формулировки леммы о перпендикулярности двух параллельных прямых третьей; теорем (прямой и обратной), связывающих параллельность с перпендикулярностью прямых к плоскости; признака перпендикулярности прямой и плоскости; теоремы (прямой и обратной) о трех перпендикулярах; признака и свойства перпендикулярных плоскостей;

– доказательства признака перпендикулярности прямой к плоскости; теоремы о трех перпендикулярах; признака и свойства перпендикулярных плоскостей.

Умеет:

– изображать отрезки, длины которых являются расстояниями между указанными фигурами и углы между фигурами и обосновывать их изображение;

– вычислять соответствующие расстояния и углы;

– строить сечения многогранников новым способом.

Понимает (осознает):

– практическую значимость данной темы;

- роль аналогии и обобщения в получении новых знаний;
- взаимосвязь между определениями расстояний и углов между объектами.

1.4 Мотивация

Материал главы широко используется при изучении последующих разделов курса. Изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве сопровождается решением большого количества задач, поэтому при изучении данной темы продолжается развитие пространственных представлений учащихся, конструктивных навыков изображения фигур на плоскости, навыков выполнения рисунков, их правильного восприятия и чтения. Использование в задачах многогранников – призмы и пирамиды – позволяет подготовить учащихся к изучению соответствующего раздела в курсе стереометрии. При решении геометрических задач на ЕГЭ довольно часто используются знания по этой теме.

2. Логико – математический анализ

2.1 Анализ теоретического материала.

I. В теме выделены следующие дидактические единицы [4]:

1. Определения:

- перпендикулярных прямых в пространстве;
- прямой, перпендикулярной к плоскости;
- перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки к плоскости, проекции наклонной на плоскость;
- расстояния от точки до плоскости;
- проекции точки и произвольной фигуры на данную плоскость;
- угла между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярную к ней;
- двугранного угла, граней и ребра двугранного угла;
- линейного угла двугранного угла;

градусной меры двугранного угла;
перпендикулярных плоскостей;
прямоугольного параллелепипеда;
измерений прямоугольного параллелепипеда;
куба.

2. Теоремы:

о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей (сформулирована как лемма);

о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости;

обратная к теореме о перпендикулярности двух параллельных прямых к плоскости;

признак перпендикулярности прямой и плоскости;

о прямой, перпендикулярной плоскости;

о трех перпендикулярах и обратная к ней;

признак перпендикулярности двух плоскостей и следствия из него;

свойства прямоугольного параллелепипеда;

свойство диагонали прямоугольного параллелепипеда и следствие из него.

3. Утверждения, не выделенные в тексте параграфа как теоремы:

если прямая a перпендикулярна к плоскости α , то она пересекает эту плоскость (доказано методом от противного);

перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из этой же точки к этой плоскости;

проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая (доказано);

все линейные углы двугранного угла равны друг другу (доказано);

II. Методологические знания.

1. Относительно определений.

Структура определений, встречающихся в теме, – через род и видовые отличия. Все их можно подразделить на две подгруппы по способу задания видовых отличий. Видовые отличия сформулированных определений задаются:

а) конструктивно, указанием способа построения (перпендикуляра и наклонной, проведенных из точки к плоскости, проекции наклонной на плоскость линейного угла двугранного угла);

б) перечисление некоторого набора свойств (все остальные).

Ни структура определений, ни способы задания видовых отличий для учащихся не новы.

Логическая структура и способы получения для учащихся не новы (прослеживается аналогия с курсом планиметрии). Все понятия представлены в вербальной, натуральной и графической форме. Возникает необходимость широкого использования учебно-наглядных средств для включения учеников в самостоятельный поиск новых утверждений.

При введении понятий необходимо:

а) уделять внимание доказательству его существования;

б) обучению логическим умениям выводить следствия и подводить под понятия (что важно при решении задач).

