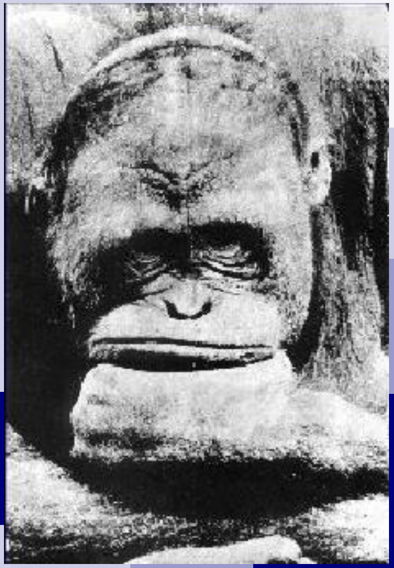
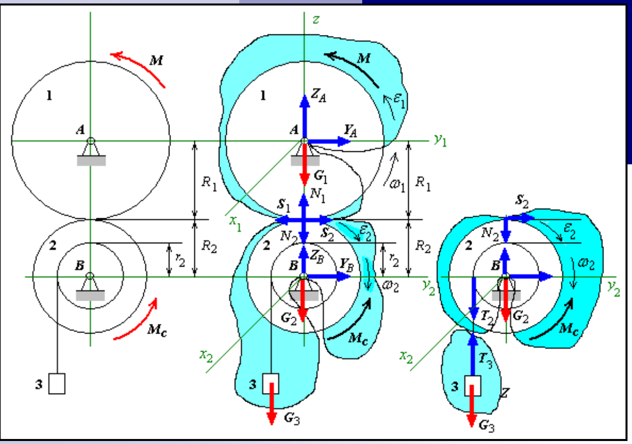
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт



Курс лекций по теоретической механике

Статика



Лекция 2.

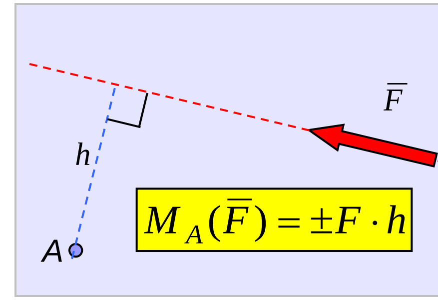
Момент силы относительно центра.
Пара сил. Плоская система сил

Лекция 3

- **Плоская произвольная система сил –** силы лежат в одной плоскости и их линии действия не пересекаются в одной точке.

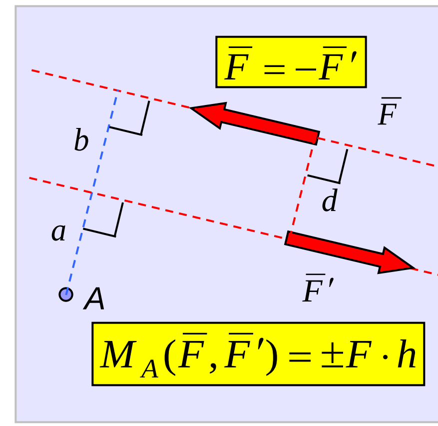
Для рассмотрения такой системы сил необходимо ввести новые понятия:

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.



- **Момент силы относительно точки на плоскости –** алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.
  Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

- **Пара сил –** совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.



- **Момент пары сил на плоскости** (теорема о моменте пары сил) **–** не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.
  Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.

В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$\boxed{M_A(\overline{F}, \overline{F}') = F \cdot (a+b) - F'a = Fb = Fd}$$

- **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар "Теория пар" на сайте МИИТа. Посмотреть…)
- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

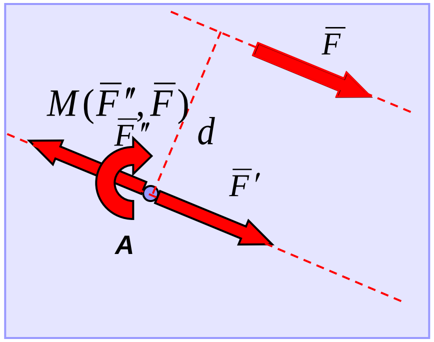
$$\boxed{M(\overline{F}_1, \overline{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\overline{F}_2, \overline{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \;\Rightarrow\; (\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2')}$$

- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$\boxed{M = \sum M_i = 0}$$

Лекция 3 (продолжение – 3.2)

- **Приведение силы к заданному центру (метод Пуансо)** – силу можно перенести параллельно самой себе в любую точку плоскости, если добавить соответствующую пару сил, момент которой равен моменту этой силы относительно рассматриваемой точки.



