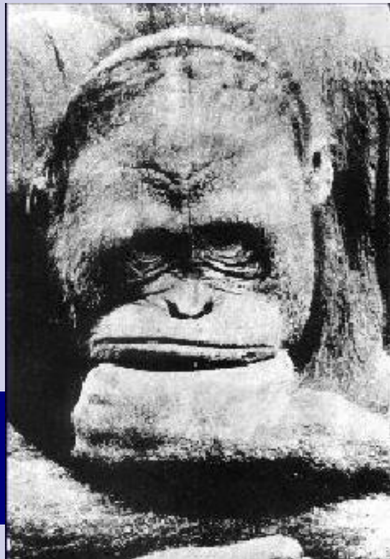
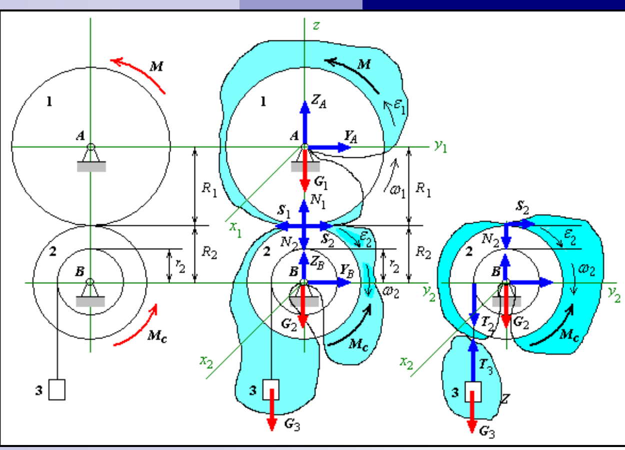
Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
Инженерно-технический институт



Курс лекций по теоретической механике

Динамика



Лекция 12.

Принцип Даламбера.

Лекция 12

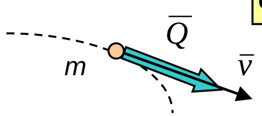
- **Импульс силы** – **мера механического взаимодействия**, характеризующая передачу механического движения со стороны действующих на точку сил за данный промежуток времени: $\boxed{\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt}$ В проекциях на координатные оси: $\boxed{(x): S_x = \int_{t_1}^{t_2} Xdt; \quad (y): S_y = \int_{t_1}^{t_2} Ydt; \quad (z): S_z = \int_{t_1}^{t_2} Zdt.}$

  В случае постоянной силы: $\boxed{\bar{S} = \bar{F}(t_2 - t_1).}$ В проекциях на координатные оси: $\boxed{S_x = X(t_2 - t_1); \quad S_y = Y(t_2 - t_1); \quad S_z = Z(t_2 - t_1);}$

- **Импульс равнодействующей** – **равен геометрической сумме импульсов приложенных к точке сил за один и тот же промежуток времени**: $\boxed{\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots + \bar{F}_n.}$ Умножим на *dt*: $\bar{R}dt = \bar{F}_1 dt + \bar{F}_2 dt + \ldots + \bar{F}_n dt.$

  Проинтегрируем на данном промежутке времени: $\int_{t_1}^{t_2} \bar{R}dt = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_2 dt + \ldots + \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_n dt.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \ldots + \bar{S}_n.}$

- **Количество движения точки** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным произведению массы точки на вектор ее скорости:** $\boxed{\bar{Q} = m\bar{v}.}$



- **Количество движения системы материальных точек** – **геометрическая сумма количеств движения материальных точек:** $\boxed{\bar{Q} = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \ldots + \bar{Q}_n = \sum \bar{Q}_k.}$

$$\bar{Q} = \sum \bar{Q}_k = \sum m_k \bar{v}_k = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{r}_k\right).$$

