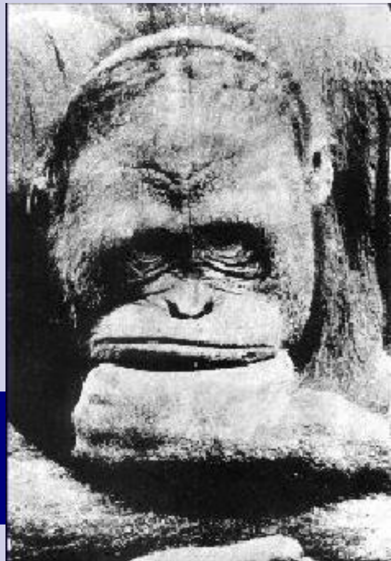
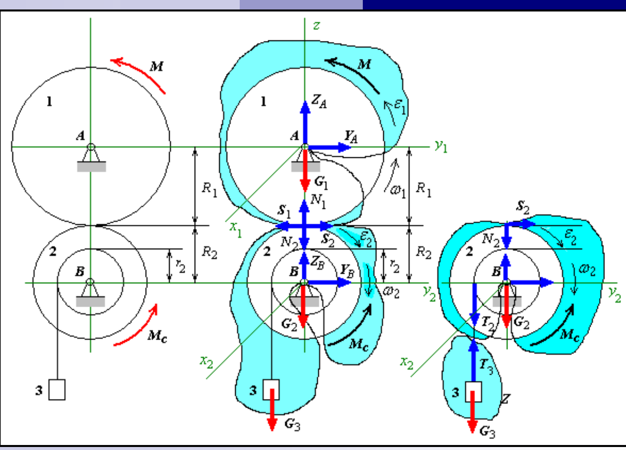


Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт

Курс лекций по теоретической механике

Кинематика



Лекция 7.

Поступательное и вращательное движение.

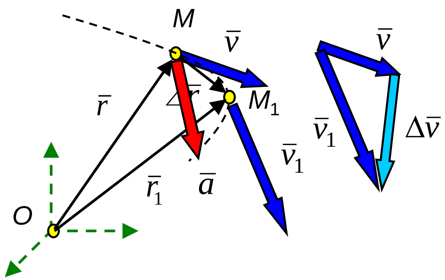
Лекция 7

- **Ускорение точки** – величина, характеризующая быстроту изменения скорости точки.

Три способа задания движения точки определяют способы определения ускорения точки:

Векторный способ: Сравним скорости точки в двух положениях точки в моменты времени t и $t_1 = t + \Delta t$:

$$t \quad \Rightarrow \bar{v}; \qquad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \bar{v}_1 = \bar{v} + \Delta\bar{v};$$



$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a}_{\text{ср}}$$

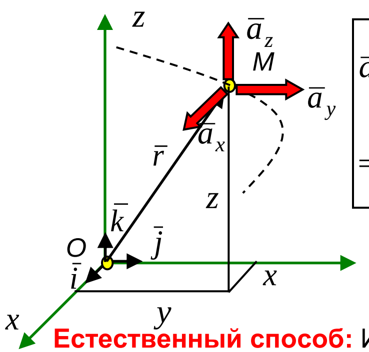
- вектор среднего ускорения в интервале времени Δt, направлен в сторону вогнутости траектории.

Переходя к пределу получаем:
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{a} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

- **вектор истинного ускорения точки в момент времени *t***, *лежит в соприкасающейся плоскости* (предельное положение плоскости, проведенной через касательную в точке M и прямую, параллельную касательной в точке M_1, при стремлении M_1 к M) *и направлен в сторону вогнутости траектории*.

