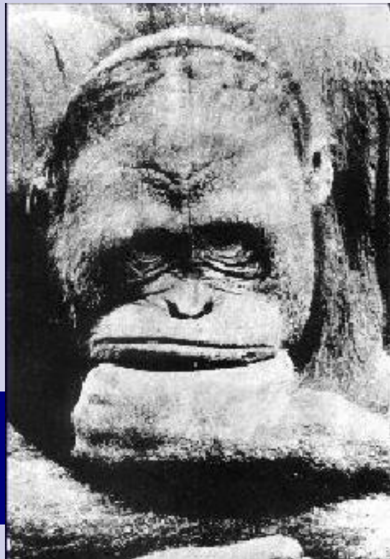
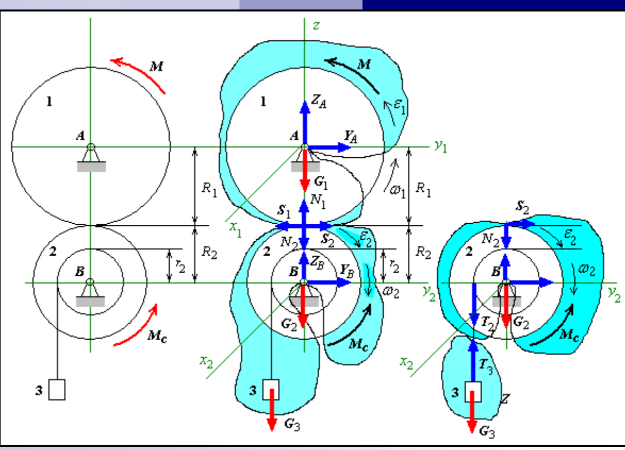
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт



Курс лекций по теоретической механике

Кинематика



Лекция 10.

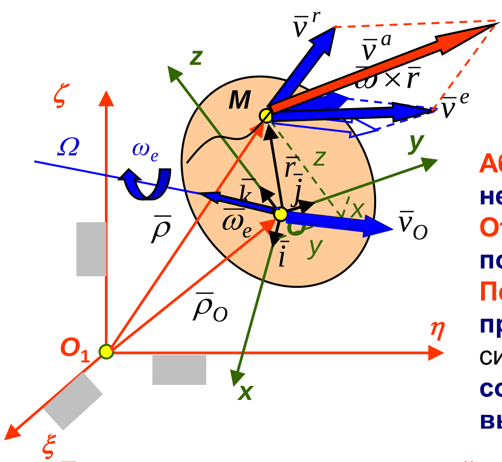
Сложное движение

Лекция 10

- **Сложное движение точки – такое движение, при котором точка участвует одновременно в двух или нескольких движениях.**

Примеры сложного движения точки (тела): лодка, переплывающая реку; человек, идущий по движущемуся эскалатору; камень подвижной кулисы, поршень качающегося цилиндра; шары центробежного регулятора Уатта.

Для описания сложного движения точки или для представления движения в виде сложного используются **неподвижная система отсчета $O_1\xi\eta\zeta$,** связанная с каким-либо условно неподвижным телом, например, с Землей, и **подвижная система отсчета *Oxyz*,** связанная с каким-либо движущимся телом.



Абсолютное движение (*a*) - движение **точки**, рассматриваемое относительно **неподвижной** системы отсчета. **Относительное движение (*r*)** - движение **точки**, рассматриваемое относительно **подвижной** системы отсчета.

Переносное движение (*e*) - движение **подвижной системы отсчета**, рассматриваемое относительно **неподвижной системы отсчета**.

Абсолютная скорость (ускорение) **точки v^a** (a^a) - **скорость** (ускорение) точки, **вычисленная** относительно **неподвижной** системы отсчета.

Относительная скорость (ускорение) **точки v^r** (a^r) – **скорость** (ускорение) точки, **вычисленная** относительно **подвижной** системы отсчета.

Переносная скорость (ускорение) **точки v^e** (a^e) – **скорость** (ускорение) точки, **принадлежащей** подвижной системе координат или твердому телу, с которым жестко связана подвижная система координат, **совпадающей** с рассматриваемой движущейся точкой в данный момент времени и **вычисленная** относительно **неподвижной системы отсчета**.

Теорема о сложении скоростей – абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей точки.

