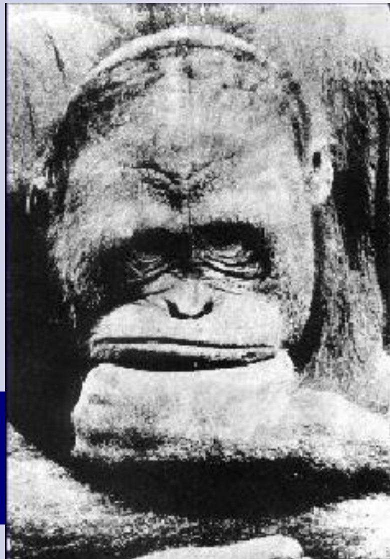
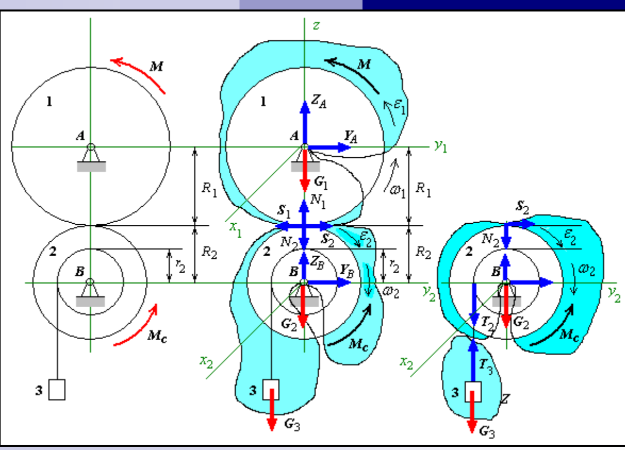
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт



Курс лекций по теоретической механике

Кинематика



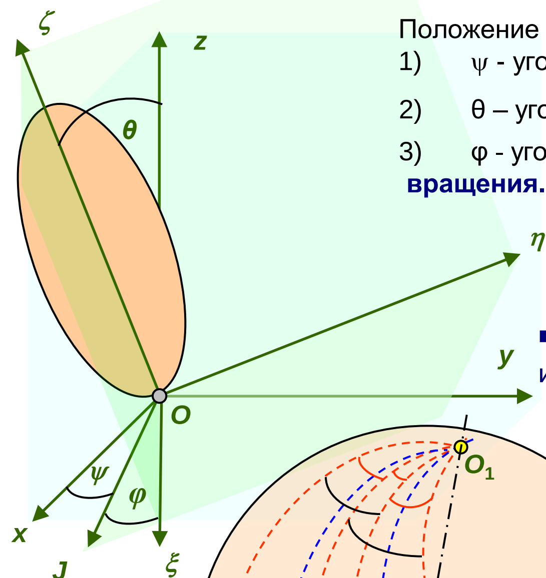
Лекция 9.

Движение твердого тела вокруг неподвижной точки

Лекция 9

- **Сферическое движение твердого тела –** одна из точек тела остается неподвижной во время движения. Остальные точки движутся по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой.
- **Углы Эйлера** – используются для описания сферического движения твердого тела посредством ввода двух системы координат:

Oxyz – неподвижная система координат с началом в неподвижной точке,
Oξηζ - подвижная система координат, жестко связанная с телом, с началом в той же точке.



Положение подвижной системы координат может быть однозначно задано тремя углами:
1) ψ - угол поворота системы Oξηζ вокруг оси z – **угол прецессии**;

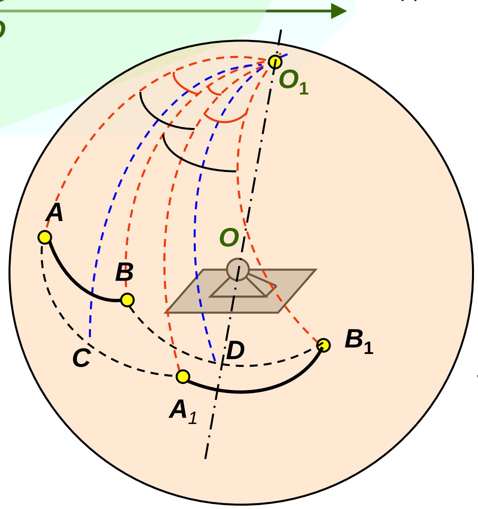
2) θ – угол поворота системы Oξηζ вокруг нового положения горизонтальной оси x (*OJ*) – **угол нутации**;