Координатный способ: Используем полученное векторное выражение и связь радиуса-вектора с координатами $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$



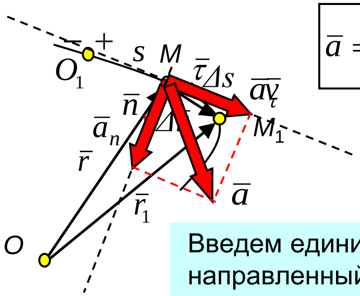
$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}\right] = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:
$$\bar{a}_x = \ddot{x}\bar{i}; \quad \bar{a}_y = \ddot{y}\bar{j}; \quad \bar{a}_z = \ddot{z}\bar{k}.$$

Проекции ускорения на оси координат:
$$a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z}.$$

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}; \quad \cos(\bar{a}, x) = \frac{\ddot{x}}{a}; \quad \cos(\bar{a}, y) = \frac{\ddot{y}}{a}.$$

Естественный способ: Используем векторное выраже



$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{s}\bar{\tau}) = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

Величина производной единичного касательного в
по дуговой координате:

Таким образом **полное ускорение точки есть векторная сумма двух ускорений**: **касательного**, направленного по касательной к траектории в сторону увеличения дуговой координаты, если $\dot{s} > 0$ (в противном случае – в противоположную) и **нормального ускорения**, направленного по нормали к касательной в сторону центра кривизны (вогнутости траектории):
$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

Модуль полного ускорения:
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

касательной к траектории.

Введем единичный вектор ***n***, нормальный (перпендикулярный) к касательной, направленный к центру кривизны.
С использованием вектора ***n*** и ранее определенных величин
ускорение представляется как сумма векторов:
$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.$$

Компоненты (составляющие) вектора ускорения:
$$\bar{a}_\tau = \ddot{s}\bar{\tau}; \quad \bar{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{n}.$$

Проекции ускорения на оси τ и n:
$$a_{\tau\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}.$$

Лекция 7 (продолжение 7.2)

- **Равнопеременное движение точки** – движение точки по траектории, при котором касательное ускорение не изменяется по величине.

$\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s} = const.}$ Запишем выражение для касательного ускорения через проекцию скорости: $a_{\tau\tau} = \ddot{s} = \frac{d}{dt}\dot{s} = \frac{dv_\tau}{dt}$

Полученное выражение есть дифференциальное уравнение, которое легко решается разделением переменных и интегрированием левой и правой частей:

$$dv_\tau = a_{\tau\tau}dt \qquad \int_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} dv_\tau = a_{\tau\tau}\int_0^t dt; \qquad v_\tau\Big|_{v_{\tau 0}}^{v_\tau} = a_{\tau\tau}t\Big|_0^t; \qquad v_\tau - v_{\tau 0} = a_{\tau\tau}t \qquad \boxed{v_\tau = v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t}$$

-скорость точки при равнопеременном движении

В свою очередь скорость точки также связывается с дуговой координатой дифференциальной зависимостью: $v_\tau = \frac{ds}{dt}$ или $ds = v_\tau dt.$

После подстановки выражения для скорости и интегрирования получаем :

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_{\tau 0} + a_{\tau\tau}t)dt; \qquad s\Big|_{s_0}^{s} = (v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2})\Big|_0^t; \qquad s - s_0 = v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}. \qquad \boxed{s = s_0 + v_{\tau 0}t + a_{\tau\tau}\frac{t^2}{2}}$$

- дуговая координата точки при равнопеременном движении

- **Классификация движений точки**.

№ пп	$\bar{a}_\tau$	$\bar{a}_n$	Вид движения: Закон движения	Вид движения: Траектория
1	= 0 $[t, t_1]$	= 0 $[t, t_1]$	равномерное (v = const)	прямолинейное ($\rho = \infty$)
2	= 0 $[t, t_1]$	≠ 0 $[t, t_1]$	равномерное (v = const)	криволинейное ($\rho \neq \infty$)
2.1	= 0 в момент времени t	= 0 $[t, t_1]$	неравномерное ($v \neq$ const), в момент времени t $v = max$	прямолинейное ($\rho = \infty$)
2.2		≠ 0 $[t, t_1]$		криволинейное ($\rho \neq \infty$)
3	≠ 0 $[t, t_1]$	= 0 $[t, t_1]$	неравномерное ($v \neq$ const)	прямолинейное ($\rho = \infty$)
3.1		= 0 в момент времени t	перемена направления движения (v = 0 при t=t)	любая траектория
3.2			неравномерное ($v \neq$ const)	перегиб траектории ($\rho = \infty$ при t=t)
4	≠ 0 $[t, t_1]$	≠ 0 $[t, t_1]$	неравномерное ($v \neq$ const)	криволинейное ($\rho \neq \infty$)
5	= const $[t, t_1]$	любое	равнопеременное	любая траектория

