

Н. Н. БУХГОЛЬЦ

ОСНОВНОЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КИНЕМАТИКА, СТАТИКА,
ДИНАМИКА
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ
С. М. ТАРГОМ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования РСФСР
в качестве учебника для государственных университетов*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1965

531
Б 94
УДК 531/534

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к первому изданию	5
Предисловие к шестому изданию	5
Глава I. Введение	7
1. Предмет теоретической механики. Законы механики	7
2. Краткий исторический очерк развития механики	10
3. Векторы	18

РАЗДЕЛ I

КИНЕМАТИКА

Глава II. Кинематика точки	46
4. Введение в кинематику	46
5. Прямолинейное движение точки	52
6. Криволинейное движение точки	61
Глава III. Кинематика системы и абсолютно твердого тела	91
7. Механическая система	91
8. Основные движения твердого тела	94
9. Плоскопараллельное движение	100
10. Движение твердого тела около неподвижной точки	132
11. Сложное движение твердого тела	138
12. Движение свободного твердого тела	153
13. Сложное движение точки	158

РАЗДЕЛ II

СТАТИКА

Глава IV. Элементарная (геометрическая) статика	168
14. Введение в кинетику	168
15. Определения и аксиомы статики	183
16. Система сил, приложенных в одной точке. Сходящиеся силы	190
17. Трение и связи с трением	196
18. Параллельные силы	204
19. Центр тяжести	211
20. Момент силы	224
21. Теория пар	227
22. Система сил, произвольно расположенных в пространстве	234
23. Частные случаи систем сил	242

§ 24.	Условия равновесия систем сил	246
§ 25.	Оснoвы графостатики	257
§ 26.	Графический расчет ферм	265
Глава V. Аналитическая статика		272
§ 27.	Работа силы	272
§ 28.	Виртуальные перемещения точки	276
§ 29.	Статика материальной точки	282
§ 30.	Статика системы материальных точек	294
§ 31.	О равновесии гибкой и нерастяжимой нити	309
РАЗДЕЛ III		
ДИНАМИКА		
Глава VI. Динамика точки		319
§ 32.	Дифференциальные уравнения движения и решение задач динамики точки	319
§ 33.	Общие теоремы динамики точки	324
§ 34.	Прямолинейное движение материальной точки	350
§ 35.	Прямолинейные колебания точки	359
§ 36.	Движение свободной материальной точки в однородном поле тяжести	378
§ 37.	Движение свободной материальной точки под действием центральных сил	383
§ 38.	Движение несвободной материальной точки	403
§ 39.	Относительное движение материальной точки	438
§ 40.	Уравнения движения материальной точки в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)	452
Литература		461
Предметный указатель		462

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий курс имеет целью дать пособие для изучения теоретической механики студентам университетов и тех вузов, где теоретическая механика является самостоятельной дисциплиной, а также инженерам, желающим пополнить и углубить свои знания в этой области, полученные в технической школе.

Материалом для курса послужили лекции, читанные мною за последние годы в Московском государственном университете; часть этих лекций была записана и издана в литографированном виде моими учениками, которым я приношу глубокую благодарность.

При изложении я старался применять современные методы и, в частности, векторное исчисление, которое в настоящее время служит наиболее подходящим математическим аппаратом для различных отделов механики и математической физики. Необходимые сведения по векторному исчислению помещены в главе I.

Предлагаемая книга представляет собой первую часть курса и содержит кинематику, статику и динамику точки; вторая часть курса, издание которой предполагается в скором времени, будет содержать динамику системы, динамику твердого тела и аналитическую механику.

Н. Бухгольц

Москва, 1932 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

«Основной курс теоретической механики» профессора Н. Н. Бухгольца (1880—1944) построен на материале лекций, которые он в течение многих лет читал в Московском государственном университете. Курс, выдержавший при жизни автора пять изданий, зарекомендовал себя как хороший учебник для студентов университетов и как ценное пособие для учащихся других вузов, а также для инженеров, желающих пополнить и углубить свои знания в области механики. Большой заслугой Н. Н. Бухгольца явилось то, что он в своем курсе, своеобразном как по содержанию, так и по форме

изложения, впервые в нашей стране систематически применил векторный метод, наиболее подходящий для изложения механики и ставший сейчас общепринятым.