По определению центра масс: $\boxed{M\bar{r}_C = \sum m_k \bar{r}_k.}$

Тогда: $\bar{Q} = \frac{d}{dt}(M\bar{r}_c) = M\frac{d\bar{r}_C}{dt} = M\bar{v}_C.$ $\boxed{\bar{Q} = M\bar{v}_C.}$ **Вектор количества движения системы равен произведению массы всей системы на вектор скорости центра масс системы.**

В проекциях на координатные оси: $\boxed{Q_x = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{x}_C; \quad Q_y = M\dot{x}_C.}$

- **Теорема об изменении количества движения системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: $\boxed{m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i}$ или $m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$

  Просуммируем эти уравнения по всем точкам: $\sum m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \boxed{\sum \bar{F}_k^e} + \boxed{\sum \bar{F}_k^i}.$

  $\sum \bar{F}_k^e \Rightarrow \bar{R}^e \qquad \sum \bar{F}_k^i \Rightarrow \bar{R}^i = 0$

  В левой части уравнения внесем массы под знак производной и заменим сумму производных на производную суммы: $\frac{d}{dt}\left(\sum m_k \bar{v}_k\right) = \bar{R}^e.$

  Из определения количества движения системы: $\sum m_k \bar{v}_k = \bar{Q}.$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e.}$

Производная вектора количества движения системы по времени равна главному вектору внешних сил системы.

В проекциях на координатные оси: $\boxed{\frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e; \quad \frac{dQ_x}{dt} = R_x^e = \sum X_k^e.}$

Следствия из теоремы об изменении количества движения системы (законы сохранения):

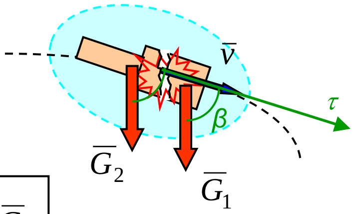
1. Если в интервале времени [t_1, t_2] главный вектор внешних сил системы равен нулю, $\boldsymbol{R}^e = 0$, то вектор количества движения постоянен, $\boldsymbol{Q}$ = **const** – **закон сохранения количества движения системы**).

2. Если в интервале времени [t_1, t_2] проекция главного вектора внешних сил системы на ось x равна нулю, $R_x^e = 0$, то проекция количества движения системы на ось x постоянна, Q_x = const.

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

Пример: Граната массы M, летевшая со скоростью v, разорвалась на две части. Скорость одного из осколков массы m_1 возросла в направлении движения до величины v_1. Определить скорость второго осколка.

1. Объект движения (граната):
2. Объект – свободная система, связи и их реакции отсутствуют.
3. Добавляем активные силы:



4. Записываем теорему об изменении количества движения: $\boxed{\dfrac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{R}^e = \bar{G}_1 + \bar{G}_2.}$

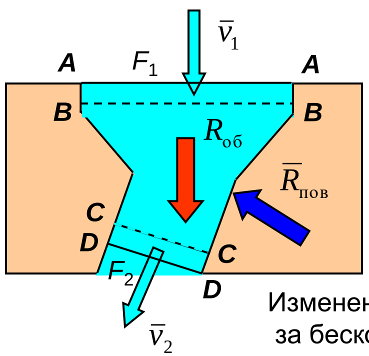
Проецируем на ось τ: $\dfrac{dQ_\tau}{dt} = m_1 g\cos\beta + m_2 g\cos\beta \neq 0.$

Разделяем переменные и интегрируем : $\displaystyle\int_{Q_0}^{Q} dQ_\tau = \int_0^t (m_1 g\cos\beta + m_2 g\cos\beta)dt \approx 0.$ Правый интеграл практически равен нулю, т.к. время взрыва t<<1.

Отсюда *закон сохранения* : $Q_\tau - Q_{\tau 0} \approx 0$ или $Q_{\tau 0} \approx Q_\tau.$ ⇒ $Mv \approx m_1 v_1 + m_2 v_2.$ ⇒ $v_2 = \dfrac{Mv - m_1 v_1}{m_2} v_2.$

- **Теорема Эйлера – Применение теоремы об изменении количества движения системы к движению сплошной среды (воды)** .