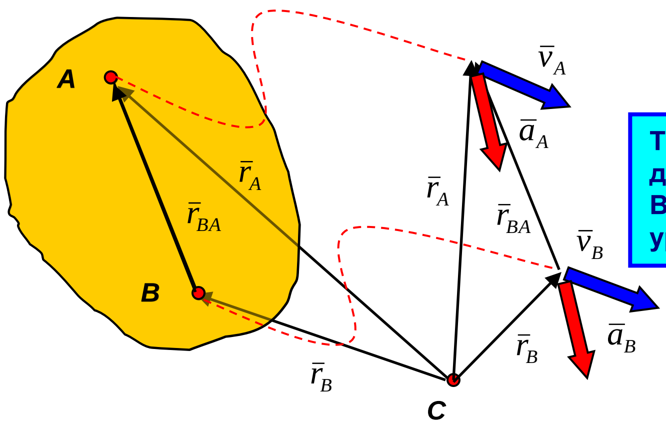
Лекция 7 (продолжение 7.3)

- **Исследование работы кривошипно-шатунного механизма** – См. решение задачи М.12.18 “Теоретическая механика в примерах и задачах. Кинематика” (электронное пособие автора www.miit.ru/institut/ipss/faculties/trm/main.htm),
- **Кинематика твердого тела** – изучает движение твердого тела, кинематика точки используется для получения новых зависимостей и формул.

Существует пять видов движения твердого тела:

1. Поступательное (ползун, поршень насоса, спарник колес паровоза, движущегося по прямолинейному пути, кабина лифта, дверь купе, кабина колеса обозрения).
2. Вращательное (маховик, кривошип, коромысло, колесо обозрения, обычная дверь).
3. Плоскопараллельное или плоское (шатун, колесо локомотива при качении по прямолинейному рельсу, шлифовальный круг).
4. Сферическое (гироскоп, шаровая стойка).
5. Общий случай движения или свободный полет (пуля, камень, небесное тело)

- **Поступательное движение твердого тела** – такое движение при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе. Обычно поступательное движение отождествляется с прямолинейным движением его точек, однако это не так. Точки и само тело (центр масс тела) могут двигаться по криволинейным траекториям, см. например, движение кабины колеса обозрения.
- **Теорема о поступательном движении твердого тела** – **При поступательном движении твердого тела все его точки описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени геометрически равные скорости и ускорения**.



Проведем радиус-векторы к двум точкам *A* и *B*, а также соединим эти точки вектором $\boldsymbol{r}_{BA}$.

В любой момент времени выполняется векторное равенство: $\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \bar{r}_{BA}$.

В любой момент времени вектор $\boldsymbol{r}_{BA}$ ***остается постоянным по направлению*** (по определению поступательного движения) ***и по величине*** (расстояние между точками не изменяется). Отсюда: $\boxed{\bar{r}_A(t) = \bar{r}_B(t) + \overline{const},}$

Таким образом, поступательное движение твердого тела полностью определяется движением одной точки, принадлежащей этому телу и выбранной произвольным образом. Все параметры движения этой точки (траектория, скорость и ускорение) описываются уравнениями и соотношениями кинематики точки.