3) φ - угол поворота системы Oξηζ вокруг нового положения вертикальной оси z (*O*ζ) – **угол собственного вращения.**

Уравнения сферического движения твердого тела:

$$\boxed{\begin{aligned}\psi &= \psi(t);\\ \theta &= \theta(t);\\ \varphi &= \varphi(t).\end{aligned}}$$

- **Теорема Эйлера –** Твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, можно переместить из одного положения в другое одним поворотом вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку.



Рассмотрим дугу большого круга AB, находящейся на сферической поверхности. **Дуга большого круга** – дуга наименьшей кривизны на поверхности (часть окружности, полученной сечением плоскости, проходящей через центр). Далее будет подразумеваться, что все дуги есть дуги большого круга.

Пусть $\cup AB$ переместилась в положение $\cup A_1B_1$. Проведем дуги $\cup AA_1$ и $\cup BB_1$.
Из середин *C* и *D* дуг $\cup AA_1$ и $\cup BB_1$ проведем дуги, перпендикулярные к дугам $\cup AA_1$ и $\cup BB_1$.

Точка пересечения дуг $\cup CO_1$ и $\cup DO_1$ является неподвижной и определяет положение оси вращения. Эту точку соединим дугами с концами дуг $\cup AA_1$ и $\cup BB_1$.

Полученные криволинейные треугольники ΔAO_1B и $\Delta A_1O_1B_1$ равны по равенству сторон и углы $\angle AO_1B = \angle A_1O_1B_1$.

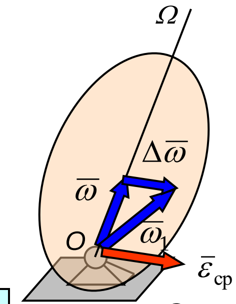
Если к каждому из этих углов добавить один и тот же $\angle BO_1A_1$, то полученные углы $\angle AO_1A_1$ и $\angle BO_1B_1$ будут также равны между собой и будут являться углом поворота всех точек тела вокруг оси OO_1.

Точки *A* и *B* при перемещении в положение A_1, B_1, в общем случае движутся не обязательно по дугам большого круга. За малый промежуток времени Δt переход точек из одного положения в другое происходит поворотом тела вокруг некоторой оси вращения на угол $\Delta\varphi$. При устремлении $\Delta t \to 0$ ось вращения занимает предельное положение и называется **мгновенной осью вращения тела в данный момент**.

Лекция 9 (продолжение 9.2)

- **Угловая скорость сферического движения твердого тела – вектор, направленный вдоль мгновенной оси вращения, модуль которого равен**:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

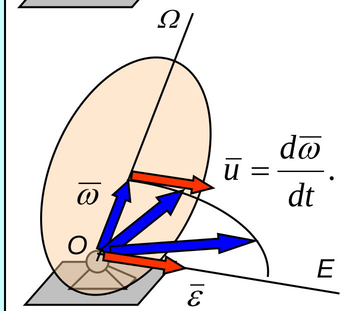


- **Угловое ускорение сферического движения твердого тела** – характеризует изменение вектора угловой скорости:

$$t \Rightarrow \overline{\omega};$$
$$t_1 = t + \Delta t \Rightarrow \overline{\omega}_1 = \overline{\omega} + \Delta\overline{\omega};$$

$$\frac{\Delta\overline{\omega}}{\Delta t} = \overline{\varepsilon}_{\text{ср}}$$

- среднее угловое ускорение в интервале времени Δt,



Модуль вращательного ускорения равен: $a^E_{\text{вр}} = \varepsilon \cdot h^E$, где h^E – длина перпендикуляра, опущенного на ось мгновенного ускорения E.