1.Выбираем в качестве объекта движения объем воды, находящийся в криволинейном канале турбины:
2. Отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями ($\boldsymbol{R}_{пов}$ – равнодействующая поверхностных сил)
3. Добавляем активные силы ($\boldsymbol{R}_{об}$ – равнодействующая объемных сил):



Изменение
за бесконе

В проекциях на оси:

$$(x): M_{сек}(v_{2x} - v_{1x}) = R_x^{об} + R_x^{пов};$$
$$(y): M_{сек}(v_{2y} - v_{1y}) = R_y^{об} + R_y^{пов};$$
$$(z): M_{сек}(v_{2z} - v_{1z}) = R_z^{об} + R_z^{пов}.$$

Разность проекций векторов секундных количеств движения жидкости на ось равна сумме проекций главных векторов объемных и поверхностных сил на ту же ось.

Принимая произведение плотности, площади поперечного сечения и скорости за **секундную массу** $\boxed{M_{сек} = \rho F_1 v_1 = \rho F_2 v_2,}$

получаем:

$$d\bar{Q}_{AB} = (M_{сек}dt)\bar{v}_1;$$
$$d\bar{Q}_{CD} = (M_{сек}dt)\bar{v}_2.$$

$$\boxed{d\bar{Q} = M_{сек}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)dt.}$$

Подставляя дифференциал количества движения системы в теорему об изменении получаем: $\boxed{M_{сек}(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{R}_{об} + \bar{R}_{пов}.}$

Геометрическая разность векторов секундных количеств движения жидкости равна сумме главных векторов объемных и поверхностных сил.

Лекция 12 (продолжение 12.3)

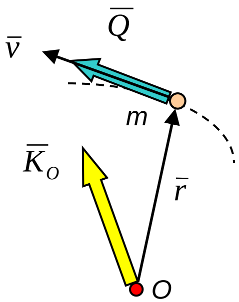
- **Момент количества движения точки или кинетический момент движения относительно некоторого центра** – мера механического движения, определяемая вектором, **равным векторному произведению радиуса-вектора материальной точки на вектор ее количества движения:**

$$\boxed{\bar{K}_O = \bar{r} \times \bar{Q} = \bar{r} \times m\bar{v}.}$$

В проекциях на оси:

$$\bar{K}_O = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} = [y(mv_z) - z(mv_y)]\bar{i} + [z(mv_x) - x(mv_z)]\bar{j} + [x(mv_y) - y(mv_x)]\bar{k}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_x &= y(mv_z) - z(mv_y); \\ K_y &= z(mv_x) - x(mv_z); \\ K_z &= x(mv_y) - y(mv_x). \end{aligned}}$$



- **Кинетический момент системы материальных точек относительно некоторого центра** – **геометрическая сумма моментов количеств движений всех материальных точек относительно этого же центра:**

$$\boxed{\bar{K}_O = \bar{K}_{1O} + \bar{K}_{2O} + \ldots + \bar{K}_{nO} = \sum \bar{K}_{iO} = \sum \bar{r}_i \times m_i\bar{v}_i.}$$

В проекциях на оси: $\boxed{K_x = \sum K_{ix}; \quad K_y = \sum K_{iy}; \quad K_z = \sum K_{iy}.}$

- **Теорема об изменении момента количества движения системы** – Рассмотрим систему *n* материальных точек. Приложенные к каждой точке силы разделим на внешние и внутренние и заменим их на соответствующие равнодействующие $\boldsymbol{F}_k^e$ и $\boldsymbol{F}_k^i$. Запишем для каждой точки основное уравнение динамики: $\boxed{m_k\bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i}$ или $m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$

Умножим векторно каждое из равенств на радиус-вектор слева: $\bar{r}_k \times m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i.$