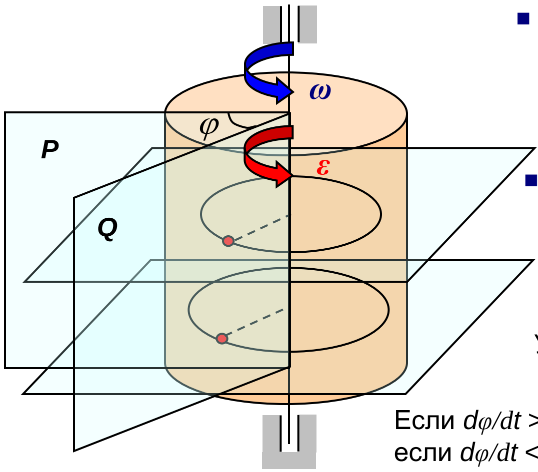
и это означает, что в каждый момент времени **скорость точки *A* равна геометрически** (т.е. векторно) **скорости точки *B*.** $\boxed{\bar{v}_A(t) = \bar{v}_B(t).}$

Второе дифференцирование по времени приводит к соотношению: $\dfrac{d\bar{r}^2{}_A(t)}{dt^2} = \dfrac{d\bar{r}^2{}_B(t)}{dt^2}$

и это означает, что в каждый момент времени **ускорение точки *A* равно геометрически** (т.е. векторно) **ускорению точки *B*.** $\boxed{\bar{a}_A(t) = \bar{a}_B(t).}$

Лекция 7 (продолжение 7.4)

- **Вращательное движение твердого тела** – движение при котором все его точки движутся в плоскостях, перпендикулярных некоторой неподвижной прямой, и описывают окружности с центрами, лежащими на этой прямой, называемой **осью вращения**.



- **Задание вращательное движения** – движение задается законом изменения двугранного угла φ (угла поворота), образованного неподвижной плоскостью *P*, проходящей через ось вращения, и плоскостью *Q*, жестко связанной с телом:

$\varphi = \varphi(t)$ **- уравнение вращательного движения**

- **Угловая скорость** – величина, характеризующая быстроту изменения угла поворота.

$$t \Rightarrow \varphi; \quad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi;$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{\text{ср}}$$ - средняя угловая скорость в интервале времени Δt,

Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega$ $\quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ **- истинная угловая скорость в момент времени *t***

Если $d\varphi/dt > 0$, то вращение происходит в сторону увеличения угла поворота, если $d\varphi/dt < 0$, то вращение происходит в сторону уменьшения угла поворота.

Угловая скорость изображается дуговой стрелкой в сторону вращения.

- **Угловое ускорение** – величина, характеризующая быстроту изменения угловой скорости.

$$t \Rightarrow \omega; \quad t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \omega_1 = \omega + \Delta\omega;$$

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon_{\text{ср}}$$ - среднее угловое ускорение в интервале времени Δt,

Устремим $\Delta t \to 0$ и перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon$ $\quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ **- истинное угловое ускорение в момент времени *t***

Угловое ускорение изображается дуговой стрелкой в сторону увеличения угла поворота при $\ddot{\varphi} > 0$ **.**

Если $d^2\varphi/dt^2$ и $d\varphi/dt$ одного знака, то скорость увеличивается по модулю и вращение называется ускоренным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в одну сторону),
если $d^2\varphi/dt^2$ и $d\varphi/dt$ разного знака, то скорость уменьшается по модулю и вращение называется замедленным (дуговые стрелки угловой скорости и углового ускорения направлены в противоположные стороны).

- **Равномерное вращение** – угловая скорость не изменяется по величине. $\omega = const.$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt; \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

- **Равнопеременное вращение** – угловое ускорение не изменяется по величине.