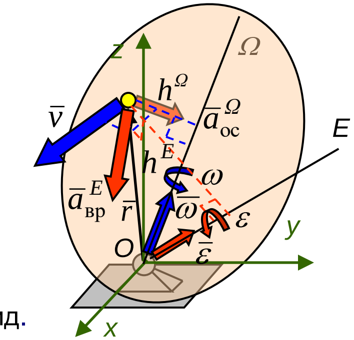
Вектор вращательного ускорения направлен перпендикулярно радиусу вращения (h^E) в сторону дуговой стрелки углового ускорения.

Модуль осестремительного ускорения равен: $a^\Omega_{\text{ос}} = \omega^2 \cdot h^\Omega$, где h^Ω – длина перпендикуляра, опущенного на мгновенную ось вращения Ω.

Вектор осестремительного ускорения направлен по радиусу вращения (h^Ω) к мгновенной оси вращения.

Модуль полного ускорения равен: $a = \sqrt{(a^E_{\text{вр}})^2 + (a^\Omega_{\text{ос}})^2 + 2a^E_{\text{вр}}a^\Omega_{\text{ос}}\cos(\overline{a}^E_{\text{вр}}, \overline{a}^\Omega_{\text{ос}})}$

- **Скорость точки твердого тела при сферическом движении** – определяется как вращательная скорость вокруг мгновенной оси: $\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r}$ $\quad v = \omega \cdot r\sin(\overline{\omega}, \overline{v}) = \omega \cdot h^\Omega.$



$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{matrix} (\omega_y z - \omega_z y)\overline{i} + \\ +(\omega_z x - \omega_x z)\overline{j} + \\ +(\omega_x y - \omega_y x)\overline{k} \end{matrix}$$

Проекции скоростей (формулы Эйлера):

$$v_x = (\omega_y z - \omega_z y);$$
$$v_y = (\omega_z x - \omega_x z);$$
$$v_z = (\omega_x y - \omega_y x).$$

Проекции скоростей на подвижные оси ξ, η, ζ имеют аналогичный вид.

Мгновенная ось вращения в данное мгновение – геометрическое место точек с нулевой скоростью.

Уравнение мгновенной оси получается приравниванием проекций скоростей нулю:

$$v_x = (\omega_y z - \omega_z y) = 0; \quad \omega_y z = \omega_z y;$$
$$v_y = (\omega_z x - \omega_x z) = 0; \quad \omega_z x = \omega_x z;$$
$$v_z = (\omega_x y - \omega_y x) = 0. \quad \omega_x y = \omega_y x.$$

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{x}{\omega_z}.$$

- **Ускорение точки твердого тела при сферическом движении:**

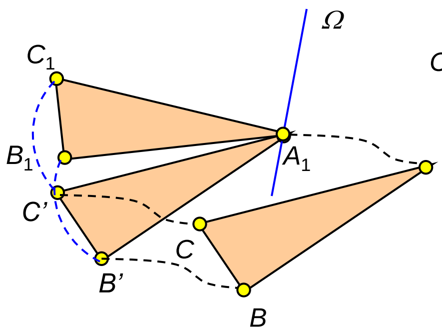
$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overline{\omega} \times \overline{r}) = \frac{d\omega}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{v} = \overline{a}^E_{\text{вр}} + \overline{a}^\Omega_{\text{ос}}.$$

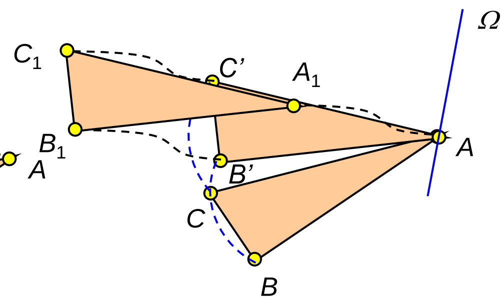
$$\overline{a} = \overline{a}^E_{\text{вр}} + \overline{a}^\Omega_{\text{ос}} \qquad \overline{a}^E_{\text{вр}} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} \qquad \overline{a}^\Omega_{\text{ос}} = \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{r})$$

- **Ускорение точки равно геометрической сумме вращательного ускорения относительно оси мгновенного углового ускорения (E) и осестремительного ускорения относительно мгновенной оси вращения (Ω).**