Просуммируем эти уравнения по всем точкам: $\sum \bar{r}_k \times m_k \dfrac{d\bar{v}_k}{dt} = \boxed{\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e} + \boxed{\sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i}.$

$$\bar{M}_O^e \qquad \bar{M}_O^i = 0$$

Посмотрим, можно ли вынести знак производной за пределы векторного произведения:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \boxed{\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times m_k\bar{v}_k} + \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{r}_k \times m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt}.$$

$$\bar{v}_k \times m_k\bar{v}_k = 0 \quad (\sin(\bar{v}_k, m_k\bar{v}_k) = 0)$$

Таким образом, получили: $\sum \dfrac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \bar{M}_O^e.$

Заменим сумму производных на производную суммы: $\dfrac{d}{dt}(\sum \bar{r}_k \times m_k\bar{v}_k) = \bar{M}_O^e.$

Выражение в скобках есть момент количества движения системы. Отсюда:

$$\boxed{\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O^e.}$$

Производная вектора момента количества движения системы относительно некоторого центра по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этого же центра.

В проекциях на координатные оси:

$$\boxed{\frac{dK_x}{dt} = M_x^e; \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y^e; \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z^e.}$$

Производная момента количества движения системы относительно некоторой оси по времени равна главному моменту внешних сил системы относительно этой же оси.

Лекция 12 (продолжение 12.4)

- **Следствия из теоремы об изменении момента количества движения системы (законы сохранения)**:

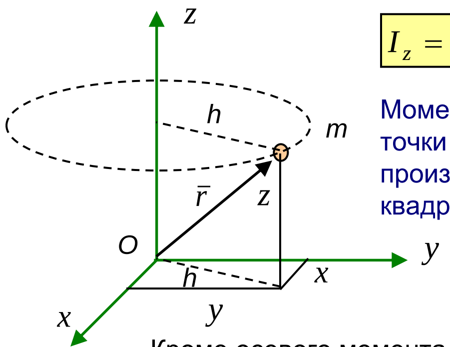
1. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ вектор главного момента внешних сил системы относительно некоторого центра равен нулю, $\boldsymbol{M_O^e} = 0$, то вектор момента количества движения системы относительно этого же центра постоянен, $\boldsymbol{K_O}$ = **const – закон сохранения момента количества движения системы**).

2. Если в интервале времени $[t_1, t_2]$ главный момент внешних сил системы относительно оси x равен нулю, $M_x^e = 0$, то момент количества движения системы относительно оси x постоянен, K_x = const.

Аналогичные утверждения справедливы для осей y и z.

- **Элементы теории моментов инерции** – При вращательном движении твердого тела мерой инерции (сопротивления изменению движения) является момент инерции относительно оси вращения. Рассмотрим основные понятия определения и способы вычисления моментов инерции.

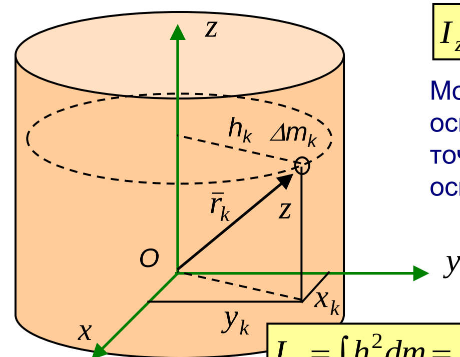
1. Момент инерции материальной точки относительно оси:



$$I_z = mh^2 = m(x^2 + y^2)$$

Момент инерции материальной точки относительно оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки до оси.

2. Момент инерции твердого тела относительно оси:



$$I_z = \sum \Delta m_k h_k^2 = \sum \Delta m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

Момент инерции твердого тела относительно оси равен сумме произведений массы каждой точки на квадрат расстояния этой точки до оси.