В любой момент времени справедливо соотношение:

$$\boxed{\bar{\rho} = \bar{\rho}_O + \bar{r} = \bar{\rho}_O + x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.}$$

Продифференцируем это соотношение по времени имея в виду, орты ***i***, ***j***, ***k*** изменяют свое направление в общем случае движения свободного тела, с которым связана подвижная система координат:

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}_O}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} = \boxed{\frac{d\bar{\rho}_O}{dt}} + \boxed{\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}} + \boxed{x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt}}.$$

$$\bar{v}_O \qquad \bar{v}^r$$

Здесь первое слагаемое ($\boldsymbol{v_O}$) - скорость полюса *O*; следующие три – **относительная скорость точки ($\boldsymbol{v^r}$).**

Для последних трех слагаемых следует определить производные по времени от ортов ***i***, ***j***, ***k***:

$$\boxed{\frac{d\bar{i}}{dt} = (\bar{\omega}_e \times \bar{i});}$$

Подставим векторные произведения в последние три слагаемые:

$$x(\bar{\omega}_e \times \bar{i}) + y(\bar{\omega}_e \times \bar{j}) + z(\bar{\omega}_e \times \bar{k}) = = \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) = \boxed{\bar{\omega}_e \times \bar{r}.}$$

Сумма первого и последнего слагаемого – скорость точки свободного тела есть **переносная скорость точки ($\boldsymbol{v^e}$)**:

$$\boxed{\bar{v}^e = \bar{v}_O + \bar{\omega}_e \times \bar{r}.}$$

Таким образом, с учетом того, что производная по времени радиуса-вектора *ρ* есть абсолютная скорость, получаем:

$$\boxed{\bar{v}^a = \bar{v}^r + \bar{v}^e.}$$

Модуль вектора абсолютной скорости:

$$\boxed{\left|\bar{v}^a\right| = \sqrt{\left|\bar{v}^r\right|^2 + \left|\bar{v}^e\right|^2 + 2\left|\bar{v}^r\right|\left|\bar{v}^e\right|\sin(\bar{v}^r, \bar{v}^e)}.}$$

Лекция 10 (продолжение 10.2)

■ **Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) – абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений точки.**

Было получено ранее соотношение для скорости:

$$\frac{d\bar\rho}{dt}=\frac{d\bar\rho_O}{dt}+\dot x\bar i+\dot y\bar j+\dot z\bar k+x\frac{d\bar i}{dt}+y\frac{d\bar j}{dt}+z\frac{d\bar k}{dt}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени еще раз:

$$\frac{d^2\bar\rho}{dt^2}=\underbrace{\boxed{\frac{d^2\bar\rho_O}{dt^2}}}_{\bar a_O}+\underbrace{\boxed{\ddot x\bar i+\ddot y\bar j+\ddot z\bar k}}_{\bar a^r}+\underbrace{\boxed{\dot x\frac{d\bar i}{dt}+\dot y\frac{d\bar j}{dt}+\dot z\frac{d\bar k}{dt}+\dot x\frac{d\bar i}{dt}+\dot y\frac{d\bar j}{dt}+\dot z\frac{d\bar k}{dt}}}_{\bar a^c}+\boxed{x\frac{d^2\bar i}{dt^2}+y\frac{d^2\bar j}{dt^2}+z\frac{d^2\bar k}{dt^2}}.$$

Здесь первое слагаемое ($\boldsymbol{a}_O$) - ускорение полюса O; следующие три – **относительное ускорение точки ($\boldsymbol{a}^r$).**

Для последних трех слагаемых следует определить вторые производные по времени от ортов подвижной системы координат ***i***, ***j***, ***k***:

$$\frac{d^2\bar i}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar i)=\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar i+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar i);$$
$$\frac{d^2\bar j}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar j)=\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar j+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar j);$$
$$\frac{d^2\bar k}{dt^2}=\frac{d}{dt}(\bar\omega_e\times\bar k)=\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times\bar k+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar k).$$

Подставим эти выражения в последние три слагаемые и сгруппируем.

$$\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times x\bar i+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times x\bar i)+$$
$$+\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times y\bar j+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times y\bar j)+$$
$$+\frac{d\bar\omega_e}{dt}\times z\bar k+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times z\bar k)=$$
$$=\boxed{\bar\varepsilon_e\times\bar r+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar r)}.$$