Добавим к системе в точке *A* две силы, равные по величине между собой и величине заданной силы, направленные по одной прямой в противоположные стороны и параллельные заданной силе:

$$\boxed{\overline{F}'' = -\overline{F}' = -\overline{F}}$$

Кинематическое состояние не изменилось (аксиома о присоединении).

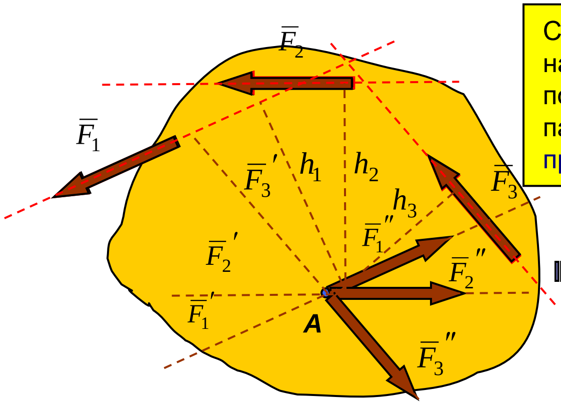
Исходная сила и одна из добавленных сил противоположно направленная образуют пару сил.

Момент этой пары численно равен моменту исходной силы относительно центра приведения.

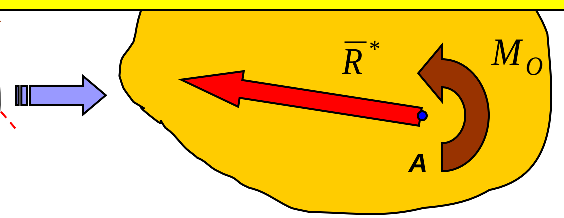
$$\boxed{M(\overline{F}'',\overline{F}) - F \cdot d = -F \cdot h = M_A(\overline{F})}$$

Во многих случаях пару сил удобно изображать дуговой стрелкой.

- **Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру** – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.



Сходящаяся система сил приводится к одной ... называлась равнодействующей, но теперь эт... после приведения возникла система пар. Сис... пар), момент которой равен алгебраической с... приведения.



В общем случае плоская произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i}$ **- главный вектор,**

$\boxed{M = M_A = \sum M_{iA}}$ **- главный момент.**

- **Условием равновесия плоской произвольной системы сил** является одновременное обращение главного вектора и главного момента системы в ноль**:**

$$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i = 0} \qquad \boxed{M = M_A = \sum M_{iA} = 0}$$

- **Уравнения равновесия (I форма)** получаются в виде системы трех уравнений из условий равновесия с использованием выражений для проекций главного вектора:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \\ &\sum Y_i = 0; \\ &\sum M_{iA} = 0 \end{aligned}}$$

Существуют еще две формы уравнений Равновесия (II и III формы):

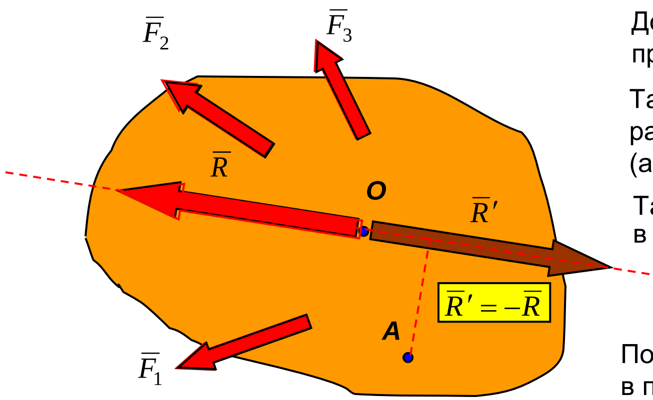
$$\boxed{\begin{aligned} &\sum X_i = 0; \\ &\sum M_{iB} = 0; \\ &\sum M_{iA} = 0 \end{aligned}} \boxed{\begin{aligned} &x \\ &\not\perp \\ &AB \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\sum M_{iC} = 0; \\ &\sum M_{iB} = 0; \\ &\sum M_{iA} = 0 \end{aligned}} \boxed{\begin{aligned} &C \\ &\notin \\ &AB \end{aligned}}$$

Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Следует обратить внимание на то, что II и III формы уравнений равновесия имеют **ограничения**, связанные с выбором одной из осей, например, *x*, и точки *C* относительно положения точек *A* и *B*. Ограничения, накладываемые на выбор оси *x* (**не перпендикулярно *AB***) и точки *C* (**не лежит на AB**), гарантируют, что ни одно из уравнений не обращается в тождество, при выполнении двух других уравнений.

$$\boxed{\begin{matrix}\sum X_i = 0;\\ \sum M_{iB} = 0;\\ \sum M_{iA} = 0\end{matrix}}\ \boxed{x \not\perp AB} \qquad \boxed{\begin{matrix}\sum M_{iC} = 0;\\ \sum M_{iB} = 0;\\ \sum M_{iA} = 0\end{matrix}}\ \boxed{C \notin AB}$$

- **Теорема Вариньона о моменте равнодействующей –** Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.



Доказательство: Пусть система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … приводится к равнодействующей, приложенной в точке *O*.

Такая система не находится в равновесии (***R*** ≠ 0). Уравновесим эту систему силой ***R'***, равной равнодействующей ***R***, направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … и уравновешивающей силы ***R'*** находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

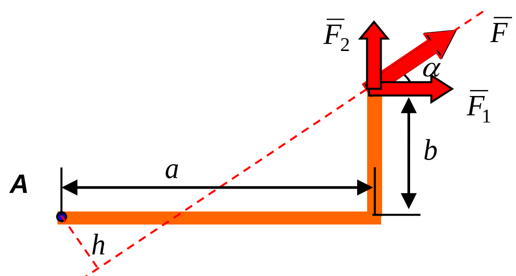
$$\boxed{\sum M_{iA} + M_A(R') = 0}$$

Поскольку сила ***R'***, равна равнодействующей ***R*** и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $M_A(\boldsymbol{R}') = -M_A(\boldsymbol{R})$. Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\boxed{\sum M_{iA} - M_A(R) = 0} \quad \text{или} \quad \boxed{M_A(R) = \sum M_{iA}}$$

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:

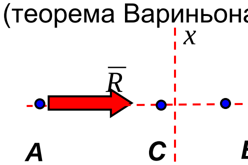


Силу ***F*** разложим на составляющие $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Тогда момент силы ***F*** относительно точки *A* можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F\cos\alpha)b + (F\sin\alpha)a$$

2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия:
Если $\boxed{\sum M_{iA} = 0}$, то система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через точку *A*, т.к. ее момент относительное этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом $\boxed{\sum M_{iB} = 0}$, то равнодействующая должна также проходить через точку *B*.



Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную *AB*, и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на AB, будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.

Лекция 3 (продолжение – 3.4)

- **Плоские фермы** – Геометрически неизменяемые стержневые конструкции, стержни которых лежат в одной плоскости.

Узлы фермы – точки, в которых сходятся оси стержней (*опорные узлы* – узлы, которыми ферма опирается на основание).

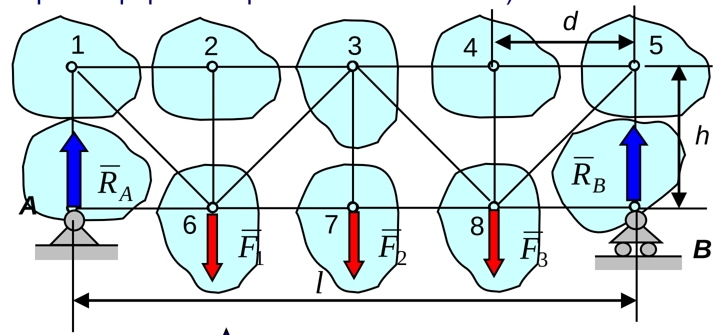
Верхний и нижний пояса – стержни, образующие верхний и нижний контуры.

Стойки – вертикальные стержни.

Раскосы – наклонные стержни.

Пролет фермы – расстояние между опорными узлами (l).

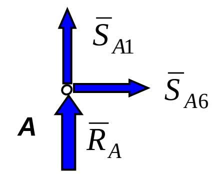
Длина панели – расстояние между стойками (d).



Методы расчета. Для расчета усилий, возникающих в стержнях ферм, используются метод вырезания узлов и метод сквозных сечений (метод Риттера).