При переходе от дискретной малой массы к бесконечно малой массе точки предел такой суммы определяется интегралом:

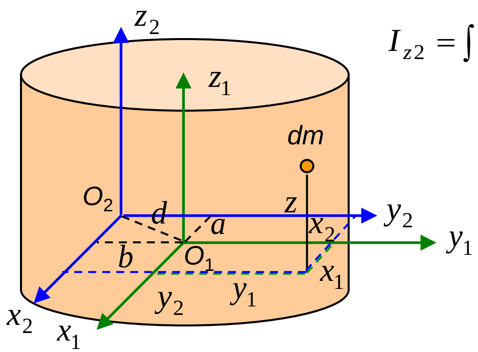
$$I_z = \int h^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$ **-осевой момент инерции твердого тела.**

Кроме осевого момента инерции твердого тела существуют другие виды моментов инерции:

$$I_{xy} = \int xydm$$ **- центробежный момент инерции твердого тела.**

$$I_O = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$ **- полярный момент инерции твердого тела.**

3. Теорема о моментах инерции твердого тела относительно параллельных осей – формула перехода к параллельным осям:



$$I_{z2} = \int (x_2^2 + y_2^2) dm = \int ((x_1 + a)^2 + (y_1 + b)^2) dm = \boxed{\int (x_1^2 + y_1^2) dm} + 2a\boxed{\int x_1 dm} + 2b\boxed{\int y_1 dm} + \boxed{(a^2 + b^2)}\boxed{\int dm}.$$

Момент инерции относительно исходной оси I_{z1}

S_{y1} S_{x1}

Статические моменты инерции относительно исходных осей

d^2

Расстояние между осями z_1 и z_2

M

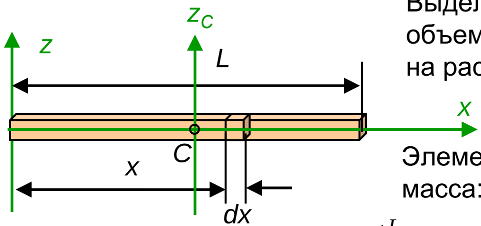
Масса тела

Таким образом: $$I_{z2} = I_{z1} + 2aS_{y1} + 2bS_{x1} + d^2 M.$$

Если ось z_1 проходит через центр масс, то статические моменты равны нулю: $$I_{z2} = I_{zC} + d^2 M.$$

Лекция 12 (продолжение 12.5)

4. Момент инерции однородного стержня постоянного сечения относительно оси:



Выделим элементарный объем $dV = Adx$ на расстоянии x:

Элементарная масса: $dm = \rho A dx$

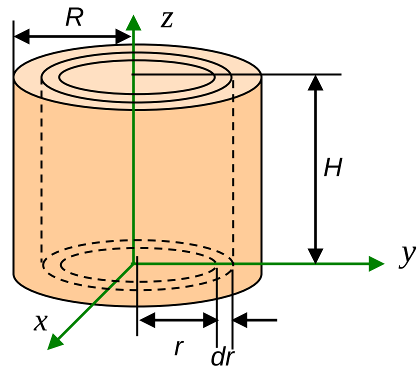
$$I_z = \int_0^L x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho A dx = \rho A \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \rho A \frac{L^3}{3} = \boxed{\frac{ML^2}{3}}$$

Для вычисления момента инерции относительно центральной оси (проходящей через центр тяжести) достаточно изменить расположение оси и задать пределы интегрирования (-L/2, L/2). Здесь продемонстрируем формулу перехода к параллельным осям:

$$I_z = I_{zC} + d^2 M. \Rightarrow \frac{ML^2}{3} = I_{zC} + \left(\frac{L}{2}\right)^2 M.$$

$$I_{zC} = \frac{ML^2}{3} - \left(\frac{L}{2}\right)^2 M = \boxed{\frac{ML^2}{12}}.$$

5. Момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси симметрии:



Выделим элементарный объем $dV = 2\pi r dr H$ (тонкий цилиндр радиуса r) :