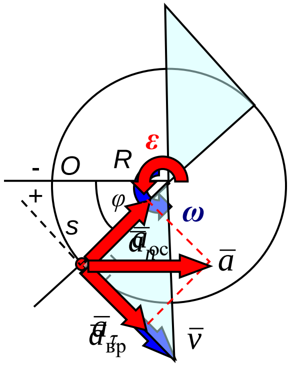
$\varepsilon = const.$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}; \quad \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt; \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t (\omega_0 + \varepsilon t) dt; \qquad \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Лекция 7 (продолжение 7.5)

- **Скорость точки при вращательном движении твердого тела –** траектория точки известна (окружность радиуса R – расстояние точки до оси вращения), можно применить формулу для определения скорости точки при естественном задании движения: $\boxed{v_\tau = \dot{s}.}$



Дуговая координата связана с радиусом окружности: $\boxed{s = \varphi R.}$ Тогда проекция скорости на касательную к окружности: $v_\tau = \dfrac{d}{dt}(\varphi R) = \dfrac{d\varphi}{dt}R = \omega R.$

Поскольку далее работают с модулем угловой скорости после изображения ее в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для модуля скорости: $\boxed{v = \omega \cdot R}$ и вектор скорости направляют **перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки угловой скорости**.

Как следует из формулы **скорость точки пропорциональна расстоянию ее до оси вращения** (радиусу вращения).

- **Ускорение точки при вращательном движении твердого тела –** траектория точки известна, можно применить формулы для определения ускорений точки при естественном задании движения: $\boxed{a_{\tau\tau} = \ddot{s}; \quad a_n = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho}.}$

Тогда проекции ускорения на касательную к окружности и нормаль: $a_\tau = \dfrac{d^2}{dt^2}(\varphi R) = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}R = \varepsilon R. \quad a_n = \dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{d}{dt}(\varphi R)\right]^2 = \dfrac{1}{R}\left[\dfrac{d\varphi}{dt}R\right]^2 = \omega^2 R.$

Поскольку далее работают с модулем углового ускорения после изображения его в виде дуговой стрелки расчетной формулой является выражение для касательного ускорения: $\boxed{a_{вр} = \varepsilon \cdot R}$ и вектор этого ускорения, называемого **вращательным ускорением**, направляют **перпендикулярно радиусу в сторону дуговой стрелки углового ускорения**.

Нормальное ускорение теперь называется **осестремительным ускорением** $\boxed{a_{ос} = \omega^2 \cdot R}$, его нап
независимо от направления дуговой стрелки угловой скорости, не говоря уж о направлении дуговой ст

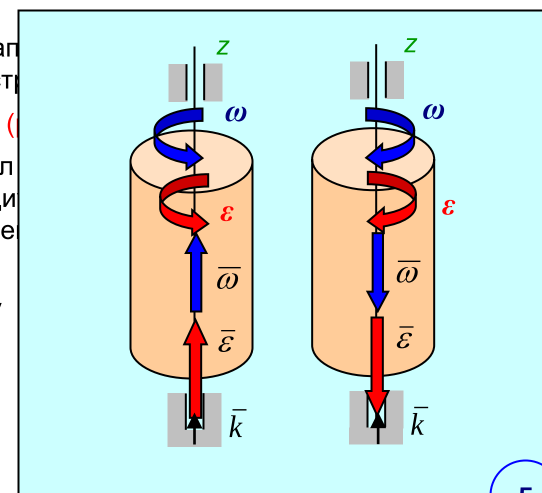
Как следует из формул **оба ускорения точки пропорциональны расстоянию ее до оси вращения** (

Полное ускорение точки, как и ранее, есть **векторная сумма** этих ускорений: $\boxed{\bar{a} = \bar{a}_{вр} + \bar{a}_{ос}.}$ Угол
ради
раве

- **Скорость и ускорения точки при вращательном движении как векторные произведения.**

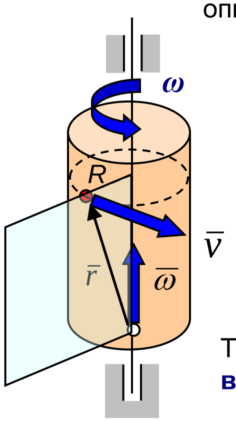
Представим угловую скорость и угловое ускорения как векторы, направленные по оси вращения в ту сторону, откуда дуговые стрелки этих величин указывают вращение против часовой стрелки.