Основные допущения, принимаемые при расчете ферм:

1. Все узлы соединения стержней считаются идеальными шарнирами, не препятствующими взаимному повороту стержней. Узлы в металлических фермах, в которых стержни соединяются при помощи фасонных листов и заклепок, также рассматриваются как шарнирные, поскольку при нагрузке они допускают малые упругие деформации (взаимные повороты).
2. Нагрузка приложена в узлах. Для узловой передачи нагрузки на практике используются специальные балочные конструкции.
3. Геометрические размеры фермы не изменяются при нагружении (деформации малы).



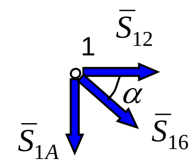
$$\sum X_i = 0; \quad S_{A6} = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \quad S_{A1} + R_A = 0.$$

$$S_{A6} = 0,$$
$$S_{A1} = -R_A$$

- **Метод вырезания узлов** – Последовательно вырезаются узлы фермы так, чтобы в двух уравнениях равновесия для каждого из узлов было не более двух неизвестных усилий. Как правило внешние опорные реакции должны быть предварительно определены.

Порядок расчета:

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и определяем опорные реакции:
2. Нумеруем или обозначаем буквами необозначенные узлы. Реакции стержней (или усилия в них) будем обозначать далее двумя индексными цифрами или буквами – первая из них совпадает с номером (обозначением) вырезаемого узла, а вторая указывает к каком узлу присоединяется другим концом рассматриваемый стержень.
3. Вырезаем узел *A* (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями) $\boldsymbol{S}_{A1}$ и $\boldsymbol{S}_{A6}$.
4. Составляем уравнения равновесия для узла А и вычисляем усилия $\boldsymbol{S}_{A1}$ и $\boldsymbol{S}_{A6}$.
5. Вырезаем узел 1 (в этом узле всего два неизвестных усилия) и заменяем действие разрезанных (отброшенных) узлов усилиями (реакциями) $\boldsymbol{S}_{1A}$, $\boldsymbol{S}_{12}$ и $\boldsymbol{S}_{16}$.
6. Составляем уравнения равновесия для узла 1 и вычисляем усилия $\boldsymbol{S}_{12}$ и $\boldsymbol{S}_{16}$ ($\boldsymbol{S}_{1A}$ и $\boldsymbol{S}_{A1}$ равны алгебраически, поскольку при направлении неизвестных усилий от узла аксиома действия и противодействия выполняется автоматически).



$$\sum X_i = 0; \quad S_{12} + S_{16}\cos\alpha = 0,$$
$$\sum Y_i = 0; \quad S_{1A} - S_{16}\sin\alpha = 0.$$

$$S_{16} = \frac{S_{1A}}{\sin\alpha} = \frac{S_{A1}}{\sin\alpha},$$
$$S_{12} = -S_{16}\cos\alpha = -\frac{S_{A1}}{\sin\alpha}\cos\alpha.$$

Далее процесс вырезания узлов и определения усилий повторяется в определенном порядке, например: 2, 6, 7, 3, 4, 8, 5.

Вырезание последнего узла *B* может служить для контроля правильности расчета.

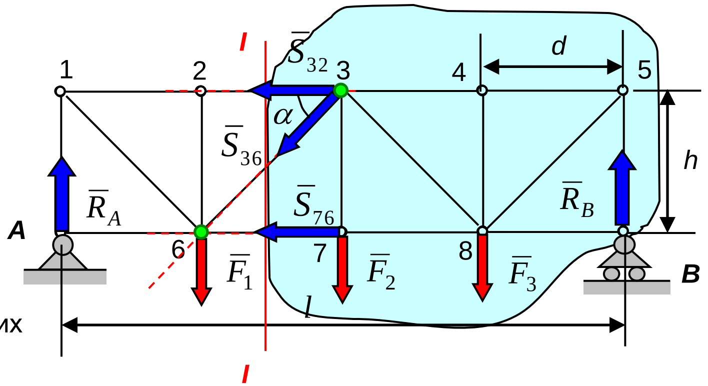
Лекция 3 (продолжение – 3.5)

Метод вырезания узлов для вычисления усилия только в указанном стержне **требует рассмотрения всех узлов и решения для них уравнений равновесия** (по крайней мере узлов, находящихся между одним из опорных узлов и узлом, к которому подходит указанный стержень). Кроме того, последовательное вычисление усилий и подстановка результатов в дальнейший расчет при большом числе узлов чревато накоплением ошибок, не говоря уже о том, допущенная грубая ошибка в одном из узлов делает дальнейшие вычисления неверными.