Элементарная масса: $dm = \rho 2\pi r dr H$

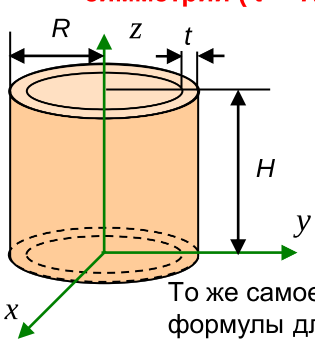
$$I_z = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho 2\pi r dr H =$$

$$= \rho 2\pi H \frac{r^4}{4}\Big|_0^R = \rho 2\pi H \frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{MR^2}{2}}$$

Здесь использована формула объема цилиндра $V=\pi R^2 H$.
Для вычисления момента инерции пустотелого (толстого) цилиндра достаточно задать пределы интегрирования от R_1 до R_2 ($R_2 > R_1$):

$$I_z = \rho 2\pi H \frac{r^4}{4}\Big|_{R1}^{R2} = \rho 2\pi H\left(\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right) = \boxed{\frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}}.$$

6. Момент инерции тонкого цилиндра относительно оси симметрии ($t \ll R$):



В силу малости толщины цилиндра считаем, что все точки находятся на одинаковом расстоянии R до оси и интегрирования не требуется. Объем $V = 2\pi R t H$. (тонкий цилиндр радиуса R с толщиной стенки t).

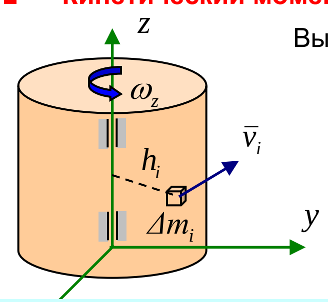
$$I_z = R^2 \rho 2\pi R t H = \boxed{MR^2}.$$

То же самое можно получить с использованием формулы для толстостенного цилиндра, учитывая малость t:

$$I_z = \frac{M((R^2 + (R-t)^2)}{2} = \frac{M(2R^2 \boxed{-2Rt + t^2})}{2}. \quad \ll 2R^2.$$

Поскольку высота цилиндров в результате не входит в формулы моментов инерции, то они остаются справедливыми для тонкого сплошного диска и обода колеса (тонкого кольца).

- **Кинетический момент твердого тела**



Выделим дискретный малый объем массы Δm_i :

$$\Delta K_{zi} = h_i \Delta m_i v_i = h_i \Delta m_i \omega_z h_i = \omega_z h_i^2 \Delta m_i.$$

$$K_z = \sum \Delta K_{zi} = \omega_z \sum h_i^2 \Delta m_i = \boxed{\omega_z I_z}.$$

Или переходя к бесконечно малым:

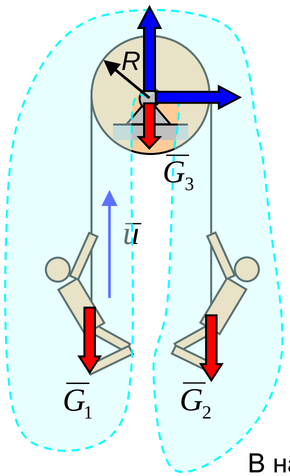
$$dK_z = h dm v = h dm \omega_z h = \omega_z h^2 dm.$$

$$K_z = \int dK_z = \omega_z \int h^2 dm = \boxed{\omega_z I_z}.$$

Кинетический момент вращающегося тела равен произведению угловой скорости на момент инерции относительно оси вращения.

Лекция 12(продолжение 12.6)

Пример: Два человека одинакового веса $G_1 = G_2$ висят на канате, переброшенном через сплошной блок весом $G_3 = G_1/4$. В некоторый момент один из них начал подниматься по канату с относительной скоростью u. Определить скорости подъема каждого из людей.



