

16. Запишите каноническое уравнение параболы, симметричной относительно осей Ox и Oy .
17. Запишите координаты фокуса и уравнение директрисы параболы.
18. Как построить параболу по ее каноническому уравнению?
19. Запишите общее уравнение кривой второго порядка в случае, когда коэффициент уравнения B равен нулю.
20. В каком случае уравнение $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ определяет эллипс? гиперболу? параболу?

12.3.

ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА» (ЗАДАЧИ 1–6)

Задача 1.

1. Составить каноническое уравнение эллипса (в нечетных вариантах) или гиперболы (в четных вариантах) с полуосями a и b (в вариантах 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26 и 30 действительная полуось a , мнимая — b , в вариантах 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 — наоборот) по данным таблицы, выписать координаты фокусов.

2. Составить каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $(0; 0)$ с заданными параметром p и осью симметрии по данным таблицы, выписать координаты фокуса и уравнение директрисы.

Данные к задаче 1

Вариант	Данные				Вариант	Данные			
	a	b	p	Ось симметрии		a	b	p	Ось симметрии
1	3	1	5,5	Ox	2	6	5	3,5	Oy
3	7	4	-5	Oy	4	2	1	-4,5	Ox
5	4	3	4	Ox	6	5	2	2,5	Oy
7	7	5	-3	Oy	8	6	1	-0,5	Ox
9	7	7	2	Ox	10	3	2	1,5	Oy
11	4	1	-1	Oy	12	6	6	-3,25	Ox
13	5	4	6	Ox	14	8	5	3,75	Oy
15	7	3	-7	Oy	16	5	5	-0,75	Ox

Продолжение табл.

Вариант	Данные				Вариант	Данные			
	a	b	p	Ось симметрии		a	b	p	Ось симметрии
17	8	3	6,5	Ox	18	3	3	8	Oy
19	5	1	-4,75	Oy	20	7	6	-8,5	Ox
21	4	4	10	Ox	22	8	7	0,25	Oy
23	6	3	-1,25	Oy	24	4	2	-9	Ox
25	7	1	9,5	Ox	26	8	2	2,75	Oy
27	2	2	-1,75	Oy	28	7	2	-4,75	Ox
29	6	2	7,5	Ox	30	5	3	4,25	Oy

Задача 2. Выбрав соответствующий масштаб, построить кривые 2-го порядка, заданные уравнениями, приведенными в таблице.

Данные к задаче 2

Вариант	Уравнения кривых		
1	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$	$25y^2 - x^2 = 1$	$2x^2 = y$
2	$9x^2 + 4y^2 = 1$	$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$	$2y^2 = -x$
3	$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$	$16x^2 - 4y^2 = 1$	$3x^2 = -y$
4	$25x^2 + 9y^2 = 1$	$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$	$3y^2 = x$
5	$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$	$9x^2 - y^2 = 1$	$8x^2 = -y$
6	$16x^2 + y^2 = 1$	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$	$4y^2 = -x$
7	$\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$	$9x^2 - 4y^2 = 1$	$5x^2 = y$
8	$9x^2 + y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$	$2y^2 = x$



Вариант	Уравнения кривых		
9	$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$	$25y^2 - 4x^2 = 1$	$3x^2 = y$
10	$25x^2 + y^2 = 1$	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$	$9y^2 = -x$
11	$25x^2 + 16y^2 = 1$	$x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$	$8x^2 = y$
12	$36x^2 + 9y^2 = 1$	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$	$7y^2 = x$
13	$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$	$4y^2 - x^2 = 1$	$x^2 = -7y$
14	$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$	$16y^2 - 9x^2 = 1$	$8y^2 = x$
15	$9y^2 + 25x^2 = 1$	$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$	$4x^2 = -y$
16	$4x^2 + 9y^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$	$y^2 = -2x$
17	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$	$y^2 - 25x^2 = 1$	$x^2 = 2y$
18	$9x^2 + 25y^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$	$y^2 = 3x$
19	$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$	$4x^2 - 16y^2 = 1$	$x^2 = -3y$
20	$x^2 + 16y^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$	$y^2 = -4x$
21	$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$	$x^2 - 9y^2 = 1$	$x^2 = -8y$
22	$x^2 + 9y^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$	$y^2 = 2x$
23	$x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$	$4x^2 - 9y^2 = 1$	$x^2 = 5y$
24	$x^2 + 25y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$	$y^2 = -9x$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнения кривых		
25	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$	$4x^2 - 25y^2 = 1$	$x^2 = 3y$
26	$9x^2 + 36y^2 = 1$	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$	$y^2 = 7x$
27	$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$	$9y^2 - 16x^2 = 1$	$2x^2 = -y$
28	$16x^2 + 25y^2 = 1$	$\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$	$y^2 = -7x$
29	$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$	$-4x^2 + y^2 = 1$	$7x^2 = -y$
30	$36x^2 + 16y^2 = 1$	$\frac{y^2}{16} - x^2 = 1$	$y^2 = 6x$

Задача 3. Привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду, построить кривые, найти координаты фокусов.