Учащимся важно показать, что определение перпендикулярных прямых, понятие перпендикуляра и наклонной в пространстве является обобщением соответствующих определений на плоскости.

2. Относительно теорем.

1). Осмысление логической структуры теорем: какая из них является теоремой-свойством, теоремой-признаком;

2). Рассмотренные в теме теоремы доказываются уже известными учащимся общелогическими методами, а именно: синтетическим, полной индукции, от противного.

3). К выделенным теоремам необходимо добавить некоторые задачи-факты, которые должны быть усвоены учащимися наряду с другими теоремами.

4). Перпендикулярность прямой и плоскости (двух плоскостей) есть частный случай пересекающихся прямой и плоскости (двух плоскостей).

Тема даёт возможность продолжать формировать у учащихся средства:

– аналогии (аналогичны последовательности изучения понятий параллельности и перпендикулярности: определение \rightarrow существование \rightarrow признак \rightarrow свойства, понятия перпендикулярности прямых на плоскости и в пространстве, перпендикулярных прямых и перпендикулярных плоскостей и так далее);

– синтез;

– обобщение.

3. В теме присутствуют дидактические единицы, которые имеют большое прикладное значение и используются в первую очередь для решения задач. Например, теорема о трех перпендикулярах и ей обратная в основном используются для построения линейного угла двугранного угла.

4. При изучении темы полезно прибегать к моделированию как способу включения учащихся в самостоятельную поисковую познавательную деятельность.

5. Тема очевидным образом разбивается на три блока: перпендикулярность прямых, перпендикулярность прямой и плоскости, перпендикулярность плоскостей.

2.2 Анализ задачного материала.

I. Дидактические.

- Перпендикулярность прямой и плоскости (116 –119).
- Наклонная. Проекция наклонной. Перпендикуляр (138).
- Линейный угол двугранного угла (166, 167).
- Параллелепипед (187, 188).

II. Задачи на вычисление.

1. Расстояний:

- От точки до плоскости (141–143, 150а), 170, 189, 202, 207, 209, 210).
- От точки до прямой (130б), 149, 152,154, 155, 157, 158, 203, 168, 170, 182б), 206).
- Между скрещивающимися прямыми (150, 194, 215).
- От прямой до плоскости (193а), в)).
- Между плоскостями (193б)).

2. Углов:

- Между прямыми(201).
- Между прямой и плоскостью (192).
- Между плоскостями (171, 172, 173, 174, 190, 213, 214).

III. Задачи–теоремы (123, 132–137, 139, 144, 146, 153, 156, 161, 162, 175, 177–180, 183, 185, 186, 212).

IV. Задачи на множество точек (136, 200, 210).

V. Построение сечений(196).

VI. Прочие задачи.

- На доказательство перпендикулярности:
 - прямых (127, 129б), 148, 181);
 - плоскостей (191);
 - прямых и плоскостей (128, 129а), 131, 159)
- На вычисление (120–122, 125, 130а), 140, 145б), 163, 176, 184, 195, 204, 208, 211, 216, 217). В этих задачах требуется найти длину отрезка, площадь треугольника и так далее, которые нельзя отнести к предыдущим пунктам.

2.3 Тематическое планирование по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей» см. в Приложении 1

Приложение 1.

Тематическое планирование темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей»