■ **Метод сквозных сечений (метод Риттера)** в большинстве случаев не требует для вычисления усилия только в указанном стержне составления каких-либо других вспомогательных уравнений равновесия кроме того уравнения, в котором непосредственно участвует искомое усилие.
Метод основывается на составлении **одного уравнения равновесия** с использованием II и III форм уравнений равновесия произвольной плоской системы сил.

Порядок расчета:

1. Выбираем в качестве объекта равновесия ферму в целом и **определяем опорные реакции**:



2. Проводим сквозное сечение, разделяющее ферму на две отдельные части так, чтобы **в сечение попадало не более трех стержней**, в одном из которых требуется найти усилие, например, сечение I-I для определения S_{23}.
3. Выбирая в качестве объекта равновесия одну часть, например, правую, отбрасываем другую (левую) часть.
4. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяем реакциями стержней, попавших в разрез – S_{32}, S_{36} и S_{76}.
5. Для искомого усилия S_{32} **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий S_{36} и S_{76}, не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия S_{32} совпадает с узлом 6.

$$\sum M_{i6}^{\text{прав}} = 0; \quad S_{32}h + R_B 3d - F_3 2d - F_2 d = 0$$

6. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 6) и определяем искомое усилие.

$$S_{32} = \frac{-R_B 3d + F_3 2d + F_2 d}{h}$$

7. Для определения усилия S_{76} **находим положение точки Риттера**, как точки пересечения линий действия двух других усилий S_{36} и S_{32}, не подлежащих определению в данный момент. Точка Риттера для усилия S_{76} совпадает с узлом 3.

$$\sum M_{i3}^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{76}h + R_B 2d - F_3 d = 0$$

8. Составляем **моментное уравнение равновесия** для оставленной (правой) части относительно найденной точки Риттера (узла 3) и определяем искомое усилие.

$$S_{76} = \frac{R_B 2d - F_3 d}{h}$$

7. При определении усилия S_{36} **точка Риттера**, как точка пересечения линий действия двух других усилий S_{76} и S_{32}, не подлежащих определению в данный момент, **уходит в бесконечность**.
В этом случае моментное уравнение равновесия вырождается в уравнение равновесия в проекциях на ось, перпендикулярную линиям, уходящим в бесконечность.

$$\sum Y_i^{\text{прав}} = 0; \quad -S_{36}\sin\alpha + R_B - F_2 - F_3 = 0$$

$$S_{36} = \frac{R_B - F_2 - F_3}{\sin\alpha}$$

Для определения других усилий необходимо провести другое сечение (п.2) и повторить описанные действия (пп. 3,4,….)

Лекция 3 (продолжение – 3.6)

■ **Понятия о линиях влияния опорных реакций и усилий.** Железнодорожные мосты, сооружаемые с использованием таких элементов, как фермы и балочные конструкции, при эксплуатации подвергаются подвижной многоосной нагрузке. При движении поезда усилия в элементах изменяются по некоторому закону и требуется определить наиболее опасные расположения такой нагрузки на сооружении. Исходным аппаратом решения этой задачи являются линии влияния усилий. Линии влияния широко используются в строительной механике.

Линия влияния усилия – график изменения усилия в зависимости от положения **единичной подвижной нагрузки**.

Выражения для усилий в стержнях фермы от постоянной нагрузки содержат величину опорной реакции, например: $\boxed{S_{36} = \dfrac{R_B - F_2 - F_3}{\sin\alpha}}$

В случае рассмотрения единичной подвижной нагрузки (***F***$_1$=***F***$_2$=***F***$_3$=0, ***P***=1) соответствующие выражения будут различными в зависимости от расположения единичной нагрузки:

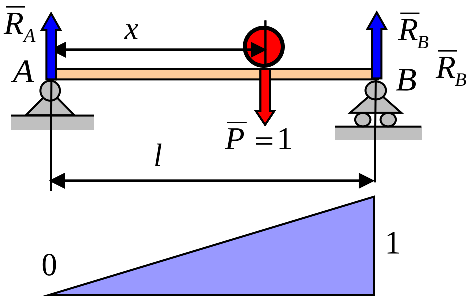
груз находится слева от сечения I-I: $\boxed{S_{36} = \dfrac{R_{B3}}{\sin\alpha}}$ *груз находится справа от сечения* I-I *(на оставленной части фермы)*: $\boxed{S_{36} = \dfrac{R_{B3} - 1}{\sin\alpha}}$