Лекция 9 (продолжение 9.3)

- **Общий случай движения твердого тела –** Положение тела в пространстве однозначно определяется положением трех его точек, не лежащих на одной прямой. По трем точкам можно построить треугольник, который и будет далее представлять тело в пространстве.
- **Разложение движения свободного твердого тела** – Как и в случае плоского движения существует бесчисленное множество способов представления движения свободного тела в виде совокупности двух, более простых движений. Например, можно перевести тело из исходного положение, обозначенное треугольником ΔABC, в другое положение, соответствующее треугольнику $\Delta A_1B_1C_1$, поступательным перемещением в положение $\Delta A_1B'C'$, а затем поворотом его вокруг некоторой оси, проходящей через точку, выбранной в качестве полюса, например, точку A_1:



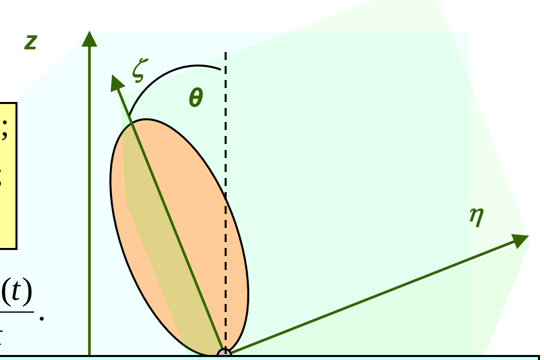


Или, напротив, вначале повернуть треугольник ΔABC вокруг некоторой оси, проходящей через точку, выбранной в качестве полюса, например, точку A, чтобы стороны треугольника ΔABC стали параллельными сторонам треугольника $\Delta A_1B_1C_1$, а затем перевести треугольник $\Delta AB'C$ поступательным движением в положение $\Delta A_1B_1C_1$:

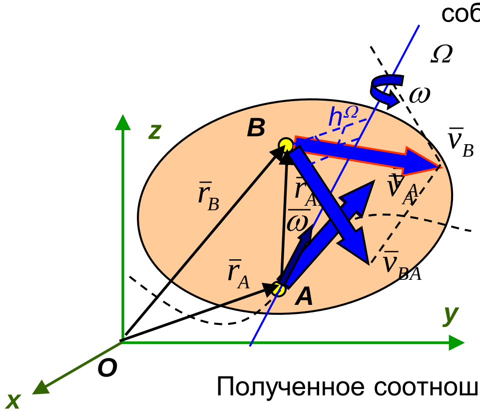
Таким образом, движение свободного тела можно представить как совокупность поступательного движения и сферического движения вокруг некоторой точки, принадлежащей телу, выбранной в качестве полюса:

Уравнения движения свободного тела:

$$x_A = x_A(t); \quad \psi = \psi(t);$$
$$y_A = y_A(t); \quad \theta = \theta(t);$$
$$z_A = z_A(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$



- **Скорость точки свободного тела – Скорость любой точки тела равна геометрической сумме скорости полюса и скорости этой точки в ее сферическом движении вокруг полюса.**



Радиусы-векторы точек A и B связаны между собой соотношением: $\bar{r}_B(t) = \bar{r}_A(t) + \bar{r}_{AB}(t).$

Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\bar{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\bar{r}_{AB}(t)}{dt}.$$

Второе слагаемое есть скорость точки B во сферическом движении вокруг полюса A:

$$\bar{v}^{\Omega}_{AB}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}_{AB}(t); \qquad |\bar{r}_{AB}| = const.$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}^{\Omega}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.$$

Полученное соотношение полностью совпадает с теоремой о слож... лишь в том, что используется не центр вращения, а ось мгновенного вращения Ω.

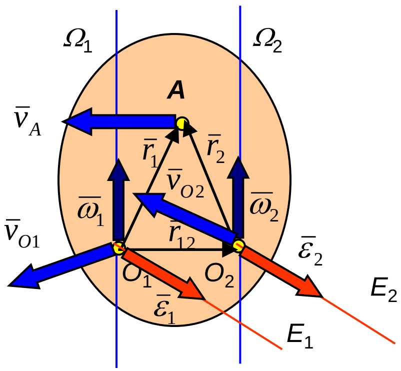
Отсюда имеют место и аналогично доказываются **следствия о равенстве проекций скоростей точек на ось, проходящих через эти точки**, и о **пропорциональности отрезков линии, проходящей через концы векторов скоростей**.