Данные к задаче 3

Вариант	Уравнение кривой	
1	$9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y - 23 = 0$	$x^2 - 8x - y + 15 = 0$
2	$x^2 - y^2 - 2x + 4y - 7 = 0$	$y^2 - 2y + x + 2 = 0$
3	$x^2 + 4y^2 + 4x - 24y + 36 = 0$	$x^2 + 4x - 2y + 6 = 0$
4	$x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$	$y^2 + 2y + 2x - 3 = 0$
5	$16x^2 + y^2 + 96x - 4y - 132 = 0$	$x^2 + 2x + 3y + 7 = 0$
6	$16y^2 - 9x^2 + 18x + 32y - 137 = 0$	$x^2 - 4x - 4y + 8 = 0$
7	$x^2 + 16y^2 - 4x - 32y + 4 = 0$	$y^2 - 6y - 3x + 6 = 0$
8	$16y^2 - x^2 - 2x - 64y + 47 = 0$	$y^2 + 6y + 4x + 17 = 0$
9	$16x^2 + 4y^2 + 128x + 8y + 244 = 0$	$x^2 + 2x + 5y - 4 = 0$
10	$y^2 - x^2 - 10x - 6y - 17 = 0$	$y^2 - 8y - 5x + 11 = 0$
11	$9x^2 + 4y^2 + 18x - 8y - 23 = 0$	$x^2 + 2x - y + 5 = 0$
12	$x^2 - y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$	$y^2 + 2y + x = 0$
13	$x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$	$x^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
14	$x^2 - y^2 - 4x - 4y - 9 = 0$	$y^2 - 4y + 2x + 6 = 0$
15	$16x^2 + y^2 - 64x + 6y + 57 = 0$	$x^2 + 4x + 3y + 7 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнение кривой	
16	$x^2 - y^2 + 2x + 4y - 12 = 0$	$y^2 + 2y - 3x - 2 = 0$
17	$4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y + 64 = 0$	$x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$
18	$16y^2 - x^2 + 4x + 32y - 4 = 0$	$y^2 + 4y + 4x + 16 = 0$
19	$16x^2 + 4y^2 + 32x + 32y + 16 = 0$	$x^2 - 2x + 5y + 6 = 0$
20	$x^2 - y^2 + 10x + 6y + 15 = 0$	$y^2 + 2y - 5x + 21 = 0$
21	$4x^2 + 9y^2 + 8x - 18y - 23 = 0$	$x^2 - 2x - y + 5 = 0$
22	$x^2 - y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$	$y^2 - 2y + x = 0$
23	$4x^2 + y^2 - 24x + 4y + 36 = 0$	$x^2 + 4x + 2y + 2 = 0$
24	$x^2 - y^2 + 2x + 6y - 17 = 0$	$y^2 + 4y - 2x + 2 = 0$
25	$x^2 + 16y^2 - 4x + 96y + 132 = 0$	$x^2 - 4x + 3y + 7 = 0$
26	$x^2 - y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$	$y^2 - 2y - 3x + 4 = 0$
27	$9x^2 + 4y^2 - 72x + 16y + 124 = 0$	$x^2 + 2x + 4y + 9 = 0$
28	$y^2 - 16x^2 + 64x + 2y - 79 = 0$	$y^2 - 4y - 4x - 8 = 0$
29	$4x^2 + 16y^2 + 8x + 128y + 196 = 0$	$x^2 + 2x - 5y - 4 = 0$
30	$x^2 - y^2 + 10x - 6y + 15 = 0$	$y^2 - 2y - 5x + 11 = 0$

Задача 4. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, сделать чертеж, если это возможно.

Данные к задаче 4

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
1	$4x^2 - 16y^2 - 24x - 64y - 28 = 0$	2	$16x^2 + 9y^2 - 96x + 36y + 180 = 0$
3	$4x^2 - 9y^2 - 16x + 36y - 20 = 0$	4	$16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 98 = 0$
5	$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 7 = 0$	6	$4x^2 + 9y^2 + 16x - 72y + 160 = 0$
7	$x^2 - y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$	8	$9x^2 + y^2 - 54x + 2y + 83 = 0$
9	$4y^2 - x^2 + 16y + 10x - 9 = 0$	10	$x^2 + 25y^2 + 6x + 50y + 9 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
11	$4x^2 - 16y^2 + 16x - 96y - 128 = 0$	12	$16x^2 + 9y^2 + 64x - 54y + 145 = 0$
13	$4x^2 - 9y^2 - 16x - 36y - 20 = 0$	14	$16x^2 + 9y^2 - 96x + 18y + 154 = 0$
15	$9x^2 - 4y^2 + 36x + 8y + 32 = 0$	16	$x^2 + 16y^2 - 2x - 64y + 65 = 0$
17	$9y^2 - 16x^2 + 18y + 32x - 7 = 0$	18	$9x^2 + y^2 + 18x - 6y + 18 = 0$
19	$4y^2 - x^2 - 40y - 4x + 96 = 0$	20	$x^2 + 25y^2 + 2x + 100y + 101 = 0$
21	$x^2 - y^2 + 4x - 6y - 5 = 0$	22	$9x^2 + 16y^2 + 36x - 96y + 180 = 0$
23	$9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y + 20 = 0$	24	$9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y + 97 = 0$
25	$4x^2 - 9y^2 + 16x + 18y + 7 = 0$	26	$16x^2 + y^2 - 32x - 4y + 20 = 0$
27	$16y^2 - 9x^2 + 32y + 18x + 7 = 0$	28	$x^2 + 9y^2 + 2x - 54y + 82 = 0$
29	$y^2 - 4x^2 - 10y - 16x + 9 = 0$	30	$25x^2 + y^2 + 50x + 4y + 29 = 0$