Таким образом, линия влияния усилия ***S***$_{36}$ может быть построена с помощью линии влияния опорной реакции ***R***$_B$:

груз находится слева от сечения I-I: *(левая ветвь)* $\boxed{\text{Л.в.}S_{36} = \dfrac{\text{Л.в.}R_{B3}}{\sin\alpha}}$

груз находится справа от сечения I-I : *(правая ветвь)* $\boxed{\text{Л.в.}S_{36} = \dfrac{\text{Л.в.}R_{B3} - 1}{\sin\alpha}}$

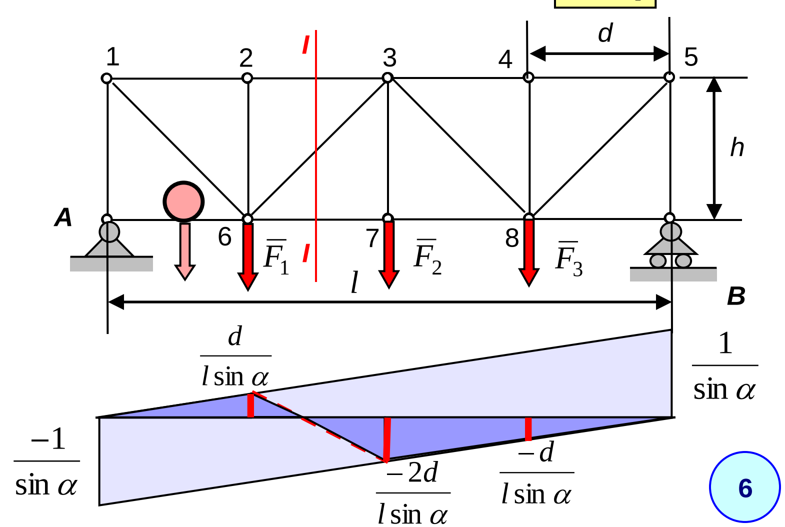
Построение линии влияния опорной реакции – Ферму можно в данном случае представить в виде обычной балки:



1. Отбрасываем связи и заменяем реакциями:

2. Составляем моментное уравнение равновесия и находим величину реакции в функции от координаты положения груза : $\boxed{\sum M_{iA} = 0; \quad R_B l - 1x = 0}$ $\boxed{R_B = \dfrac{x}{l}}$

3. Подставляя значения x = 0 и x = l строим график изменения значения опорной реакции (линию влияния):



Построение линии влияния усилия в стержне *S*$_{36}$:

Построенная линия влияния позволяет легко найти величину усилия от любой статической (постоянной) вертикальной нагрузки как сумму произведений величин сил на значения ординат линии влияния:

$$\boxed{S_{36} = \sum F_i y_i = F_1 \frac{d}{l\sin\alpha} + F_2\left(\frac{-2d}{l\sin\alpha}\right) + F_3\left(\frac{-d}{l\sin\alpha}\right)}$$

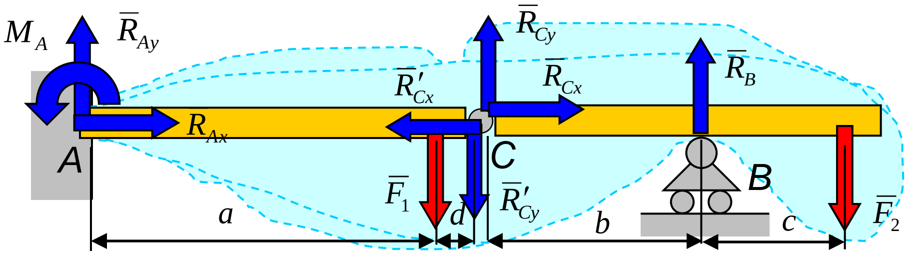
■ **Равновесие сочлененных тел.** Железнодорожные и строительные конструкции могут состоять из сочлененных между собой тел (балок, ферм). Количество наложенных связей может превышать число независимых уравнений равновесия, которые можно составить для рассматриваемой конструкции. Такие задачи являются **статически неопределимыми**. Степень статической неопределимости для плоских систем равна:

$$n = 3Ж + 2Ш + С - 3Д$$

где *Д* – число жестких дисков, *Ж* – число жестких заделок,
Ш – число неподвижных шарниров (опорных и соединяющих диски между собой,
С – число шарнирных стержней (опорных или соединяющих диски между собой) или подвижных шарниров