Курс разбит на две части. Первая часть содержит кинематику, геометрическую и аналитическую статику и динамику точки. Во второй части дается динамика системы материальных точек, динамика твердого тела и аналитическая механика. При сравнительно небольшом объеме каждой из частей в них с достаточной полнотой изложены все основные разделы теоретической механики.

Однако, как бы хорошо ни был написан тот или иной курс, длительно существовать как учебник он может лишь в том случае, если будет со временем совершенствоваться и обновляться, отражать процесс развития самой данной науки и методов ее преподавания. Не случайно поэтому даже хорошие учебники обычно умирают вместе с их авторами, если такой процесс обновления прекращается.

Со времени выхода в свет последних изданий книг Н. Н. Бухгольца прошло 20 лет. Естественно, что за эти годы изменились и программы курса теоретической механики и требования, предъявляемые к самим учебникам. Поэтому, несмотря на все достоинства «Основного курса теоретической механики», при настоящем его переиздании нельзя было ограничиться только устранением отдельных вкрапившихся в текст погрешностей или опечаток; чтобы сохранить курс как учебник, оказалось необходимым переработать весь материал книги и внести в нее ряд дополнений.

Наиболее существенной переработке подвергся материал §§ 9, 17, 27 и 37, а также п. 14 в § 6, п. 2, 3 в § 8, п. 3, 5 в § 13, п. 5 в § 25, п. 4, 5, 6 в § 33. Заново написаны п. 2 в § 2, п. 9 в § 6, п. 10, 12, 13 в § 9, п. 5 в § 17, п. 4 в § 24, п. 4, 5 в § 35, п. 7, 9 в § 37, п. 13, 14 в § 38; отдельные небольшие добавления сделаны во многих других местах книги; заново сделаны многие рисунки. Кроме того, во всех параграфах добавлено большое число задач и примеров. Для удобства ссылок нумерация параграфов сделана общей во всей книге. Терминология и обозначения автора в основном сохранены, однако термин «материальная частица» заменен на принятый в первых изданиях термин «материальная точка».

В тексте книги все внесенные изменения и дополнения специально не оговариваются; это лишь мешало бы пользоваться книгой как учебником.

С. М. Тарз

ГЛАВА ПЕРВАЯ ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет теоретической механики. Законы механики

1. Основные понятия. Теоретическая механика есть наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел. Будучи, по существу, одним из разделов физики, теоретическая механика выделилась в отдельную дисциплину и получила широкое самостоятельное развитие благодаря своим обширным и важным приложениям в естествознании и технике, одной из основ которых она является. Беря свое начало от техники и развиваясь вместе с ней, теоретическая механика особенно тесно связана с техническими науками, в которых законы и методы механики широко используются как при обосновании ряда исходных положений, так и при проведении многочисленных конкретных инженерных расчетов.

Движение, рассматриваемое в самом общем смысле слова, есть форма существования материи и обнимает собой все происходящие во вселенной изменения и процессы. В теоретической механике изучается одна из форм движения — механическое движение, состоящее в том, что тело изменяет с течением времени свое положение в пространстве по отношению к другим телам. В дальнейшем под термином «движение» мы всегда будем понимать *механическое* движение.

Для учета механического взаимодействия между телами в *классической* механике, основание которой положили Галилей и Ньютон, вводится понятие о *силе*¹⁾. Под механическим взаимодействием понимаются действия тел друг на друга, в результате которого происходит или изменение движения этих тел или изменение взаимного положения их частиц (деформация). В качестве меры механического взаимодействия материальных тел в механике вводится величина, называемая силой.

¹⁾ Вместо силы можно взять за основное понятие *энергию*, как это делается в так называемой *аналитической механике*. В системе механики, созданной Г. Герцем, сила как основное понятие была совсем устранена.

Для данного тела сила является внешним фактором, изменяющим его движение. Кроме этого внешнего фактора, характер движения тела будет зависеть от степени податливости тела оказываемому на него внешнему воздействию или, как говорят, от степени инертности тела. Чем больше инертность тела, тем медленнее изменяется его движение под действием данной силы, и наоборот. Мерой инертности материального тела является его *масса*, зависящая от количества вещества тела. Таким образом, понятиями, лежащими в основе классической механики, являются: движущаяся материя (материальные тела), пространство и время как формы существования движущейся материи, масса как мера инертности материальных тел и сила как мера механического взаимодействия между телами.