В дополнение к этим двум следствиям из теоремы о сложении вытекает третье следствие:
Скорости точек свободного тела, лежащих на прямой, параллельной мгновенной оси, геометрически равны.
Справедливость утверждения следует из равенства скоростей этих точек во вращении вокруг мгновенной оси.

Лекция 9 (продолжение 9.4)

- **Независимость векторов угловой скорости и углового ускорения от выбор полюса.** Запишем теорему о сложении скоростей для одной и тоже точки *A* с использованием различных полюсов O_1 и O_2:

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{v}_A = \bar{v}_{O1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1; \ \text{(a)} \\ &\bar{v}_A = \bar{v}_{O2} + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2; \ \text{(b)} \end{aligned}}$$



Свяжем между собой полюсы O_1 и O_2 радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_{12}$ и выразим скорость второго полюса через скорость первого:

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_{12} + \bar{r}_2;$$

$$\bar{v}_{O2} = \bar{v}_{O1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{12}.$$

Подставим это выражение в формулу (b): $\boxed{\bar{v}_A = (\bar{v}_{O1} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_{12}) + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2. \ \text{(c)}}$

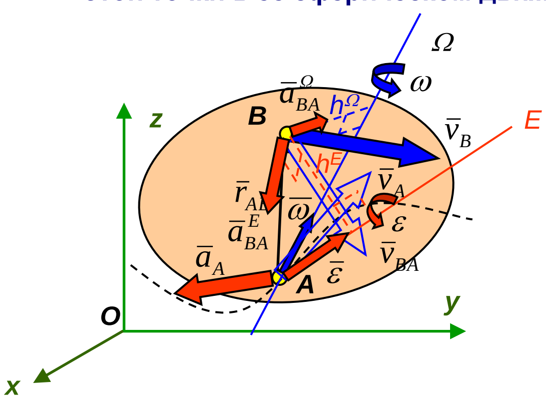
Приравняем правые части (a) и (c), и учтем соотношение между радусами-векторами: $\boxed{\bar{v}_{O1}} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1 = \boxed{\bar{v}_{O1}} + \bar{\omega}_1 \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2.$

После некоторых сокращений и преобразований получаем: $\boxed{\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1} = \boxed{\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_1} - \bar{\omega}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2.$ $\boxed{\bar{\omega}_1 \times \bar{r}_2 = \bar{\omega}_2 \times \bar{r}_2.}$

Отсюда следует равенство угловых скоростей: $\boxed{\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2.}$ Продифференцируем полученное равенство: $\dfrac{d\bar{\omega}_1}{dt} = \dfrac{d\bar{\omega}_2}{dt},$ $\boxed{\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2.}$

Итак, **векторы угловой скорости и углового ускорения не зависят от выбора полюса**. Выбор полюса влияет лишь на величину вектора скорости поступательного движения при разложении движения свободного тела.

- **Ускорение точки свободного тела – Ускорение любой точки тела равна геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки в ее сферическом движении вокруг полюса.**



Запишем теорему о сложении скоростей: $\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.}$

Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt}.$$

Или $\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}^{\Omega}.}$

$$\bar{a}_{BA}^{E} \qquad \bar{a}_{BA}^{\Omega}$$

$$\boxed{|\bar{a}_{BA}^{E}| = \varepsilon \cdot h^E} \qquad \boxed{|\bar{a}_{BA}^{\Omega}| = \omega^2 \cdot h^{\Omega}}$$

Здесь вектор $\boldsymbol{a}_A$ – **ускорение полюса**.

Второе слагаемое – **вращательное ускорение** точки *B* в сферическом движении относительно полюса *A*.

Третье слагаемое – **осестремительное ускорение** точки *B* в сферическом движении относительно полюса *A*.

