

23.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Написать общее уравнение поверхности второго порядка.
2. В каких случаях говорят, что общее уравнение поверхности второго порядка определяет мнимую поверхность?
3. Перечислите основные типы поверхностей второго порядка.
4. Перечислите невырожденные эллиптические поверхности, напишите их канонические уравнения и сделайте схематические чертежи.
5. Перечислите невырожденные гиперболические поверхности, напишите их канонические уравнения и сделайте схематические чертежи.
6. Перечислите невырожденные параболические поверхности, напишите их канонические уравнения и сделайте схематические чертежи.
7. Перечислите вырожденные цилиндрические поверхности, напишите их канонические уравнения.
8. Перечислите вырожденные конические поверхности, напишите их канонические уравнения.
9. Перечислите распадающиеся вырожденные поверхности и напишите их канонические уравнения.
10. Дайте определение и запишите общий вид уравнений поверхностей тел вращения относительно всех трех координатных осей.
11. Запишите канонические уравнения поверхностей вращения второго порядка.
12. Запишите в прямоугольной декартовой системе координат общее уравнение сферы с центром в точке $(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом r .
13. Запишите в прямоугольной декартовой системе координат общее уравнение сферы с центром в начале координат.

23.3. ВАРИАНТЫ ТИПОВОГО РАСЧЕТА «ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

Задача 1. Построить тело, ограниченное данными поверхностями.

1. $x^2 + y^2 = 4; z = -3; z = 2$.

2. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1; z = -2; z = 2$.

3. $\frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1; y = -2; y = 2; x = 2\sqrt{2} (x > 0)$.

4. $x^2 - z^2 = 16; y = 0; y = 3; x = 5 (x > 0)$.

5. $x^2 = -9z; y = 0; y = 2; z = -9.$
6. $x^2 - \frac{z^2}{9} = 1; y = 0; y = 3; x = \sqrt{2} (x > 0).$
7. $y^2 + 4z^2 = 16; x = -1; x = 5.$
8. $x^2 - 4y = 0; z = 0; z = 2; y = 4.$
9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; z = 0; z = 4.$
10. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1; z = 0; z = 3; x = 3\sqrt{2} (x > 0).$
11. $y^2 + 4x^2 = 16; z = 0; z = 3.$
12. $x^2 = 4z; y = 0; y = 3; z = 4.$
13. $x^2 + z^2 = 4; y = -2; y = 3.$
14. $x^2 + y^2 = 9; z = 0; z = 3; x = \sqrt{5} (x > 0).$
15. $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1; z = -2; z = 2.$
16. $y^2 + z^2 = 1; x = 0; x = 4.$
17. $x^2 = 9y; z = 0; z = 2; y = 9.$
18. $y^2 - 4z = 0; x = 0; x = 3; z = 4.$
19. $x^2 + 4z^2 = 16; y = 0; y = 3.$
20. $y^2 - \frac{z^2}{4} = 1; x = 0; x = 4; y = \sqrt{2} (y > 0).$
21. $y^2 = 9z; x = 0; x = 2; z = 9.$
22. $x^2 + y^2 = 9; z = -3; z = 2.$
23. $y^2 = 4z; x = 0; x = 3; z = 4.$
24. $y^2 - x^2 = 9; z = 0; z = 5; y = 5 (y > 0).$
25. $z^2 = 4y; x = 0; z = 3; y = 4.$
26. $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1; z = 0; y = 3; x = \sqrt{2} (x > 0).$
27. $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1; x = 0; x = 4.$
28. $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1; y = 0; y = 5.$
29. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1; z = 0; z = 5; x = 4\sqrt{2} (x > 0).$
30. $x^2 = -4z; y = 0; y = 3; z = -4.$

Задача 2. Построить методом сечений поверхности второго порядка, заданные каноническими уравнениями.