2. Законы механики. Соотношения между основными понятиями механики определяются *аксиомами* или *основными законами* движения (Axiomata, sive leges, motus), которые были даны Ньютоном в его «Principia»¹⁾.

1-й закон. *Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Первый закон включает в себе закон *инерции*, а также определение силы как причины, нарушающей инерциальное состояние тела. По этому закону тело само по себе, без всяких воздействий извне, совершает простейшее, *инерциальное* движение, скорость которого постоянна по величине и по направлению, а ускорение (изменение скорости) равно нулю; при действии силы скорость изменяется и, следовательно, появляется ускорение.

2-й закон. *Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Количество движения, по определению Ньютона, есть величина, пропорциональная произведению массы на скорость; следовательно, изменение количества движения по современной терминологии есть производная этой величины по времени, т. е. $\frac{d(mv)}{dt}$. Выбрав единицы для измерения массы и силы таким образом, чтобы фактор пропорциональности был равен единице, получим аналитическое выражение 2-го закона Ньютона в виде

$$\frac{d(mv)}{dt} = F$$

¹⁾ «Philosophiae naturalis principia mathematica» (1687). Имеется русский перевод акад. А. Н. Крылова; И. Ньютон, Математические начала натуральной философии (Собрание трудов акад. А. Н. Крылова, т. VII, изд. АН СССР, 1936). Формулировка законов Ньютона дается по этому переводу.

или, считая массу постоянной,

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

Так как $\frac{dv}{dt}$ есть ускорение, то 2-й закон Ньютона может быть кратко сформулирован так: *сила равна произведению массы на ускорение*. Этот закон, дающий связь между силой и ускорением, является основным законом динамики.

3-й закон. *Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — взаимодействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.*

Третьим законом устанавливается, что если на тело A действует какая-либо сила F_A , то это действие всегда оказывает некоторое тело B , на которое тело A действует в свою очередь с силой F_B , равной и противоположной силе F_A , и наоборот. Если силу F_A назовем *действием*, то F_B будет *противодействием*. Таким образом, третий закон указывает, что источником силы F_A , действующей на тело A , является тело B , на которое тело A действует с силой F_B , равной и противоположной силе F_A .

Аксиомы или законы движения заканчиваются следствиями из этих законов. Следствие 1-е в формулировке Ньютона гласит: *«При силах совокупных тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны при действии сил порознь»*. Это следствие представляет собой закон параллелограмма сил.

В такой формулировке законы механики были даны Ньютоном в 1687 г. Следуя современной терминологии в этих формулировках, надо под «телом» понимать материальную точку, т. е. тело достаточно малых размеров (см. § 14, п. 2).

3. Механику принято разделять на *кинематику* и *кинетика*. В кинематике изучается движение тел с геометрической точки зрения без учета причин, вызывающих изменение этого движения, т. е. сил. По существу кинематика представляет собой геометрию движущихся пространственных образов, или геометрию четырех измерений, причем четвертым измерением является время.

Кинетика посвящена изучению движения материальных тел в зависимости от действия на них сил и разделяется на *статику* — учение о равновесии тел под действием сил и *динамику* — учение о движении тел под действием сил. В динамике решается наиболее общая задача теоретической механики, а именно: по данным силам, действующим на тело, определить движение этого тела и, наоборот, по данному движению тела найти силы, на него действующие.

§ 2. Краткий исторический очерк развития механики

1. Механика, подобно геометрии, получила свое начало в глубокой древности под влиянием запросов практики; ее развитие неразрывно связано с развитием производительных сил общества. При постройке громадных сооружений, развалины которых сохранились до наших дней, постепенно накапливался опыт, обобщение которого привело к знанию некоторых законов механики; это давало возможность строить различные машины, употреблявшиеся для строительных и военных целей.

Механика как наука возникла с того времени, когда появились первые сочинения, дающие более или менее систематическое изложение накопленного опытом материала в виде общих законов. Первые дошедшие до нас сочинения по механике появились в древней Греции, где получили свое начало многие из точных наук.