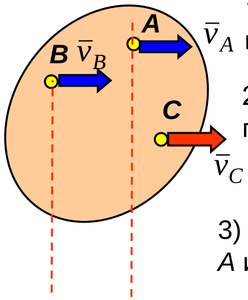
Геометрическая сумма вращательного и осестремительного ускорений точки во сферическом движении есть полное ускорение точки в сферическом движении вокруг полюса:

$$\boxed{\bar{a}_{BA}^{\text{сф}} = \bar{a}_{BA}^{E} + \bar{a}_{BA}^{\Omega}}$$

Таким образом: $\boxed{\bar{a}_A = \bar{a}_B + \bar{a}_{BA}^{\text{сф}}.}$

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры**

5 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эта точка находится в бесконечности.

2) Угловая скорость обращается в нуль (мгновенно поступательное движение):

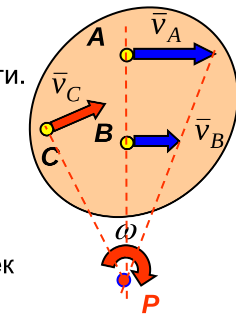
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

3) Скорость точки *C* равна геометрически скоростям точек *A* и *B*:

$$\bar{v}_C = \bar{v}_A = \bar{v}_B.$$

Вектор скорости точки *C* направлен параллельно векторам скоростей точек *A* и *B* (в ту же сторону).

6 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.

2) Определяем положение МЦС (проводим линию через концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$) и угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

- **Теорема о сложении ускорений – Ускорение любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.**

Скорости точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_A + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}).$$

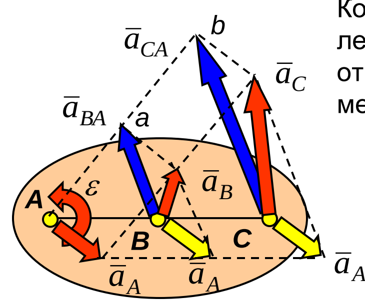
Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и осестремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса. Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}} + \bar{a}_{BA}^{\text{ос}} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.$$

- **Следствие – Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.**



Концы векторов ускорений точек $\boldsymbol{a}_{BA}$ и $\boldsymbol{a}_{CA}$ лежат на одной прямой *Abc* и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

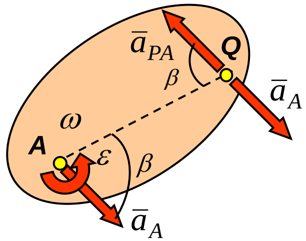
$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, AB,$$

$$a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, AC.$$

Концы векторов ускорений полюса *A*, изображенных в точках *B* и *C*, лежат также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов суммарных ускорений точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.

- **Мгновенный центр ускорений (МЦУ) – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, ускорение которого в этот момент равна нулю**.



Пусть известно ускорение одной из точек фигуры, угловая скорость и угловое ускорение вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для ускорения некоторой точки *Q* согласно теоремы о сложении ускорений:

$$\boxed{\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{\omega}\times\bar{r}_{AQ} + \bar{\varepsilon}\times\bar{v}_{QA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{PA}.}$$

Зададим значение ускорения этой точки *Q* равной нулю: $\boxed{\bar{a}_Q = 0.}$

Тогда получаем: $\bar{a}_{QA} = -\bar{a}_A.$

Т.е. ускорение искомой точки при вращении вокруг полюса должно быть равно по модулю ускорению точки А, параллельно этому ускорению и направлено в противоположную сторону.

Угол между вектором полного ускорения точки при вращении относительно центра равен: $\boxed{\beta = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}.}$

Это позволяет найти положение МЦУ (точки *Q*), а именно: МЦУ должен находиться прямой, составляющей угол β к вектору ускорения точки *A*, проведенной в сторону углового ускорения, на расстоянии: $\boxed{AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}.}$