Положительное направление оси z можно задать с помощью единичного вектора k, тогда векторы угловой скорости и углового ускорения можно представить как: $\boxed{\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}}$ $\boxed{\bar{\varepsilon} = \varepsilon_z \bar{k}}$
где ω_z, ε_z – проекции соответствующих векторов на ось z.

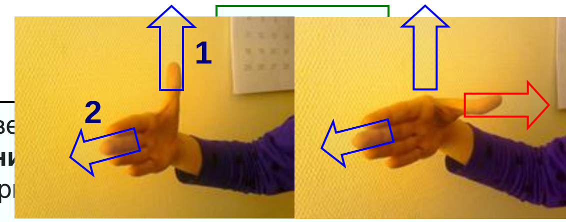


Лекция 7 (продолжение 7.6)

- **Скорость точки при вращательном движении как векторное произведение –** определяется выражением $\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$, которое описывает и величину, и направление скорости.



Величина (модуль) этого векторного произведения: …разом: $\boxed{v = \omega \cdot R.}$

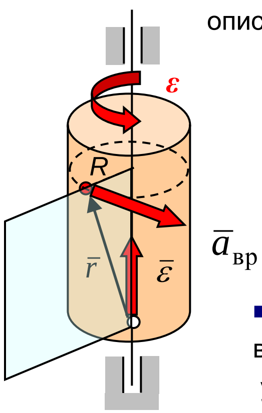


Направление вектора рассматриваемого ве… **по определению векторного произведени…** …ой через умножаемые вектора, направлен в ту сторону, откуда поворот пер… …кажется происходящим против часовой стрелки;

по правилу правой руки – при совмещении большого пальца с **первым вектором**, остальных – со **вторым вектором**, поворот большого пальца перпендикулярно ладони указывает на **направление вектора векторного произведения**.

Таким образом, действительно **векторное произведение угловой скорости и радиус-вектора полностью определяет величину и направление скорости точки при вращательном движении** в соответствии с ранее полученными результатами.

- **Вращательное ускорение точки как векторное произведение –** определяется выражением $\boxed{\vec{a}_{вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}}$, которое описывает и величину, и направление вращательного ускорения.



Величина (модуль) этого векторного произведения: $|\vec{a}_{вр}| = |\vec{\varepsilon}| \cdot |\vec{r}| \sin(\vec{\varepsilon}, \vec{r}).$ Таким образом: $\boxed{a_{вр} = \varepsilon \cdot R.}$

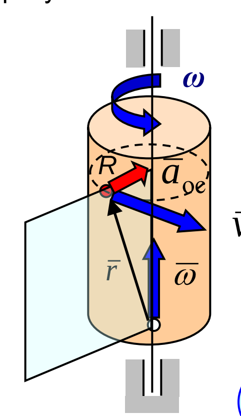
R

Направление вектора рассматриваемого векторного произведения можно установить **по определению векторного произведения** или **по правилу правой руки**.

Таким образом, действительно **векторное произведение углового ускорения и радиус-вектора полностью определяет величину и направление вращательного ускорения точки** в соответствии с ранее полученными результатами.

- **Осестремительное ускорение точки как векторное произведение –** определяется выражением $\boxed{\vec{a}_{ос} = \vec{\omega} \times \vec{v}}$, которое описывает и величину, и направление осестремительного ускорения.

Величина (модуль) этого векторного произведения: $|\vec{a}_{ос}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \sin(\vec{\omega}, \vec{v}).$ Таким образом: $\boxed{v = \omega \cdot v = \omega(\omega \cdot R) = \omega^2 R.}$



Направление вектора рассматриваемого векторного произведения можно установить **по определению векторного произведения** или **по правилу правой руки**.