1. Выбираем объект движения (блок с людьми):
2. Отбрасываем связи (опорное устройство блока):
3. Заменяем связь реакциями (подшипника):
4. Добавляем активные силы (силы тяжести):
5. Записываем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения блока:

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e = G_1R - G_2R = 0.$$

Так как момент внешних сил равен нулю, то кинетический момент должен оставаться постоянным:

$$K_z = const. \quad \Rightarrow \quad K_{z0} = K_z.$$

В начальный момент времени $t = 0$ было равновесие и $K_{z0} = 0$.

После начала движения одного человека относительно каната вся система пришла в движение, но кинетический момент системы должен остаться равным нулю: $K_z = 0$.
Кинетический момент системы складывается из кинетических моментов обоих людей и блока:

$$K_z = K_{z1} + K_{z2} + K_{z3} = -\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_2}{g}v_2R + I_3\omega_3 = 0.$$

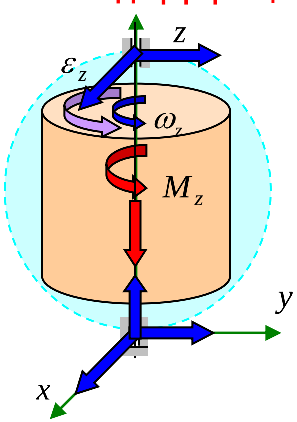
Здесь v_2 – скорость второго человека, равная скорости троса,

$$I_z = \frac{M_3R^2}{2} = \frac{G_3R^2}{2g} = \frac{G_1R^2}{4\cdot 2g}. \qquad \omega_3 = \frac{v_2}{R}.$$

$$-\frac{G_1}{g}(u - v_2)R + \frac{G_1}{g}v_2R + \frac{G_1R^2}{4\cdot 2g}\frac{v_2}{R} = 0. \qquad \boxed{v_2 = \frac{8u}{17}.}$$

$$\boxed{v_1 = u - \frac{8u}{17} = \frac{9u}{17}.}$$

- **Дифференциальное уравнение вращения твердого тело относительно оси:**



Запишем теорему об изменении кинетического момента твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси:

$$\boxed{\frac{dK_z}{dt} = M_z^e.}$$

Кинетический момент вращающегося твердого тела равен:

$$K_z = \omega_z I_z.$$

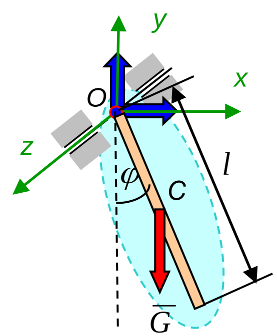
Момент внешних сил относительно оси вращения равен вращающему моменту (реакции и сила тяжести моментов не создают):

$$M_z^e = M_z = M_{\text{вращ}}.$$

Подставляем кинетический момент и вращающий момент в теорему

$$\frac{d(\omega_z I_z)}{dt} = M_z = M_{\text{вращ}}. \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z\ddot{\varphi} = M_z = M_{\text{вращ}}.}$$

Пример: Определить период малых свободных колебаний однородного стержня массы M и длиной l, подвешенного одним концом к неподвижной оси вращения.



$$\boxed{I_z\ddot{\varphi} = M_z = -Mg\frac{l}{2}\sin\varphi.}$$

Или: $$\ddot{\varphi} + \frac{Mg}{I_z}\frac{l}{2}\sin\varphi = 0.$$

В случае малых колебаний $\sin\varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{Mgl}{2I_z}\varphi = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0, \quad k = \sqrt{\frac{Mgl}{2I_x}}$$

Период колебаний: $$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{2I_x}{Mgl}}.$$

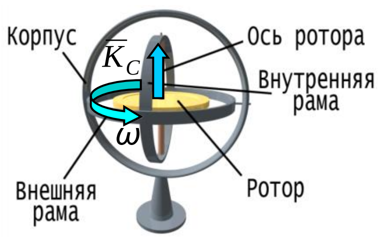
Момент инерции стержня: $$I_z = \frac{Ml^2}{3}. \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.}$$

Лекция 12 (продолжение 12.7)

- **Элементарная теория гироскопа:**

Гироскоп – твердое тело, вращающееся вокруг оси материальной симметрии, одна из точек которой неподвижна.