1. а) $2x^2 - y^2 + z^2 = 0;$ б) $4x^2 + y^2 + 9z^2 = 36;$
в) $4y^2 + z^2 = -x.$

2. а) $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{16} = 1$;
в) $x^2 + 2y^2 = 12z$.
3. а) $y^2 + 9z^2 - 4x^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = 1$;
в) $9x^2 + 4z^2 = 36y$.
4. а) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$; б) $\frac{y^2}{4} - x^2 + z^2 = 1$; в) $y^2 + z^2 = 4x$.
5. а) $x^2 + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 0$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$; в) $x^2 + 4z^2 = 4y$.
6. а) $4x^2 + z^2 - y^2 = 0$; б) $4x^2 + 4z^2 + y^2 = 16$;
в) $9x^2 + z^2 = 18y$.
7. а) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$; б) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$; в) $x^2 + \frac{z^2}{2} = y$.
8. а) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} + y^2 = z$.
9. а) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - z^2 = -1$;
в) $x^2 + y^2 = -z$.
10. а) $x^2 + 9z^2 - 4y^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$;
в) $4x^2 + 9y^2 = -36z$.
11. а) $x^2 + \frac{z^2}{4} - y^2 = 0$; б) $x^2 + z^2 - y^2 = 1$; в) $x^2 + \frac{y^2}{2} = z$.
12. а) $y^2 + z^2 - 4x^2 = 0$; б) $y^2 + z^2 - \frac{x^2}{4} = -1$;
в) $y^2 + 9z^2 = 9x$.
13. а) $x^2 + z^2 - 2y^2 = 0$; б) $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36$;
в) $4x^2 + y^2 = z$.
14. а) $y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$; б) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$; в) $y^2 + \frac{z^2}{4} = x$.
15. а) $x^2 - 9y^2 + 4z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{16} = 1$;
в) $2x^2 + y^2 = 12z$.
16. а) $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$; б) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$;
в) $9x^2 + y^2 = z$.
17. а) $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - x^2 = 0$; б) $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$;
в) $x^2 + 4z^2 = 4y$.
18. а) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$; в) $\frac{x^2}{9} + z^2 = y$.
19. а) $y^2 + \frac{z^2}{4} - x^2 = 0$; б) $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = -1$; в) $y^2 + \frac{z^2}{2} = x$.

20. а) $4x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
 б) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$; в) $x^2 + 9z^2 = 18y$.
21. а) $x^2 - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$; б) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$;
 в) $y^2 + 4z^2 = 4x$.
22. а) $-x^2 + 2y^2 + z^2 = 0$; б) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$;
 в) $x^2 + 4y^2 = z$.
23. а) $x^2 + z^2 - 4y^2 = 0$; б) $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = -1$;
 в) $x^2 + 9y^2 = 9z$.
24. а) $x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{4} - y^2 + z^2 = 1$;
 в) $\frac{y^2}{4} + z^2 = x$.
25. а) $x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = -1$;
 в) $9x^2 + y^2 = 9z$.
26. а) $x^2 + 4z^2 - y^2 = 0$; б) $4y^2 + 4z^2 + x^2 = 16$;
 в) $9y^2 + z^2 = 18x$.
27. а) $4x^2 + 9z^2 - y^2 = 0$; б) $\frac{z^2}{9} + \frac{y^2}{16} - x^2 = -1$;
 в) $x^2 + y^2 = z$.
28. а) $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + z^2 = -1$;
 в) $x^2 + 9z^2 = y$.
29. а) $y^2 + 9z^2 - 4x^2 = 0$; б) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1$;
 в) $4x^2 + 9z^2 = 36y$.
30. а) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$; б) $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$;
 в) $x^2 + 9z^2 = 9y$.

Задача 3. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной данным уравнением. Построить эту сферу в декартовой прямоугольной системе координат.

- $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 3 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 + 8y + 14z + 1 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 + 16x = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 9 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 14y + 2z + 41 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y + 4z + 13 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 21 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 + 16x - 16z - 16 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 1 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 12z + 32 = 0$.
- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 21 = 0$.

12. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x = 0$.
13. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y - 5 = 0$.
14. $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$.
15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 2z + 19 = 0$.
16. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 16z - 11 = 0$.
17. $x^2 + y^2 + z^2 + 12y = 0$.
18. $x^2 + y^2 + z^2 + 16x + 16y + 28 = 0$.
19. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 8y - 4z + 27 = 0$.
20. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 21 = 0$.
21. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 25 = 0$.
22. $x^2 + y^2 + z^2 + 14z = 0$.
23. $x^2 + y^2 + z^2 + 12y - 13 = 0$.
24. $x^2 + y^2 + z^2 - 10y + 16 = 0$.
25. $x^2 + y^2 + z^2 - 8z = 0$.
26. $x^2 + y^2 + z^2 + 10x = 0$.
27. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 10y - 2z + 29 = 0$.
28. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 14z + 65 = 0$.
29. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x = 0$.
30. $x^2 + y^2 + z^2 + 12x - 10z + 60 = 0$.

Задача 4. Привести уравнения поверхностей второго порядка к каноническому виду, определить их тип и построить эти поверхности.

1. а) $4x^2 + y^2 - 2z^2 - 12z - 18 = 0$;
 б) $-x^2 + 4y^2 + z^2 + 32y + 68 = 0$;
 в) $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$.
2. а) $9x^2 + 9y^2 - 4z^2 - 54y + 8z + 41 = 0$;
 б) $y^2 + 6y - z = 0$;
 в) $4x^2 + 25y^2 + 100z^2 - 16x - 150y + 800z + 1741 = 0$.
3. а) $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 6y - 4z + 13$;
 б) $y^2 + z^2 + x - 3 = 0$;
 в) $9x^2 - 16y^2 - 18x - 135 = 0$.
4. а) $y^2 + z^2 - 4y - 4z - 1 = 0$;
 б) $-y^2 + z^2 + 2z = 0$;
 в) $12x^2 - y^2 + 3z^2 - 72x + 2y - 12z + 119 = 0$.
5. а) $16x^2 + y^2 + 4z^2 + 96x + 128 = 0$;
 б) $-y^2 + z^2 - 10y - 4z - 25 = 0$;
 в) $2x^2 + y^2 - 8x - 8y - z + 24 = 0$.
6. а) $-x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 16y + 8 = 0$;
 б) $25x^2 + y^2 + 25z^2 + 50x + 8y - 100z + 116 = 0$;

- в) $x^2 + 4z^2 - 4x - 8z - 92 = 0$.
7. а) $x^2 - 4y^2 + 4z^2 - 6x + 24y - 43 = 0$;
б) $x^2 - y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$;
в) $y^2 - 4y - 2z + 4 = 0$.
8. а) $9x^2 - z^2 + 18x = 0$;
б) $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 4z^2 - 6y + 8z + 5 = 0$.
9. а) $9x^2 + 9y^2 + z^2 - 54y - 2z + 73 = 0$;
б) $9x^2 - y^2 + 9z^2 + 36x - 4y + 32 = 0$;
в) $-16x^2 + y^2 - 96x - 10y - 135 = 0$.
10. а) $-9x^2 + 9y^2 + z^2 + 36x + 72y - 2z + 100 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 24x + 2z + 39 = 0$;
в) $x^2 + 4x - z + 2 = 0$.
11. а) $16x^2 + 4y^2 + z^2 - 64x - 32y - 2z + 113 = 0$;
б) $x^2 - 6x - y + 9 = 0$;
в) $9x^2 - 9y^2 + z^2 + 72x + 36y - 2z + 118 = 0$.
12. а) $9x^2 + z^2 - 9y + 18 = 0$;
б) $9x^2 - y^2 + 9z^2 + 36x + 8y + 11 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + z + 25 = 0$.
13. а) $x^2 + z^2 - 2y + 4z + 4$;
б) $4x^2 - y^2 - 16x + 6y + 11 = 0$;
в) $x^2 + 4y^2 + 4z + 8 = 0$.
14. а) $x^2 + 9y^2 - z^2 - 108y + 333 = 0$;
б) $-x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 90y + 36z + 252 = 0$;
в) $25x^2 + 4y^2 + 200x - 32y + 364 = 0$.
15. а) $-9x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 36x - 128y + 220 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + z + 27 = 0$;
в) $x^2 + 6x - 6z - 15 = 0$.
16. а) $9x^2 - 4y^2 + 9z^2 + 32y - 64 = 0$;
б) $-9x^2 + z^2 + 54x - 90 = 0$;
в) $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 16x - 24y - 6z + 27 = 0$.
17. а) $9x^2 + 9y^2 - z^2 - 72x - 90y + 360 = 0$;
б) $x^2 + 4x - z + 3 = 0$;
в) $x^2 + 36y^2 + 9z^2 - 54z + 45 = 0$.
18. а) $-x^2 + 4y^2 + z^2 - 40y + 104 = 0$;
б) $-9x^2 + y^2 + 18x - 8y - 2 = 0$;
в) $x^2 + z^2 + 10x + 2y + 27 = 0$.
19. а) $x^2 + y^2 - z^2 - 8x - 14y + 56 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + z + 4 = 0$;
в) $4y^2 + 9z^2 - 24y - 36z + 36 = 0$.