Великий мыслитель и ученый древности Аристотель, ученик Платона, живший в IV веке до н. э. (384—322), касается учения о движении и силах в своих сочинениях «Физика», «Механика», «О мире и небе» и первый вводит термин «механика», который происходит от греческого слова μηχανή, что означает: изобретение, машина, сооружение. В сочинениях Аристотеля, носящих в основном философский, а не естественнонаучный характер, излагается учение о равновесии рычага и других машин, а также общее учение о движении. Метод Аристотеля существенно отличается от современного метода точных наук и носит метафизический характер. Аристотель стремится выяснить причины явлений чисто умозрительным путем, не прибегая к наблюдению и опыту, и поэтому иногда приходит к выводам, несогласным с действительностью; так, Аристотель считал скорости падающих тел пропорциональными их весу, полагал, что тело, движущееся прямолинейно с постоянной скоростью, находится под действием постоянной силы и др. Ошибочность этих взглядов была доказана только через 2000 лет Галилеем.

Появление «Начал» Евклида (III век до н. э.) дало толчок математической мысли древности и повлекло за собой сочинения знаменитого сиракузского геометра и механика Архимеда (287—212 до н. э.), который дал механике настоящее научное обоснование. В своих сочинениях Архимед, излагая учение о равновесии рычага и о центрах тяжести тел, дает основания геометрической статике; там же содержится учение о равновесии тел, плавающих в жидкости. Сочинения Архимеда отличаются строгостью своих выводов и изяществом метода.

Дальнейшее развитие механики в классической древности совершалось благодаря трудам греческих геометров, среди которых необходимо упомянуть Герона из Александрии (II век до н. э.), занимавшегося теорией равновесия простых машин, а также астрономов Гип-

парха (II век до н. э.) и Птолемея (II век н. э.), которые изучали видимое движение светил на небесной сфере. Птолемей дал свою знаменитую геоцентрическую картину мира, господствовавшую в течение двенадцати веков, до Коперника.

Средние века, после падения Римской империи, не дали ничего существенного для развития механики, как и других естественных наук, вследствие причин исторического характера, а также благодаря влиянию метафизики и схоластики, которыми вообще отличалась эта эпоха.

Интенсивное развитие естественных наук, а с ними и механики, начинается в эпоху Возрождения, с XV века, сначала в Италии, а затем и в других странах. Этот подъем связан с возникновением и ростом в странах Западной и Центральной Европы буржуазных отношений, давших толчок к развитию различных ремесел, торговли, мореплавания и военного дела (распространение огнестрельного оружия).

Среди деятелей эпохи Возрождения особенно выделяется гениальный художник, геометр и инженер, итальянец Леонардо да Винчи (1452—1519), которому принадлежат исследования в области теории механизмов, трения в машинах и движения по наклонной плоскости. Кроме того, он занимался перспективой, теорией теней и строил модели летательных машин. Им построен также эллиптический токарный станок, носящий до сих пор его имя. Другой замечательный деятель этой эпохи, великий польский ученый Николай Коперник (1473—1543) создал свою гелиоцентрическую картину мира, которая, сменив геоцентрическую картину Птолемея, произвела большой переворот в научном мировоззрении и оказала огромное влияние на все последующее развитие естествознания. Благодаря работам Коперника и многочисленным наблюдениям датского астронома Тихо-Браге Иоганн Кеплер (1571—1630) получил свои три знаменитых закона движения планет, послуживших Ньютону основанием для его закона всемирного тяготения¹⁾. Далее следует упомянуть о работах голландца Стевина (1548—1620), который исследовал законы равновесия тел на наклонной плоскости и в результате пришел к выводу основных законов статики.

Фундаментальное значение для этого периода развития механики имеют работы гениального итальянского ученого Галилея (1564—1642). До Галилея развивалась главным образом та часть механики, которая посвящена изучению законов равновесия тел, т. е. статики; что же касается законов движения тел под действием сил, т. е. динамики, то в этой области существовали довольно смутные представления,

¹⁾ Первые два закона Кеплера были опубликованы в 1609 г. в знаменитом сочинении «*Astronomia nova*»; третий закон был найден позднее и окончательно сформулирован в сочинении Кеплера «*Harmonices mundi*» (1619 г.).

