

Проект экзаменационных вопросов по «Алгебре и геометрии» за III семестр

1. Определение многочлена n -ой степени от одного неизвестного. Определение равенства двух многочленов. Действия над многочленами. Свойства.
2. Степень суммы и произведения двух многочленов. Произведение ненулевых многочленов.
3. Теорема о том, что любых $f(x)$ и $g(x)$ можно найти, притом единственным образом многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$.
4. Определение делителя многочлена. Теорема о делителе многочлена. Основные свойства делимости многочленов. Определение общего делителя многочленов.
5. Определение взаимно простых многочленов. Определение НОД-а двух и нескольких многочленов. Алгоритм Евклида.
6. Теорема о том, что $\forall f(x), g(x), \exists U(x)$ и $V(x)$ такие, что $f(x)U(x)+g(x)V(x)=d(x)$, где $d(x)=\text{НОД}(f(x), g(x))$. Ее следствие (Утверждение).
7. Определение корня многочлена. Теорема Безу (док) и ее следствие.
8. Схема Горнера.
9. Кратные корни. Теорема о понижении кратности корня при дифференцировании.
10. Основная теорема теории алгебры комплексных чисел.
11. Следствие из основной теоремы теории алгебры комплексных чисел.
12. Формулы Виета.
13. Определение несократимости рациональной дроби. Теорема о представлении всякой рациональной дроби через несократимую дробь.
14. Определение правильной дроби. Теорема о представлении, притом единственным образом, всякой рациональной дроби в виде суммы многочлена и правильной дроби.
15. Определение простейшей правильной дроби. Теорема единственности разложения рациональной дроби в сумму простейших дробей.
16. Вычисление корней многочленов для квадратного уравнения. Формулы Кардано.
17. Определение n -мерного векторного пространства, действия над n -мерными векторами. Свойства действий над n -мерными векторами.
18. Определение подпространства векторного пространства. Определения комплексного векторного пространства и вещественного векторного пространства. Свойства векторных пространств.
19. Определение системы векторов. Линейная зависимость системы векторов.
20. Теорема о том, что произвольный вектор u можно выразить через векторы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Линейная зависимость всей системы векторов. Линейная независимость всякой подсистемы системы векторов.
21. Определение конечного линейного пространства. Определение базы (2 определения). Теорема о изоморфности всякого линейного пространства, обладающего базой из n векторов.
22. Изоморфное соответствие между линейными пространствами, базами. Определение размерности линейного пространства.
23. Теорема о матрице перехода от одной базы к другой базе.
24. Теорема о том, что всякая невырожденная квадратная матрица порядка n с действительными элементами служит матрицей перехода от одной базы к другой базе.
25. Определение линейного подпространства векторного пространства. Размерность суммы двух подпространств.
26. Определение характеристической матрицы. Определение характеристического многочлена, характеристических корней.
27. Теорема о характеристических многочленах подобных матриц.
28. Линейные преобразования линейных пространств. Примеры линейных преобразований линейных пространств.
29. Теорема об однозначном определении линейного преобразования пространства заданием образов базисных векторов.

30. Теорема о существовании и единственности линейного преобразования, переводящего линейно независимые векторы в произвольные.
31. Матрица линейного преобразования. Формула нахождения координат образа вектора при линейном преобразовании.
32. Связь между матрицами линейного преобразования в разных базах.
33. Действия над линейными преобразованиями. Матрицы суммы, произведений линейных преобразований и произведения линейного преобразования на число. Основные выводы.
34. Образы, прообразы линейного подпространства относительно линейного преобразования. Теорема о том, что образы линейных пространств являются линейными пространствами.
35. Область значений и ядро линейного преобразования. Теорема о том, что ядро и область значений линейного преобразования являются линейными подпространствами.
36. Теорема о ядре линейного преобразования.
37. Ранг линейного преобразования. Теорема о ранге произвольного линейного преобразования.
38. Инвариантные пространства. Примеры. Прямая сумма инвариантных подпространств и матрица преобразования в пространстве, разлагающегося в прямую сумму инвариантных подпространств.
39. Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования. Свойства собственных значений и собственных векторов линейного преобразования. Следствие.
40. Теорема о том, что собственными значениями линейного преобразования служат действительные характеристические корни линейного преобразования и только они.
41. Теорема о линейной независимости собственных векторов, относящихся к различным собственным значениям.
42. Необходимое и достаточное условие диагональности матрицы линейного преобразования.
43. Скалярное произведение двух векторов и ее свойства.
44. Определение n -мерного Евклидова пространства. Ортогональность двух векторов.
45. Определение ортогональности системы векторов. Теорема о линейной независимости системы векторов.
46. Процесс ортогонализации.
47. Определение нормированного вектора. Определение ортонормированной базы. Теорема о том, что всякое Евклидово пространство обладает ортонормированными базами.
48. Определение изоморфности двух Евклидовых пространств. Размерность изоморфных Евклидовых пространств.
49. Определение унитарного пространства.
50. Определение ортогонального преобразования. Определение ортогональной матрицы. Свойства ортогональной матрицы.
51. Определение ортогонального преобразования Евклидова пространства. 2 теоремы об ортогональных преобразованиях.
52. Определение симметрического преобразования Евклидова пространства. 2 теоремы об симметрических преобразованиях.
53. Теорема о характеристических корнях симметрического преобразования.
54. Теорема о существовании ортогональной матрицы для любой симметрической матрицы.
55. Теорема о собственных векторах симметрического линейного преобразования, относящихся к различным собственным значениям.
56. Приведение квадратичной формы к главным осям.
57. Пары форм.