Сумма первого и полученных двух слагаемых – ускорение точки свободного тела есть **переносное ускорение точки ($\boldsymbol{a}^e$)**:

$$\boxed{\bar a^e=\bar a_O+\bar\varepsilon_e\times\bar r+\bar\omega_e\times(\bar\omega_e\times\bar r).}$$

В оставшихся шести слагаемых сложим одинаковые члены, подставим векторные произведения для первых производных по времени от ортов и сгруппируем:

$$2\left[\dot x\frac{d\bar i}{dt}+\dot y\frac{d\bar j}{dt}+\dot z\frac{d\bar k}{dt}\right]=2\left[\dot x(\bar\omega_e\times\bar i)+\dot y(\bar\omega_e\times\bar j)+\dot z(\bar\omega_e\times\bar k)\right]=\boxed{2(\bar\omega_e\times\bar v^r).}$$

Полученная компонента ускорения представляет собой **кориолисово ускорение ($\boldsymbol{a}^c$)**:

$$\boxed{\bar a^c=2(\bar\omega_e\times\bar v^r).}$$

Таким образом, с учетом того, что вторая производная по времени радиуса-вектора ρ есть абсолютное ускорение, получаем:

$$\boxed{\bar a^a=\bar a^r+\bar a^e+\bar a^c.}$$

■ **Величина и направление ускорения Кориолиса:**

Модуль вектора кориолисова ускорения:

$$\boxed{\left|\bar a^c\right|=2\omega_e v^r\sin(\bar\omega_e,\bar v^r).}$$

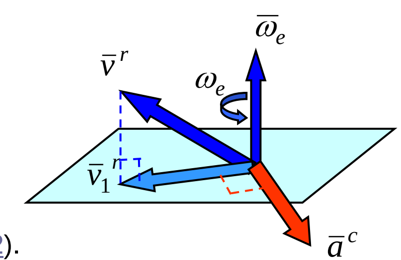
Ускорение Кориолиса обращается в ноль в двух случаях:

1. Угловая скорость переносного движения равна 0 (поступательное переносное движение).
2. Вектор угловой скорости параллелен вектору относительной скорости (синус угла между векторами обращается в 0).

Направление вектора кориолисова ускорения:

Определяется по одному из трех правил:

1. По определению векторного произведения (см. п.3.2).
2. По правилу правой руки (см. п.3.2).
3. **По правилу Жуковского**:



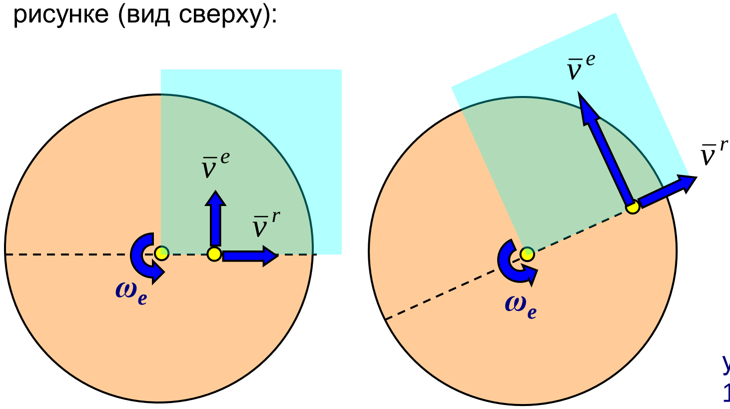
а) Спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную вектору угловой скорости.

б) Повернуть проекцию вектора относительной скорости на прямой угол в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

■ **Причины возникновения ускорения Кориолиса:** Формально ускорение Кориолиса было выведено группировкой слагаемых произведений, содержащих проекции относительной скорости и производные по времени от ортов подвижной системы координат. При этом ранее было получено удвоенное число таких слагаемых.

Для прояснения физических причин возникновения ускорения Кориолиса рассмотрим качественный пример, в котором специально будем полагать постоянными вектор относительной скорости (в подвижной системе координат) и вектор угловой переносной скорости (вращения подвижной системы координат относительно неподвижной оси):

Пусть в некоторый момент времени положение точки и вектора относительной и переносной скоростей таковы, как они изображены н рисунке (вид сверху):