так как само явление движения благодаря влиянию господствовавших в то время метафизических теорий Аристотеля казалось весьма загадочным и объяснялось иногда довольно путанными и надуманными способами. Галилей своим мощным умом оценил важность наблюдения и опыта для изучения явлений природы и благодаря этому установил правильное понимание законов движения, положив, таким образом, начало динамике. Изучая падение тел, он показал, что в безвоздушном пространстве, вблизи поверхности земли, все тела, независимо от их веса, будут падать одинаково (равноускоренно с одним и тем же ускорением), дал законы равномерно ускоренного движения, введя при этом само понятие ускорения, исследовал движение тела по наклонной плоскости и, рассматривая предельный случай горизонтальной плоскости, открыл закон инерции; им же был открыт закон независимости действия силы от состояния тела. Исследования Галилея изложены в его сочинении «Discorsi» (т. е. «Беседы»), написанном на итальянском языке и вышедшем в Лейдене в 1638 г.¹⁾

Работы Галилея были продолжены голландцем Христианом Гюйгенсом (1629—1695), который изучил движение маятника, обобщил введенное Галилеем понятие об ускорении и дал ряд теорем о центробежной силе.

Новый период развития механики начинается со времени великого английского математика и механика Исаака Ньютона (1643—1727), который завершил построение основ современной классической механики и, одновременно с Лейбницем, положил начало анализу бесконечно малых (около 1670 г.).

В своем сочинении «Philosophiae naturalis principia mathematica», которое Лагранж называет «величайшим из всех произведений человеческого ума», Ньютон как бы подводит итоги работы всех своих предшественников и создает логически стройную, законченную систему механики.

В своих «Principia» Ньютон дает разъяснения и определения основных понятий механики: массы, времени, пространства, силы, а также устанавливает основные законы движения (аксиомы), которые были приведены в § 1. На основании этих понятий и аксиом, представляющих собой обобщение многочисленных опытов и наблюдений, логически строится с помощью математического анализа вся система механики. Кроме создания системы механики, Ньютону принадлежит открытие закона всемирного тяготения, который лег в основу теоретической астрономии и небесной механики. В своих исследованиях Ньютон не пользуется методами открытого им анализа бесконечно малых, а употребляет главным образом геометрические методы, строя изложение по образцу «Начал» Евклида.

¹⁾ Имеется русский перевод: Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки и относящиеся к механике и местному движению, ГТТИ, М., 1934.

Одновременно с «Principia» Ньютона в 1687 г. появилось сочинение французского ученого Вариньона (1654—1722) «Проект новой механики», в котором, на основе доказанной им теоремы о моменте равнодействующей и правил сложения и разложения сил, дается систематическое изложение статики.

После появления созданного Ньютоном и Лейбницем исчисления бесконечно малых, в XVIII веке начался быстрый рост математических наук, а с ним и механики. Период XVIII и начала XIX века может быть справедливо назван «золотым веком» математических наук. Методы механики начали быстро совершенствоваться благодаря применению мощного математического аппарата — анализа бесконечно малых — и развитие механики шло вперед вместе с развитием математики. В свою очередь некоторые новые математические методы возникали и развивались в связи с решением ряда задач механики. Различия между этими двумя науками в «золотой век» математики не существовало.

В этом периоде братья Якоб и Иоганн Бернулли, исследуя аналитически движение тяжелой точки по различным кривым, положили начало вариационному исчислению. Кроме того, Иоганну Бернулли принадлежит точная формулировка одного из основных принципов механики — принципа виртуальных перемещений (1717 г.).

Основная заслуга в приложении методов анализа бесконечно малых к решению задач динамики принадлежит великому математику и механику Леонарду Эйлеру (1707—1783), являвшемуся с 1727 г. действительным членом молодой тогда Российской Академии наук. Эйлер разработал аналитические методы решения задач динамики путем составления и интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и дал аналитическую теорию движения твердого тела. Ему принадлежит первый курс механики в аналитическом изложении (*Mechanica sive motus scientia*), изданный в Петербурге в 1736 г.¹⁾ В 1743 г. появился труд французского энциклопедиста Даламбера (1717—1783) «*Traité de dynamique*»²⁾, в котором автор установил основной принцип механики, носящий его имя; этот принцип дает общий метод решения динамических задач для любых несвободных механических систем путем составления уравнений движения этих систем в форме уравнений статики. Аналитическое направление в развитии механики достигло наиболее широких обобщений в капитальном сочинении крупнейшего французского ученого Лагранжа (1736—1813) «*Mécanique analytique*», вышедшем в 1788 г.³⁾ В этом сочинении

¹⁾ См. русский перевод: Л. Эйлер, Основы динамики точки, ГОНТИ, М., 1938.