Свободный гироскоп – закреплен так, что его центр масс остается неподвижным, а ось вращения проходит через центр масс и может принимать любое положение в пространстве, т.е. ось вращения изменяет свое положение подобно оси собственного вращения тела при сферическом движении.



Основное допущение приближенной (элементарной) теории гироскопа – вектор момента количества движения (кинетический момент) ротора считается направленным вдоль собственной оси вращения. Таким образом, несмотря на то, что в общем случае ротор участвует в трех вращениях, принимается в расчет только угловая скорость собственного вращения $\omega = d\varphi/dt$. Основанием для этого является то, что в современной технике ротор гироскопа вращается с угловой скоростью порядка 5000-8000 рад/с (около 50000-80000 об/мин), в то время как две другие угловые скорости, связанные с прецессией и нутацией собственной оси вращения в десятки тысяч раз меньше этой скорости.

Основное свойство свободного гироскопа – ось ротора сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета (демонстрируется маятником Фуко, сохраняющим неизменной по отношению к звездам плоскость качания, 1852 г.).

Это вытекает из закона сохранения кинетического момента относительно центра масс ротора при условии пренебрежения трением в подшипниках осей подвески ротора, внешней и внутренней рамы:

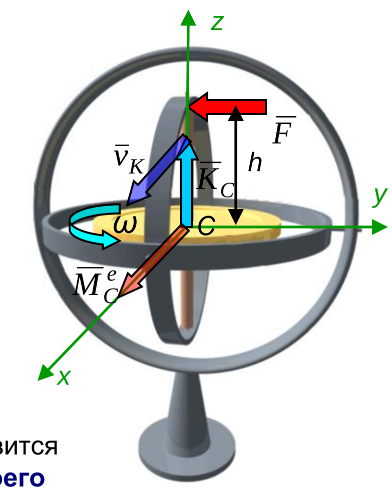
$$\boxed{\frac{d\overline{K}_C}{dt} = \overline{M}_C^e = 0;} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{K}_C = \overline{const}.}$$

Действие силы на ось свободного гироскопа.

В случае действия силы, приложенной к оси ротора, момент внешних сил относительно центра масс не равен нулю:

$$\frac{d\overline{K}_C}{dt} = \overline{M}_C^e = \overline{r} \times \overline{F}; \qquad \left|\overline{M}_C^e\right| = Fh.$$

Производная кинетического момента по времени равна скорости конца этого вектора (теорема Резаля): $\dfrac{d\overline{K}_C}{dt} = \overline{v}_K;\ \left(\dfrac{d\overline{r}}{dt} = \overline{v}\right). \Rightarrow \overline{v}_K = \overline{M}_C^e.$



Это означает, что **ось ротора будет отклоняться не в сторону действия силы, а в сторону вектора момента этой силы**, т.е. будет поворачиваться не относительно оси *x* (внутренняя подвеска), а относительно оси *y* (внешняя подвеска).

При прекращении действия силы ось ротора останется в неизменном положении, соответствующем последнему моменту времени действия силы, т.к. с этого момента времени момент внешних сил вновь становится равным нулю. **В случае кратковременного действия силы (удара) ось гироскопа практически не меняет своего положения**.

Таким образом, **быстрое вращение ротора сообщает гироскопу способность противодействовать случайным воздействиям**, стремящимся изменить положение оси вращения ротора, а при постоянном действии силы сохраняет положение плоскости, перпендикулярной действующей силе, в которой лежит ось ротора. Эти свойства используются в работе инерциальных систем навигации.