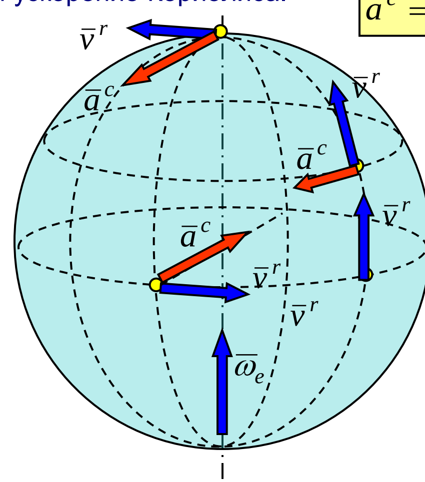


Через некоторое время точка удалится от оси вращения и тело повернется на некоторый угол.
В результате:
1) **относительная скорость изменится по направлению** из-за наличия переносной угловой скорости и
2) **переносная линейная скорость изменится по величине** из-за наличия относительной скорости, изменяющей расстояние точки до оси вращения.

Таким образом, можно считать что существует две причины возникновения ускорения Кориолиса:
1) переносная угловая скорость влияет на относительную скорость, а
2) относительная скорость в свою очередь влияет на переносную линейную скорость.

Возможно, это поможет запомнить коэффициент, равный двум, в формуле, определяющей ускорение Кориолиса. $\boxed{\bar a^c = 2(\bar\omega_e \times \bar v^r).}$

■ **Примеры определения направления ускорения Кориолиса** удобно рассмотреть для случаев различного положения движущихся точек по поверхности Земли, вращающейся относительно своей оси:



Лекция 10 (продолжение 10.4)

■ **Сложное движение твердого тела – такое движение, при котором тело участвует одновременно в двух или нескольких движениях.** Все определения, касающиеся составляющих движения, данные для сложного движения точки, остаются справедливыми для твердых тел. Кинематика сложного движения точки используется здесь для получения новых соотношений, описывающих сложное движение твердого тела.

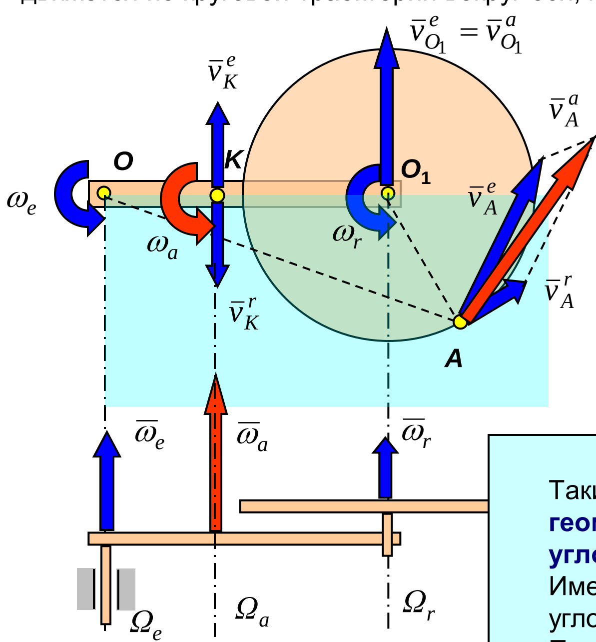
■ **Сложение поступательных движений твердого тела –** При поступательных движениях все **точки твердого тела имеют одинаковые скорости**, что позволяет использовать теорему о сложении скоростей точки для сложного движения:

$$\boxed{\bar v^a = \bar v^r + \bar v^e.}$$

Таким образом, **абсолютная скорость тела**, равная скорости одной из точек этого тела, **равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей этого тела.**

■ **Сложение вращательных движений твердого тела –** здесь рассмотрим два случая различного положения осей вращения: оси вращений параллельны и оси вращений пересекаются.

■ **Оси вращений параллельны –** диск вращается относительно своей оси, проходящей через точку O_1, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega_r}$, ось диска движется по круговой траектории вокруг оси, проходящей через неподвижную точку O, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega_e}$:



Произвольная точка A, принадлежащая диску, совершает сложное движение (движется по круговой траектории в подвижной плоскости, жестко связанной с кривошипом OO_1) и абсолютная скорость этой точки определяется выражением:

$$\boxed{\bar v^a_A = \bar v^r_A + \bar v^e_A.}$$

Задачу определения скоростей любой из точек диска можно упростить, если найти положение мгновенного центра вращения (точку, скорость которой в данный момент равна нулю):

$$\boxed{\bar v^a_K = \bar v^r_K + \bar v^e_K = 0.} \qquad \text{Отсюда:} \qquad \boxed{\bar v^e_K = -\bar v^r_K.}$$