Таблица 1 - Тематическое планирование

Номер урока, его тип. Тема урока.	Учебная задача.	Диагностируемые цели.
1.Перпендикулярные прямые в пространстве (урок изучения и закрепления материала)	1) Расширить понятие перпендикулярных прямых на плоскости до понятия перпендикулярных прямых в пространстве 2) «Открыть» совместно с учащимися лемму о перпендикулярных прямых 3) Обосновать существование этих объектов на натуральных моделях	1) Знает определение перпендикулярных прямых в пространстве, формулировку леммы 2) Выделяет 2 возможных случая взаимного расположения перпендикулярных прямых в пространстве, ТБ доказательства 3) Воспроизводит идею доказательства 4) Распознает перпендикулярные прямые на натуральных моделях
2.Признак перпендикулярности прямой и плоскости (урок изучения и первичного закрепления знаний)	1) «Открыть» совместно с учениками определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости, условия существования прямой перпендикулярной плоскости 2) Провести доказательство признака совместно с учениками	1) Знает определение прямой перпендикулярной плоскости 2) Формулирует признак 3) Осознает необходимость рассмотрения дополнительных теорем для доказательства общего случая признака 4) Обосновывает ход рассуждений при доказательстве признака 5) Выделяет ТБ доказательства признака 6) Обосновывает существование прямой, перпендикулярной плоскости
3.Признак перпендикулярности прямой и плоскости (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности) Самостоятельная работа	Формировать умения: 1) применять теоретические положения для решения задач 2) составлять задачи, обратные данной 3) осуществлять поиск решения аналитико-синтетическим методом	1) Выделяет в условии задачи отдельные элементы 2) Осознает схему поиска решения задачи аналитико-синтетическим методом 3) Владеет способом доказательства перпендикулярности прямой и плоскости
4. Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости (урок изучения и закрепления материала)	1) «Открыть» совместно с учениками теорему о прямой, перпендикулярной плоскости, единственность такой прямой 2) Провести доказательство теоремы совместно с учениками	1)Формулирует теорему о прямой, перпендикулярной плоскости 2)Обосновывает ход рассуждений при доказательстве признака 3)Выделяет ТБ доказательства теоремы

<p>5. Перпендикулярность прямой и плоскости (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности)</p>	<p>Выявить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) степень усвоения теорем-свойств и признаков изучаемых объектов и способов их доказательства 2) степень усвоения определений перпендикулярных прямых, перпендикулярности прямой и плоскости 3) сформированность умений применять теоретические знания к решению дидактических задач 	<p>Понимает уровень усвоения материала и уровень собственных умений</p>
<p>6. Перпендикулярность прямой и плоскости (урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности) Тест №1</p>	<p>Выделить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) приемы доказательства перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости; 2) типы задач на вычисление и способы их решения 	<p>Знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) определения, признаки, свойства перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости; 2) способы доказательства перпендикулярности двух прямых 3) способы доказательства перпендикулярности прямой и плоскости <p>Умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) доказывать перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости, <p>Осознает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) природу происхождения темы 2) роль аналогии и обобщения в получении новых знаний, значимость темы
<p>7. Расстояние от точки до плоскости (урок изучения и закрепления материала)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) «Открыть» с помощью конструктивного диктанта понятия перпендикуляра и наклонной к плоскости 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Знает определения новых понятий 2) Выделяет на рисунке новые понятия
<p>8. Теорема о трех перпендикулярах (урок изучения и закрепления материала)</p>	<ol style="list-style-type: none"> 1) «Открыть» формулировку теоремы о трех перпендикулярах и ей обратной 2) Выделить круг задач, которые можно решать с помощью этих теорем 3) Привлечь учащихся к работе в группах 4) Формировать у учащихся познавательные и исследовательские умения 5) Провести аналогию с курсом планиметрии 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Знает формулировку теоремы о трех перпендикулярах и обратной ей 2) Понимает, что обратное утверждение является теоремой, идею доказательства теоремы о трех перпендикулярах
<p>9. Теорема о трех перпендикулярах (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности)</p>	<p>Формировать умения:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) применять теоретические положения для решения задач 2) осуществлять поиск решения аналитико-синтетическим методом 	<ol style="list-style-type: none"> 1) Выделяет в условии задачи отдельные элементы 2) Осознает схему поиска решения задачи аналитико-синтетическим методом 3) Владеет способом доказательства ТТП и теоремы, ей обратной