²⁾ В русском переводе: Ж. Даламбер, Динамика, ГТТИ, М. — Л., 1950.

³⁾ См. русский перевод: Ж. Лагранж, Аналитическая механика, т. I (2-е изд.) и т. II, ГТТИ, М. — Л., 1950.

вся механика изложена строго аналитическим методом на основе одного общего начала, без всяких чертежей.

Дальнейшее развитие аналитической механики связано с трудами творца «Небесной механики» Лапласа, Фурье, Гаусса, Пуассона, К. Якоби, Гамильтона, Остроградского, Кирхгофа, Гельмгольца, лорда Кельвина, Герца, Ковалевской, Ляпунова, Чаплыгина и многих других выдающихся ученых.

Одновременно с аналитическими в механике продолжали развиваться и геометрические методы исследования. В 1804 г. появилось сочинение французского геометра и механика Пуансо (1777—1859) «Éléments de statique»¹⁾, в котором излагается стройная система геометрической статики, причем, в отличие от Вариньона, в основу кладется разработанная Пуансо теория пар; им же была дана наглядная геометрическая картина движения твердого тела в случае, исследованном аналитически Эйлером.

Одновременно с разработкой и совершенствованием аналитических и геометрических методов исследования движений материальных частиц и твердых тел в механике под влиянием запросов практики возникает и интенсивно развивается целый ряд новых областей и направлений, таких как механика жидкостей и газов (гидромеханика, аэромеханика, газовая динамика), механика упруго и пластически деформируемых тел (теория упругости и теория пластичности), общая теория устойчивости равновесия и движения механических систем, механика тел переменной массы и др.

В середине XIX столетия в связи с быстрым ростом техники начинают развиваться различные области *технической механики*, целью которой является решение возможно более простыми методами соответствующих практических задач. Однако обширность и сложность задач, выдвигаемых современной техникой, требуют в настоящее время использования в технической механике не менее тонких математических методов, чем в механике теоретической.

В основе классической механики Галилея — Ньютона, кроме понятия о движении, изучением которого механика занимается, лежит вводимое аксиомами Ньютона понятие о *силе*, где сила определяется как абстрактно представленная причина изменения состояния движения. Понятие о силе возникло из примитивного опыта и наглядного представления о мускульном усилии человека. Это представление, будучи распространено на все виды движений, вызвало значительные затруднения при стремлении ученых-механиков создать логически строгую систему механики вследствие того, что понятие о силе само по себе связано с большим количеством не всегда ясных, а иногда и противоречивых опытных соотношений. Поэтому еще до работ Ньютона некоторые исследователи [как, например, Декарт (1596—1650)]

¹⁾ Есть русский перевод: Л. Пуансо, Начала статики, М. — П., 1920.

пытались обосновать систему механики, избегая вводить понятие о силе как внешней причине движения, а базируясь на понятии о движущейся материи. С этой, принципиально иной, точки зрения все механические явления объясняются как результат контактного взаимодействия движущихся масс. Эта точка зрения — *кинетическая*, в отличие от ньютоновской — *динамической*, строго и последовательно проведена в системе механики Г. Герца (1857—1894), где автор высказывает много блестящих и еще далеко не использованных идей; такой же точки зрения держались Гюйгенс, Даламбер, Ломоносов, в значительной мере Эйлер и др.

В начале XX века Альберт Эйнштейн (1879—1955) создал теорию относительности, которая представляет собой после Ньютона следующий крупный шаг в развитии механики. Основанная на теории относительности релятивистская механика вкладывает совершенно новое содержание в основные понятия механики о пространстве, времени, материи и в своих уравнениях учитывает взаимосвязь этих понятий; классическая ньютоновская механика является ее частным случаем и в пределе, при малых скоростях и на больших расстояниях от масс, совпадает с релятивистской. Кроме того, А. Эйнштейн, введя совершенно новое представление о пространстве, создал теорию тяготения — явления, ранее не поддавшегося объяснению.

2. В России первые научные исследования по механике появляются после открытия в 1725 г. в Петербурге Российской Академии наук, где работали такие крупнейшие механики XVIII века, как Д. Бернулли, Л. Эйлер и др., оставившие после себя ряд даровитых учеников и последователей.