Это означает, что точка K лежит на отрезке прямой OO_1 и **делит его на части, обратно пропорциональные угловым скоростям**:

$$v^e_K = v^r_K, \qquad \omega_e OK = \omega_r O_1K \qquad \boxed{\frac{\omega_e}{\omega_r} = \frac{O_1K}{OK}}$$

и точку O1, которая не участвует в (в переносном движении и в ы: $v^e_{O_1} = v^a_{O_1}, \qquad \omega_e OO_1 = \omega_a KO_1.$

выразим через O_1K:

KO_1. Отсюда: $\boxed{\omega_a = \omega_e + \omega_r.}$

Таким образом, **абсолютная угловая скорость равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей**.
Имеется полная аналогия между сложением векторов угловых скоростей и сложением двух параллельных сил.
При сложении таких сил равнодействующая приложена в точке, делящей расстояние между силами на отрезки, обратно пропорциональные силам.

В случае противоположных по направл ходить так же обратно пропорционально угловым скоростям, но только внешни со стороны большего вектора угловой скорости). Тогда: $OO_1 = KO_1 - KO$ $\boxed{\omega_a = \omega_e - \omega_r.}$

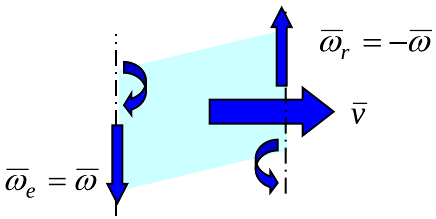
Оба соотношения можно объединить одним векторным соотношением: $\boxed{\bar\omega_a = \bar\omega_e + \bar\omega_r.}$

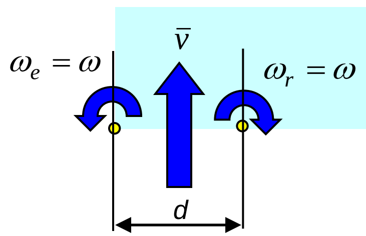
Лекция 10 (продолжение 10.5)

- **Пара вращений –** При сложении двух параллельных сил, равных по величине и противоположно направленных между собой равнодействующая этих сил обращается в ноль (система таких сил не приводится к равнодействующей) и эти силы образуют качественно новую простейшую систему, называемой **парой сил**. При этом действие пары сил характеризуется **моментом пары**.

Совершенно аналогично при сложении двух параллельных векторов угловых скоростей, равных по величине и противоположно направленных между собой, называемых **парой вращений**, результирующая угловая скорость обращается в ноль. В результате получается поступательное движение, скорость которого определяется величиной **момента пары вращений:**

$$\bar{v} = \overline{m}(\bar{\omega}, -\bar{\omega}) \qquad v = \omega \cdot d$$



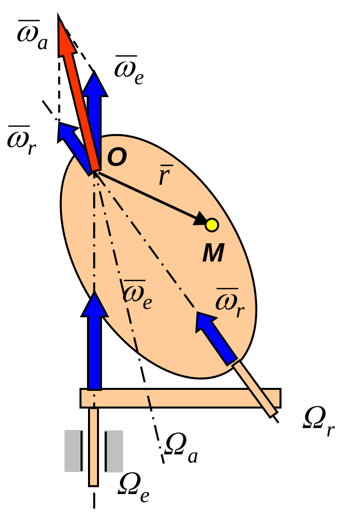


Таким образом, **два вращения с угловыми скоростями, равными по величине и противоположными по направлению, могут быть заменены одним поступательным движением**.
Точно также возможна и обратная процедура – представление поступательного движения в виде пары вращений.

Вектор скорости поступательного движения твердого тела является свободным вектором (может перемещаться параллельно самому себе) в то время как **векторы угловой скорости являются скользящими векторами**, которые могут перемещаться только по линии действия.