В теоретической механике возможно решение только статически определимых задач, в которых количество связей равно числу независимых уравнений равновесия (*n* = 0).

$$n = 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = 0$$



1. Выберем в качестве объекта всю конструкцию.
2. Отбросим связи и заменим их действие реакциями.
3. Число неизвестных реакций – 4, а количество независимых уравнений - 3. Это означает, что необходимо **расчленить** конструкцию – отбросить шарнир С и заменить его действие на каждую из частей реакциями.

$$(CB):\ \sum X_i = 0;\quad R_{Cx} = 0;$$
$$\sum M_{Ci} = 0;\ R_B b - F_2(b+c) = 0;$$
$$\sum M_{Bi} = 0;\ \text{-}R_{Cy} b - F_2 b = 0.$$

$$\overline{R}'_{Cx} = -\overline{R}_{Cx},\ \text{но}\ R'_{Cx} = R_{Cx};$$
$$\overline{R}'_{Cy} = -\overline{R}_{Cy},\ \text{но}\ R'_{Cy} = R_{Cy}.$$

$$(AC):\ \sum X_i = 0;\quad R_{Ax} - R'_{Cx} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\quad R_{Ay} - R'_{Cy} - F_1 = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0;\ M_A - R'_{Cy}(a+d) - F_1 a = 0.$$

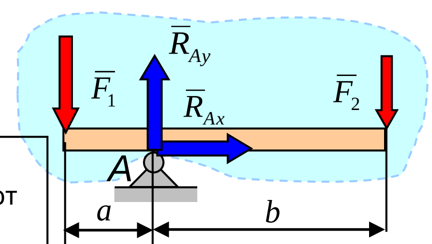
4. Число неизвестных реакций – 8, а количество независимых уравнений равновесия для обоих частей - 3·2 = 6.
С использованием аксиомы действия и противодействия для каждой пары реакций шарнира *С* общее число неизвестных реакций уменьшается до 6 и равно общему числу уравнений равновесия:
5. Решение полученной системы уравнений не представляет особых затруднений в указанном порядке: от *вспомогательной* балки *СВ* (не может оставаться в равновесии без балки АС) к *основной* балке *АС* (может находиться в равновесии без балки СВ).

■ **Равновесие рычага.** Рычаг – твердое тело, имеющее одну неподвижную точку.
Рычаг имеет одну степень кинематической подвижности (*w* = – *n* = 3*Д* – 3*Ж* – 2*Ш* – *С* = = 3·1 – 3·0 – 2·1 – 0 = 1) и в равновесии может быть лишь при определенном соотношении активных сил, действующих на рычаг.

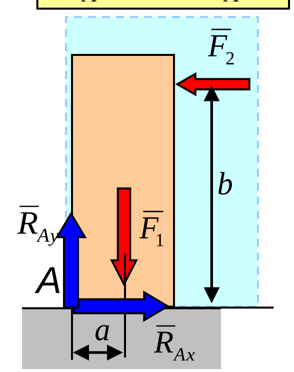
■ **Уравнения равновесия рычага.** Применяя общий подход составления уравнений равновесия к рычагу получаем:

$$\sum X_i = 0;\quad R_{Ax} = 0;$$
$$\sum Y_i = 0;\ R_{Ay} - F_1 - F_2 = 0;$$
$$\sum M_{Ai} = 0;\ F_1 a - F_2 b = 0.$$

Во многих случаях значением опорных реакций не интересуются и искомое соотношение сил определяют из последнего моментного уравнения, которое и принимается за **уравнение равновесия рычага.**



$$M_A^{\text{удерж}} > M_A^{\text{опрок}}$$



Уравнение равновесия рычага используется при **расчете подпорной стенки или груза на опрокидывание**:
Условие устойчивости на опрокидывание: Удерживающий момент относительно неподвижной точки (от $\boldsymbol{F}_1$) должен быть больше опрокидывающего момента (от $\boldsymbol{F}_2$) относительно этой же точки.