<p>10. Угол между прямой и плоскостью (урок изучения и закрепления материала) Самостоятельная работа</p>	<p>1) Привлечь учащихся к работе в группах 2) Формировать у учащихся познавательные и исследовательские умения 3) Провести аналогию с курсом планиметрии</p>	<p>1) Имеет представление о расстояниях и углах между различными объектами в пространстве 2) Изображает расстояния и углы в простейших ситуациях 3) Осознает связь данного материала с курсом планиметрии</p>
<p>11. Теорема о трех перпендикулярах. Угол между прямой и плоскостью (урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности) Тест №2</p>	<p>Выявить: 1) степень усвоения теоретического и методического материала 2) степень сформированности умений применять их</p>	<p>Понимает уровень усвоения материала и уровень собственных умений</p>
<p>12. Двугранный угол (урок изучения и закрепления материала)</p>	<p>1) Познакомиться с определением двугранного угла 2) Выделить круг задач нахождение градусной меры двугранного угла 3) Привлечь учащихся к работе в группах 4) Формировать у учащихся познавательные и исследовательские умения</p>	<p>1) Знает определение двугранного угла, умеет находить градусную меру двугранного угла 2) Выделяет на рисунке новые понятия</p>
<p>13. Свойства двугранного угла (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности)</p>	<p>Формировать умения: 1) применять теоретические положения для решения задач 2) осуществлять поиск решения аналитико-синтетическим методом</p>	<p>1) Выделяет в условии задачи отдельные элементы 2) Осознает схему поиска решения задачи аналитико-синтетическим методом 3) Знает определение двугранного угла</p>
<p>14. Перпендикулярность плоскостей (урок изучения и закрепления материала)</p>	<p>1) «Открыть» совместно с учащимися определение и признак перпендикулярных плоскостей 2) Обосновать существование этих объектов 3) Провести совместно с учащимися доказательство признака</p>	<p>1) Знает определение перпендикулярных плоскостей 2) Формулирует признак перпендикулярности плоскостей 3) Обосновывает существование перпендикулярных плоскостей, ход рассуждений при доказательстве признака перпендикулярных плоскостей 4) Выделяет ТБ доказательств 5) Решает дидактические задачи</p>
<p>15. Прямоугольный параллелепипед</p>	<p>1) Выделить в качестве нового объекта изучения прямоугольный параллелепипед, изучить его свойства</p>	<p>1) Знает определение прямоугольного параллелепипеда 2) Формулирует свойства параллелепипеда 3) Обосновывает ход рассуждений при доказательстве свойств параллелепипеда 4) Решает дидактические задачи</p>

<p>16. Перпендикулярность прямых и плоскостей (урок применения, обобщения и систематизации знаний и способов деятельности) Тест №3, индивидуальное задание</p>	<p>Выделить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) пары объектов в пространстве, между которыми устанавливается отношение перпендикулярности, и охарактеризовать это отношение 4) приемы доказательства перпендикулярности двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей 5) типы задач на вычисление и способы их решения 	<p>Знает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 4) определения, признаки, свойства любой пары объектов 5) способы доказательства перпендикулярности двух прямых 6) способы доказательства перпендикулярности прямой и плоскости 7) способы доказательства перпендикулярности двух плоскостей 8) обобщенный план решения задач на нахождение углов и расстояний в пространстве <p>Умеет:</p> <ol style="list-style-type: none"> 2) доказывать перпендикулярность двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей 3) находить расстояние и углы между различными парами объектов <p>Осознает:</p> <ol style="list-style-type: none"> 3) природу происхождения темы 4) роль аналогии и обобщения в получении новых знаний 5) значимость темы
<p>17. Итоговый зачет (урок контроля и коррекции знаний и способов деятельности)</p>	<p>Выявить:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) степень усвоения теорем-свойств и признаков изучаемых объектов и способов их доказательства 2) степень усвоения определений перпендикулярных прямых, перпендикулярности прямой и плоскости 3) сформированность умений применять теоретические знания к решению дидактических задач 	<p>Понимает уровень усвоения материала и уровень собственных умений</p>