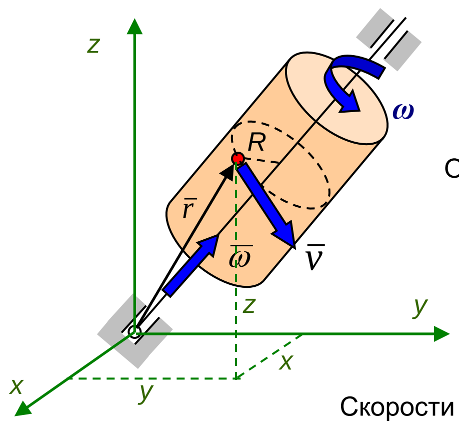
1, т.к. вектор скорости точки перпендикулярен плоскости, в которой лежит вектор угловой скорости.

Таким образом, действительно **векторное произведение угловой скорости и вектора скорости точки полностью определяет величину и направление осестремительного ускорения точки** в соответствии с ранее полученными результатами.

Это векторное произведение может быть также записано в виде: $\boxed{\vec{a}_{ос} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}$

Лекция 7 (продолжение 7.7)

- **Формулы Эйлера –** с помощью раскрытия векторного произведения для скорости точки можно получить общие аналитические выражения для этой скорости через координаты рассматриваемой точки при произвольном расположении оси вращения в пространстве:

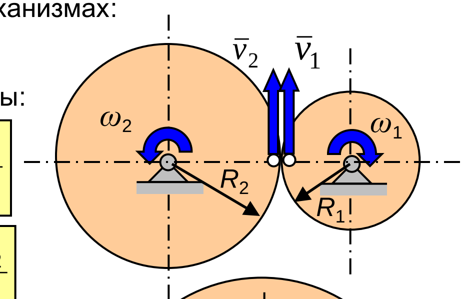


$$\bar{v}=\bar{\omega}\times\bar{r}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix}=(\omega_y z-\omega_z y)\bar{i}+(\omega_z x-\omega_x z)\bar{j}+(\omega_x y-\omega_y x)\bar{k}$$

Отсюда получаются аналитические формулы для проекций скоростей точки:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \omega_y z-\omega_z y;\\ v_y &= \omega_z x-\omega_x z;\\ v_z &= \omega_x y-\omega_y x.\end{aligned}}$$

- **Преобразования вращательных движений –** изменение величины и направление угловых скоростей вращающихся звеньев в различных передаточных механизмах:
- **Фрикционное зацепление**:



Скорости входящих в контакт точек колес при отсутствии проскальзывания равны:

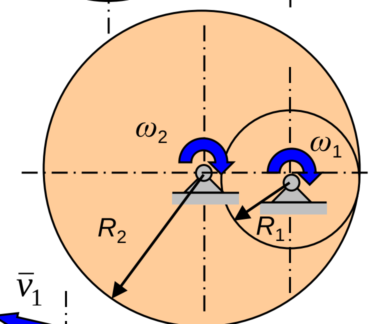
$v_1=v_2;\quad \omega_1 R_1=\omega_2 R_2.$ Отсюда: $\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{R_2}{R_1}}$

Передаточное число, характеризующее изменение скорости вращения при передаче вращения от одного звена к другому – **отношение угловой скорости ведущего колеса к угловой скорости ведомого**:

$$\boxed{i_{1-2}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{R_2}{R_1}}$$

- **Зубчатое зацепление –** число зубьев каждого из колес прямо пропорционально радиусу колеса. Окружные скорости входящих в контакт точек поверхностей зубьев по-прежнему равны.

Полученные соотношения остаются справедливыми, в том числе и для случая внутреннего зацепления.



Радиусы делительных окружностей связаны с шагом зубьев соотношениями: $\boxed{2\pi R_1=z_1 h}$ $\boxed{2\pi R_2=z_2 h}$

С использованием чисел зубьев каждого из колес имеем: $\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{z_2}{z_1}}$

- **Ременная и цепная передачи –**. Окружные скорости входящих в контакт с ремнем или цепью точек поверхностей обоих колес или зубьев этих колес по-прежнему равны (ремень или цепь не растягиваются и не сжимаются).

Полученные соотношения остаются справедливыми.

$\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{R_2}{R_1}}$ $\boxed{\dfrac{\omega_1}{\omega_2}=\dfrac{z_2}{z_1}}$