Лекция 3 (продолжение – 3.8)

- **Кинематический способ определения реакций и усилий.** Способ основывается на принципе возможных перемещений:

- **Принцип возможных перемещений – Для равновесия материальной системы, подчиненной стационарным, двухсторонним и идеальным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении из предполагаемого положения равновесия равнялось нулю:**

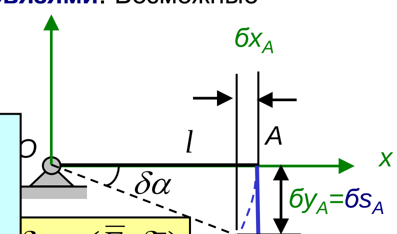
$$\delta A^F = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \delta \overline{r}_k = 0.$$

Стационарные связи – не зависящие от времени.
Двухсторонние связи – препятствующие перемещениям в обоих противоположных направлениях (жесткая заделка, шарнир, стержень являются двухсторонними связями, нить, гладкая поверхность – односторонние связи). Если связь односторонняя, то достаточно просто не рассматривать в качестве возможных перемещений перемещения, соответствующие тому направлению, в котором связь не может удерживать объект, например, в направлении отрыва объекта от гладкой поверхности.
Идеальные связи – работа которых на любом возможном перемещении равна нулю.
Если связь не идеальная, то реакция такой связи должна быть причислена к действующим (активным) силам, например, сила трения шероховатой поверхности добавляется к активным силам.

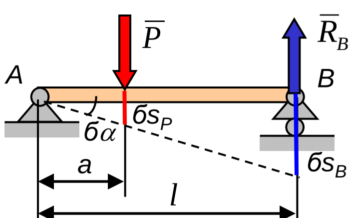
- **Возможные перемещения – бесконечно малые перемещения, допускаемые наложенными на систему связями.** Возможные перемещения не зависят от приложенных к системе сил.
- **Вычисление возможных перемещений: -** в силу малости возможных перемещений при повороте твердого тела любая его точка может рассматриваться движущейся не по дуге, а по перпендикуляру к радиусу вращения в сторону угла поворота:

$$\delta x_A = l - l\,\mathrm{co}\ldots$$

$$\delta y_A = l \sin \delta\ldots$$



- **Возможная работа силы –** элементарная работа силы ... $\delta s \cos(\overline{F}, \delta\overline{r}).$
- **Примеры использования принципа возможных пер...**



Пример 1. Определить реак... балки в правой опоре:
...действительных перемещений.

Без правой опоры балка ... заменим ее реакцией:
к активным силам. Задад... ...цию R_B причисляем

Вычислим возможные перем...
Запишем сумму работ: ...

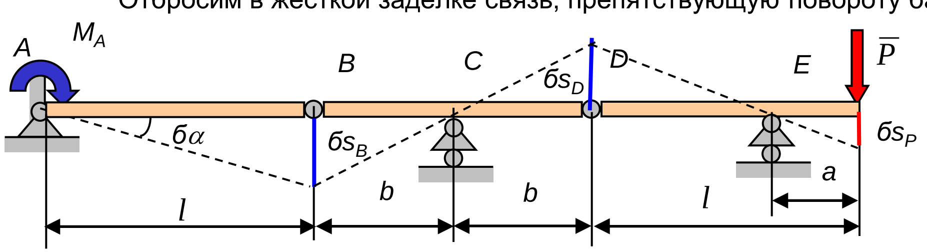
$$R_B = \frac{Pa\delta\alpha}{l\delta\alpha} = \frac{Pa}{l}.$$

Заметим, что
1. для нахождения опорного момента M_A из уравнений статики потребовалось бы решить как минимум три уравнения равновесия;
2. эпюра возможных перемещений пропорциональна линии влияния усилия;
3. если задать возможное перемещение для искомой реакции равным 1, например, $\delta\alpha$ =1, то эпюра перемещений будет полностью тождественна линии влияния поскольку

$$\delta A = M_A \cdot 1 + 1 \cdot \delta s_F(z) = 0; \quad M_A = -\delta s_F(z).$$

Пример 2. Определить опорный момент многопролетной ...

Отбросим в жесткой заделке связь, препятствующую повороту балки, и заменим ее парой сил M_A:



Вычислим возможные перемещения:

$$\delta s_B = l\delta\alpha; \quad \delta s_D = \delta s_B = l\delta\alpha;$$

$$\delta s_F = \frac{a}{l-a}\delta s_D = \frac{a}{l-a} l\delta\alpha.$$

Запишем сумму работ:

$$\delta A = M_A \delta\alpha + F\delta s_F = 0.$$

$$M_A \delta\alpha + F\frac{a}{l-a} l\delta\alpha = 0.$$

$$M_A = -F\frac{a}{l-a} l.$$