Задача 5. Для каждой точки кривой отношение расстояния до точки A к расстоянию до прямой l равно n . Найдите уравнение кривой на плоскости, приведите полученное уравнение к каноническому виду, укажите тип кривой.

Данные к задаче 5

Вариант	Исходные данные			Вариант	Исходные данные		
	A	n	l		A	n	l
1	(0; 1)	2	$x = -3$	2	(1; -1)	$\frac{1}{3}$	$y = 7$
3	(-4; 2)	1	$x = 4$	4	(-2; 1)	3	$x = 6$
5	(3; 3)	$\frac{1}{2}$	$y = 0$	6	(-1; 4)	1	$x = 3$
7	(2; 6)	2	$y = -3$	8	(4; 5)	$\frac{2}{3}$	$y = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Исходные данные			Вариант	Исходные данные		
	A	n	l		A	n	l
9	(-1; 1)	1	$x = -3$	10	(3; 2)	$\frac{3}{2}$	$x = -2$
11	(2; 0)	2	$y = -3$	12	(-1; 4)	$\frac{1}{3}$	$x = 7$
13	(5; -4)	1	$y = 4$	14	(-4; -2)	3	$y = 6$
15	(3; -1)	$\frac{1}{2}$	$x = 0$	16	(-2; -1)	1	$y = 3$
17	(6; -6)	2	$x = -3$	18	(5; 2)	$\frac{2}{3}$	$x = 0$
19	(2; -1)	1	$y = -3$	20	(-2; 3)	$\frac{3}{2}$	$y = -2$
21	(0; -1)	2	$x = 3$	22	(2; 1)	$\frac{1}{3}$	$y = -7$
23	(4; -1)	1	$x = -4$	24	(2; -3)	3	$x = -6$
25	(-5; -3)	$\frac{1}{2}$	$y = 0$	26	(1; 2)	1	$x = -3$
27	(-3; -6)	2	$y = 3$	28	(1; -5)	$\frac{2}{3}$	$y = 0$
29	(1; -2)	1	$x = 3$	30	(-3; 4)	$\frac{3}{2}$	$x = 2$

Задача 6. Исследовать кривую второго порядка и привести ее уравнение к каноническому виду.

Данные к задаче 6

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
1	$x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$	2	$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$
3	$3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$	4	$4xy + 4x - 4y = 0$
5	$x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$	6	$-2x^2 + 2xy - 2y^2 - 6x + 6y + 3 = 0$

Продолжение табл.

Вариант	Уравнение кривой	Вариант	Уравнение кривой
7	$4xy + 4x - 4y + 4 = 0$	8	$-3x^2 + 4xy - 3y^2 - 6x + 4y + 2 = 0$
9	$-4xy + 8x + 8y + 1 = 0$	10	$-2xy - 2x - 2y + 1 = 0$
11	$-x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 2 = 0$	12	$3x^2 - 2xy + 3y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
13	$2x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 8y + 1 = 0$	14	$-4x^2 + 2xy - 4y^2 + 10x - 10y + 1 = 0$
15	$-x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$	16	$4xy + 4x - 4y - 2 = 0$
17	$2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 8y + 1 = 0$	18	$x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$
19	$5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 2y + 1 = 0$	20	$x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$
21	$-4xy - 4x + 4y + 6 = 0$	22	$-x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
23	$3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$	24	$2xy + 2x + 2y - 3 = 0$
25	$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 12x - 4y + 1 = 0$	26	$4x^2 + 2xy + 4y^2 + 10x + 10y + 1 = 0$
27	$4xy + 4x + 4y + 1 = 0$	28	$3x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x + 12y + 1 = 0$
29	$x^2 - 8xy + y^2 - 20x + 20y + 1 = 0$	30	$-x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$

12.4. ТВОРЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

12.4.1.

ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ТВОРЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ

Рассмотрим построение кривой второго порядка в полярной системе координат.

Пример 2.19. Кривая задана уравнением в ПСК

$$\rho = \frac{21}{5 - 2\cos\varphi}.$$

1. Построить график кривой в ПСК по точкам.