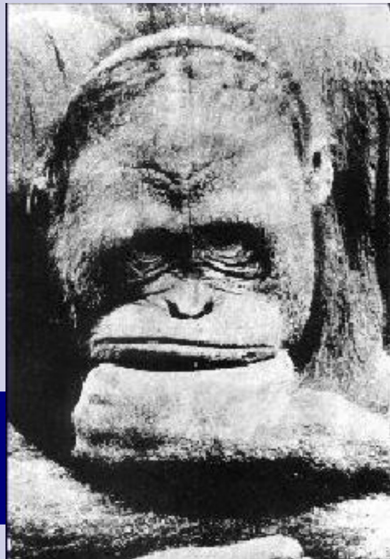


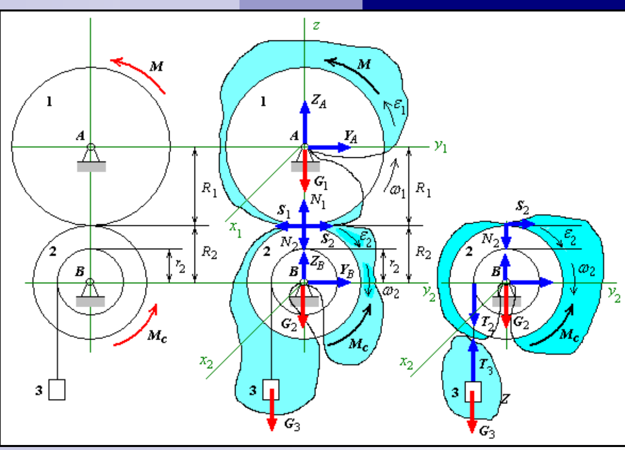
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт

Курс лекций по теоретической механике

Кинематика

Лекция 6.

Кинематика точки. Способы задания движения



Лекция 6

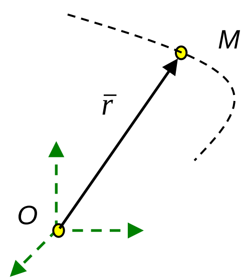
- **Кинематика** – раздел теоретической механики, изучающий механическое движение без учета сил, вызывающих это движение, состоит из двух отделов:

- **Кинематика точки –** изучает движение материальной точки, является базой для изучения движения точек твердого тела.
- Задание движения точки – необходимо иметь возможность определения положения точки в пространстве в любой момент времени (уравнения, геометрия механизма и известный закон движения ведущего звена).
- Траектория движения точки – совокупность положений точки в пространстве при ее движении.

Три способа задания движения точки:

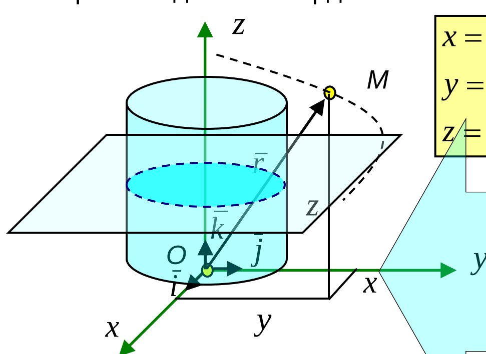
Векторный способ:
Задается величина и направление радиуса-вектора.

$$\bar{r} = \bar{r}(t)$$



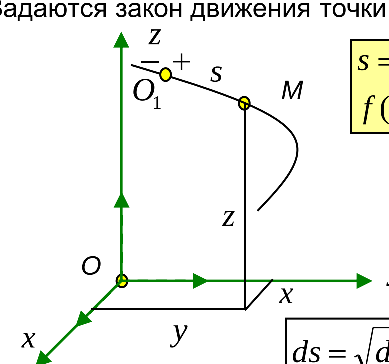
Координатный способ:
Задаются координаты положения точки.

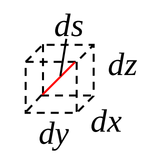
$$x = x(t);\quad y = y(t);\quad z = z(t).$$



Естественный способ:
Задаются закон движения точки и траектория.

$$s = s(t);\quad f(x, y, z) = 0.$$





$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Все три способа задания эквивалентны и связаны между собой:

1. Векторный и координатный – соотношением: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$

2. Координатный и естественный – соотношением: $s(t) = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$

3. Для получения уравнения траектории движения необходимо из уравнений движения координатного способа исключить время, т.к. траектория не зависит от времени:

$$x = x(t) \Rightarrow t = t(x);$$
$$y = y(t) \Rightarrow y[t(x)] = y(x);$$
$$z = z(t) \Rightarrow z[t(x)] = z(x).$$

Последние два уравнения представляют собой уравнения линейчатых поверхностей, линия пересечения которых и есть траектория движения точки.