20. а) $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 24x - 2y - 16z + 51 = 0$;
б) $16x^2 + 4y^2 + z^2 + 32x + 24y + 36 = 0$;
в) $y^2 - 4y + z + 5 = 0$.
21. а) $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y + 36 = 0$;
б) $16x^2 - y^2 + 16z^2 - 96x + 4y + 156 = 0$;
в) $4x^2 - y^2 + z^2 + 16x + 2y + 6z + 24 = 0$.
22. а) $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 16x - 40y + 116 = 0$;
б) $y^2 - 4z^2 + 6y + 24z - 31 = 0$;
в) $36x^2 + y^2 + 36z^2 - 144z + 108 = 0$.
23. а) $x^2 - y^2 + z^2 - 6x - 4z + 12 = 0$;
б) $36x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 216x - 32y + 54z + 433 = 0$;
в) $-y^2 + z^2 - 8y - 2z - 16 = 0$.
24. а) $x^2 + y^2 - z^2 + 4x - 6y + 6z + 5 = 0$;
б) $-4x^2 + z^2 + 16x - 2z - 19 = 0$;
в) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 + 18x - 144y - 8z + 13 = 0$.
25. а) $3x^2 + y^2 + 12x + 8y - 3z + 28 = 0$;
б) $-x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 2x + 250y - 50z + 624 = 0$;
в) $3x^2 - 6x - z + 4 = 0$.
26. а) $9x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 18x + 16y + 8z + 21 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 + z^2 - 16x - 24y - 6z - 3 = 0$;
в) $2y^2 + 8y + z = 0$.
27. а) $2x^2 + 2z^2 + 20x + y + 52 = 0$;
б) $25y^2 + 4z^2 + 200y - 32z + 364 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 18z + 8 = 0$.
28. а) $x^2 + 2y^2 - 6x - 20y + 57 = 0$;
б) $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 16x - 24y - 6z + 39 = 0$;
в) $-4x^2 + 100y^2 + 25z^2 - 40x - 800y + 1500 = 0$.
29. а) $9x^2 + 9y^2 - z^2 - 54x - 126y + 531 = 0$;
б) $4x^2 + 36y^2 + 9z^2 + 32x + 72y - 36z + 100 = 0$;
в) $2x^2 + 4x + y = 0$.
30. а) $x^2 - y^2 + 6x + 8y - 11 = 0$;
б) $9x^2 + 9y^2 + z^2 + 36x + 72y - 2z + 100 = 0$;
в) $-x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 96y - 8z + 132 = 0$.