- **Сложение вращательных движений твердого тела**

в случае пересечения осей вращений – тело вращается с угловой скоростью ω_r относительно своей оси, проходящей через точку пересечения с другой осью вращения *O*. Относительно второй оси первая ось вращается с угловой скоростью ω_e:



Поскольку точка пересечения осей вращения имеет нулевую скорость, то принимая ее за неподвижную точку в пространстве, вычислим скорость произвольной точки *M* по теореме о сложении скоростей:

$$\bar{v}_M^a = \bar{v}_M^r + \bar{v}_M^e = (\overline{\omega}_r \times \bar{r}) + (\overline{\omega}_e \times \bar{r}) = (\overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e) \times \bar{r}.$$

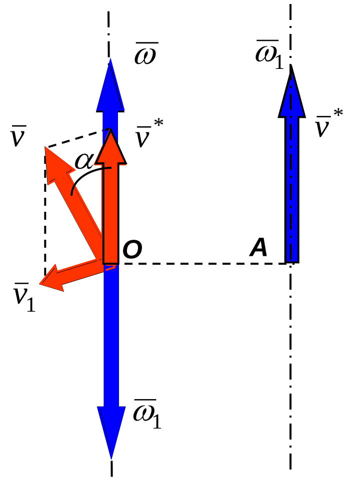
Векторная сумма угловых скоростей, полученная в скобках, представляет собой результирующую угловую скорость, определяющую единственное вращение тела вокруг некоторой мгновенной оси (см. сферическое движение), которая может рассматриваться как абсолютная угловая скорость:

Таким образом, **абсолютная угловая скорость равна геометрической сумме относительной и переносной угловых скоростей** :

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_e + \overline{\omega}_r.$$

При сложении вращательных движений более двух результирующий вектор угловой скорости равен геометрической сумме векторов всех угловых скоростей, участвующих в сложном движении:

- **Сложение поступательного и вращательного движения твердого тела** – пусть тело участвует во вращательном движении с угловой скоростью ω и поступательном движении со скоростью v. Угол α между векторами угловой скорости и поступательной скорости произвольный.



Разложим вектор скорости поступательного движения на два взаимно перпендикулярных вектора так, чтобы один совпал с вектором угловой скорости: $\boxed{\bar{v} = \bar{v}^* + \bar{v}_1.}$

Вектор скорости v_1 представим в виде пары вращений с угловыми скоростями, равными заданной угловой скорости вращательного движения: $\boxed{\bar{v}_1 = \bar{m}(\bar{\omega}_1, -\bar{\omega}_1), \quad \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}.}$

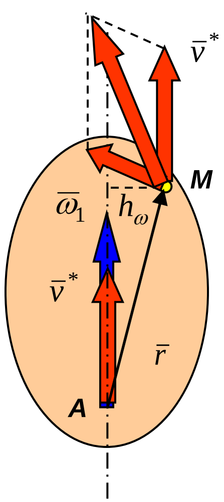
Расстояние OA находится из равенства скорости моменту пары вращений: $OA = \frac{v_1}{\omega} = \frac{v \sin\alpha}{\omega}.$

Вектор оставшейся поступательной скорости v^*, как свободный вектор перенесем в точку *A*, а два вектора угловых скоростей, изображенные в точке О, можно удалить, поскольку они равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны:

$$\bar{\omega} + \bar{\omega}_1 = \bar{\omega} + (-\bar{\omega}) = 0$$

Таким образом, получили вращение с заданной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку *A*, и поступательное движение со скоростью v^*. Такая комбинация более не может быть упрощена и представляет собой **кинематический винт**, реализующий **винтовое движение** твердого тела. Ось, проходящая через точку А, вдоль которой направлен вектор угловой скорости, называется **мгновенной винтовой осью**.

- **Скорость точки твердого тела при винтовом движении** – пусть тело участвует во вращательном движении с угловой скоростью ω_1, которое примем за относительное движение, и поступательном движении со скоростью v^*, которое примем за переносное движение.



$\boxed{\bar{v}^r = \bar{\omega}_1 \times \bar{r}.}$ $\boxed{\bar{v}^e = \bar{v}^*.}$ Абсолютная скорость точки *M*: $|\bar{v}^a| = \sqrt{(v^*)^2 + (\omega_1 h_\omega)^2}.$

Точка *M* движется по спиральной траектории делая один оборот за время *T*: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_1}.}$

За время *T* точка *M* перемещается по направлению переносной скорости на величину *h* (**шаг винта**): $h = v^* T = v^* \frac{2\pi}{\omega_1}.$

Отношение поступательной скорости с угловой скорости является характеристикой винтового движения и называется **параметром винта**: $\boxed{p = \frac{v^*}{\omega_1}.}$