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x). \end{cases}$$

Например:

$$x = t \Rightarrow t = x$$
$$y = \sqrt{R^2 - t^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = R^2;$$
$$z = c.$$

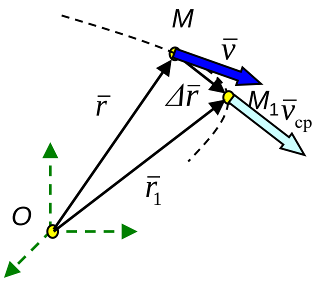
Последние два уравнения представляют собой уравнения цилиндрической поверхности радиуса *R* с образующей, параллельной оси *z*, и плоской поверхности, параллельной координатной плоскости *Oxy* и смещенной по оси *z* на величину *c*. Линия пересечения этих поверхностей (окружность радиуса *R*) - траектория движения точки.

Лекция 6 (продолжение – 9.2)

- **Скорость точки** – величина, характеризующая быстроту изменения положения точки в пространстве.

Три способа задания движения точки определяют способы определения скорости точки:

Векторный способ: Сравним два положения точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:



$$\begin{array}{l} t \qquad\qquad \Rightarrow \bar{r}; \\ t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{r} + \Delta\bar{r}; \end{array}$$

$$\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}_{ср}$$

- вектор средней скорости в интервале времени Δt, направлен по направлению вектора перемещения (хорде MM_1).

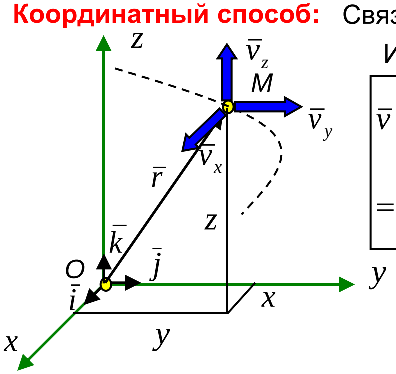
Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \bar{v}$

Предел отношения приращения функции к приращению приращения аргумента есть производная функции (по определению): $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

- **вектор истинной скорости точки в момент времени t**, направлен по касательной к траектории (при приближении M_1 к M хорда занимает положение касательной).

Координатный способ: Связь радиуса-вектора с координатами определяется выражением: $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$



Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}$$

Компоненты (составляющие) вектора скорости:

$$\bar{v}_x = \dot{x}(t)\bar{i};\quad \bar{v}_y = \dot{y}(t)\bar{j};\quad \bar{v}_z = \dot{z}(t)\bar{k}.$$

Проекции скорости на оси координат:

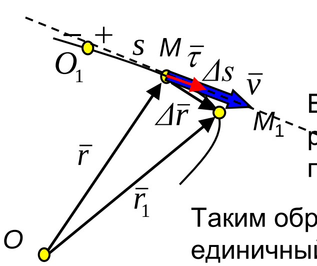
$$v_x = \dot{x};\quad v_y = \dot{y};\quad v_z = \dot{z}.$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};\quad \cos(\bar{v}, x) = \frac{\dot{x}}{v};\quad \cos(\bar{v}, y) = \frac{\dot{y}}{v}.$$

Естественный способ: Представим радиус-вектор как сложную функцию: $\bar{r}(t) = \bar{r}[s(t)]$.

Используем векторную форму определения скорости:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\bar{r}}{ds}\dot{s}.$$



Представим производную радиус-вектора как предел: $\dfrac{d\bar{r}}{ds} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}$.

Вектор приращения радиуса-вектора направлен по хорде MM_1 и в пределе занимает положение касательной.

Величина производной радиуса-вектора по дуговой координате равна 1:

$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta\varphi \to 0}\frac{2\rho\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\rho\Delta\varphi} = 1.$$

При $\Delta s \to 0$ радиус кривизны $\rho_1 \to \rho$, угол между радиусами кривизны $\Delta\varphi \to 0$, числитель - - основание равнобедренного треугольника, знаменатель – длина круговой дуги радиуса ρ.

Таким образом, производная радиуса-вектора по дуговой координате есть единичный вектор, направленный по касательной к траектории.

Вектор скорости равен: $\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau}$. **Проекция скорости на касательную:** $v_\tau = \dot{s}$.

При $\dot{s} > 0$ вектор скорости направлен в сторону увеличения дуговой координаты, В противном случае – в обратную сторону.