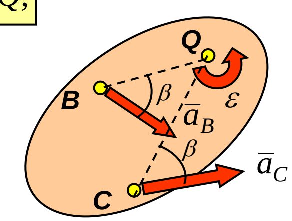
Если положение МЦУ найдено, ускорение любой точки плоской фигуры может быть легко определено посредством выбора полюса в МСУ . В этом случае векторное выражение теоремы о сложении ускорений вырождается в известную зависимость полного ускорения от расстояния до центра вращения:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon}\times\bar{r}_{QB} + \bar{\omega}\times\bar{v}_{BQ} = \bar{a}_{BQ}; \qquad (\bar{a}_Q = 0); \qquad a_B = \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\cdot BQ;$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon}\times\bar{r}_{QC} + \bar{\omega}\times\bar{v}_{CQ} = \bar{a}_{CQ}; \qquad (\bar{a}_Q = 0); \qquad a_C = \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\cdot CQ;$$

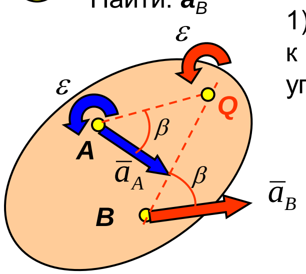
Таким образом, **при определении ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени можно считать, что тело совершает вращательное движение вокруг МЦУ**.

Внимание: На самом деле в данный момент тело вращается вокруг МЦС, положение которого в общем случае не совпадает с положением МЦУ.



- **Примеры использования МЦУ для определения ускорений точек плоской фигуры**

1. Дано: $\boldsymbol{a}_A$, ε, ω, положения точек *A*, *B*.
Найти: $\boldsymbol{a}_B$



1) МЦУ находится на прямой , составляющей угол β к вектору ускорения точки *A*, проведенной в сторону углового ускорения, на расстоянии:

$$\boxed{\beta = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}.}$$

$$\boxed{AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}.}$$

2) Соединяем точку *B* с МЦУ и определяем ускорение этой точки:

$$\boxed{a_B = \sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,QB.}$$

Если ε = 0 и $\omega \neq$ 0, то β = 0 и $AQ = \frac{a_A}{\omega^2}.$
Ускорения всех точек будут направлены в точку Q (МЦУ).

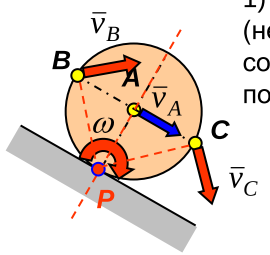
Если $\varepsilon \neq$ 0 и ω = 0, то β = 90° и $AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}.$
Ускорения всех точек будут перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки с МЦУ, и направлены в сторону углового ускорения.

Лекция 9 (продолжение 9.7)

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры –** Поскольку при движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка (МЦС), жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, то при определении скоростей эту точку и следует выбирать в качестве полюса, играющего роль центра вращения в данный момент времени.
- Ниже рассмотрим процедуру определения скоростей на примерах:

1

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, положения точек *A*, *B*, *C*,проскальзывание отсутствует.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$ (нет проскальзывания и точка с нулевой скоростью совпадает с точкой контакта колеса и неподвижной поверхностью качения).

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

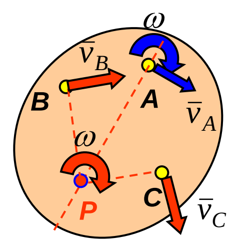
3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

2

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{\omega}$,положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$

2) Определяем расстояние до МЦС: $\boxed{AP = \dfrac{v_A}{\omega}.}$

Расстояние *AP* откладываем в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Дуговую стрелку угловой скорости изображаем вокруг МЦС.

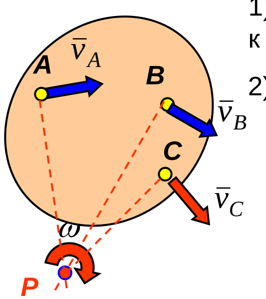
3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

3

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$,

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}.}$

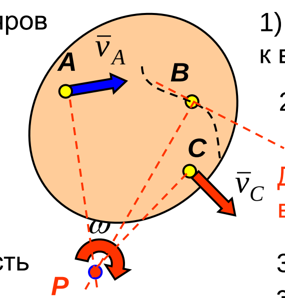
Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, траектория точки *B*, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$,



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и касательной к траектории точки *B*.

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.