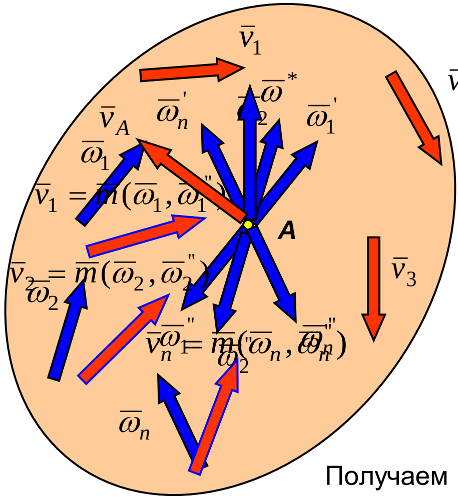
С использованием параметра винта **шаг винта**: $\boxed{h = 2\pi \cdot p.}$

Модуль абсолютной скорости точки *M* с использованием параметра винта: $|\bar{v}^a| = \sqrt{(\omega_1 p)^2 + (\omega_1 h_\omega)^2} = \omega_1 \sqrt{p^2 + h_\omega^2}.$

В частном случае, при $\alpha = 90^0$ (вектор поступательной скорости перпендикулярен вектору угловой скорости) движение приводится к одному вращению вокруг оси, проходящей через точку *A*: $\boxed{v^* = v\cos\alpha = 0.}$

Лекция 10 (продолжение 10.7)

- **Общий случай сложного движения твердого тела** – пусть тело участвует в *n* вращательных движениях и *m* поступательных движениях.



Выберем полюс А и приложим в этой точке вектора угловых скоростей:

$$\bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1; \quad \bar{\omega}_1'' = -\bar{\omega}_1;$$
$$\bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2; \quad \bar{\omega}_2'' = -\bar{\omega}_2;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\bar{\omega}_n' = \bar{\omega}_n; \quad \bar{\omega}_n'' = -\bar{\omega}_n.$$

Получили совокупность пар вращений

$$(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_1''); \quad (\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_2''); \quad \ldots\ldots \quad (\bar{\omega}_n, \bar{\omega}_n'')$$

и совокупность векторов угловых скоростей, пересекающихся в одной точке.

Совокупность вращений можно заменить одним вращением:

$$\bar{\omega}^* = \sum_1^n \bar{\omega}_i' = \sum_1^n \bar{\omega}_i.$$

Каждую пару вращений можно заменить одним поступательным движением:

Всю совокупность поступательных движений можно заменить сложением одним поступательным движением:

$$\bar{v}_A = \sum_1^n \bar{v}_i + \sum_1^m \bar{v}_j = \sum_1^n \bar{v}_i + \sum_1^m \bar{m}(\bar{\omega}_j, -\bar{\omega}_j'').$$

Получаем в общем случае одно вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}^*$ вокруг оси, проходящей через полюс *А*, и поступательное движение со скоростью $\boldsymbol{v}_A$(*А* – точка приведения), что приводит к кинематическому винту, рассмотренному выше.

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}^*$ не зависит от выбора полюса и это есть **первый (векторный) инвариант**:

$$\bar{\omega}^* = \sum_1^n \bar{\omega}_i = \bar{J}_1.$$

Итак, **угловые скорости** в кинематике складываются так же, как силы в статике (эти векторы являются **скользящими** векторами).
Поступательные скорости в кинематике складываются так же, как моменты пар в статике (эти векторы являются **свободными** векторами).
Все способы преобразования сил и пар сил в статике подобны преобразованиям скоростей твердого тела в кинематике.
И в статике, и в кинематике при приведении системы в общем случае получается статический винт (динама), и соответственно кинематический винт. Как в статике, так и в кинематике существуют соответствующие инвариантные величины (помечены звездочками) и их производные (главный минимальный момент и минимальная поступательная скорость).

точек приведения, и вектора угловой скорости равны:

$$\bar{v}_M \cdot \bar{\omega} = \bar{v}_A \cdot \bar{\omega} = J_2$$

- второй (скалярный) инвариант.

Раскрывая скалярные произведения получаем: $v_M \cdot \omega \cdot \cos(\bar{v}_M, \bar{\omega}) = v_A \cdot \omega \cdot \cos(\bar{v}_A, \bar{\omega}),$
откуда:

$$v_M \cos(\bar{v}_M, \bar{\omega}) = v_A \cos(\bar{v}_A, \bar{\omega}) = v^*$$

- минимальная поступательная скорость.