Большое влияние на развитие механики, как и всей отечественной науки, оказало многогранное творчество первого русского академика М. В. Ломоносова (1711—1765), основоположника материалистической философии и опытной науки в России.

Со второй половины XVIII века в Академии наук, являвшейся одновременно и учебным заведением, а также в других, созданных в стране научных и учебных центрах, в том числе в основанном в 1755 г. Московском университете, начинают свою деятельность талантливые отечественные механики-теоретики С. К. Котельников (1723—1808) — автор первого на русском языке достаточно полного учебника механики, вышедшего в 1774 г., М. Е. Головин (1756—1790), М. И. Панкевич (1757—1812), С. Е. Гурьев (1764—1813) и др. Их деятельность способствовала быстрому распространению в стране знаний по механике, созданию оригинальных и переводных учебных руководств и дальнейшему развитию отечественной науки.

Период интенсивной творческой деятельности русских ученых-механиков начинается в XIX столетии трудами выдающегося исследователя М. В. Остроградского (1801—1861), основные работы которого посвящены дальнейшему развитию и обобщению аналитических

методов и общих принципов механики. Научное наследие М. В. Остроградского оказало сильное влияние на всю последующую деятельность школы механиков-аналитиков в нашей стране.

Другим крупнейшим ученым этого периода является П. Л. Чебышев (1821—1894), известный своими многочисленными математическими исследованиями и трудами по прикладной механике; он явился основоположником отечественной школы теории механизмов и машин. Большое внимание современников привлекли к себе исследования С. В. Ковалевской (1850—1891), завершившиеся решением одной из труднейших задач динамики твердого тела; до нее законченные результаты в этой области удалось получить только Эйлеру и Лагранжу. Особое значение для дальнейшего развития естествознания и техники имело творчество ученика П. Л. Чебышева, виднейшего математика и механика А. М. Ляпунова (1857—1918), создателя основ современной теории устойчивости равновесия и движения. На основные результаты и идеи Ляпунова опираются труды большого числа его учеников и последователей, способствовавших дальнейшему развитию этой области науки.

Со второй половины XIX столетия наряду с продолжающимися строгими и изящными аналитическими исследованиями в механике под влиянием чрезвычайно быстрого роста техники возникает и все более и более интенсивно разрастается другое направление, связанное с решением реальных практических задач; при этом важным методом исследования в механике наряду с математическим анализом и геометрией становится эксперимент. Выдающимися представителями этого направления являются творец теории вращательного движения артиллерийского снаряда в воздухе Н. В. Майевский (1823—1892); основоположник гидродинамической теории трения при смазке Н. П. Петров (1836—1920); «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский (1847—1921); создатель основ механики тел переменной массы, нашедшей важные приложения в теории реактивного движения, И. В. Мещерский (1859—1935); известный исследователь в области ракетной техники и теории межпланетных путешествий К. Э. Циолковский (1857—1935); автор выдающихся трудов во многих областях механики, непосредственно связанных с техникой, основоположник современной теории корабля А. Н. Крылов (1863—1945); один из крупнейших отечественных ученых, автор ряда фундаментальных работ по аналитической механике и аэродинамике, создатель основ аэродинамики больших скоростей С. А. Чаплыгин (1869—1942) и многие другие¹⁾.

Исключительное значение для дальнейшего развития научных исследований по механике в нашей стране имело творчество Н. Е. Жуков-

¹⁾ Более подробно о трудах отечественных ученых по механике см.: А. А. Космодемьянский, Очерки по истории механики, 2-е изд., «Промсвещение», М., 1964; Я. Л. Геронимус, Очерки о работах корифеев русской механики, ГТТИ, М., 1952.

ского, которому, кроме фундаментальных трудов по устойчивости движения, динамике твердого тела и гидродинамике, принадлежит разработка основ таких новых направлений в механике, как теория гидравлического удара в трубах, подземная гидравлика, теоретическая и экспериментальная аэродинамика, динамика самолета и др. Вся деятельность Н. Е. Жуковского и созданной им научной школы была направлена на решение реальных задач механики. Жуковский значительно расширил границы механики и разработал прочную теоретическую базу для ряда разделов техники, которые его современникам казались вообще не поддающимися строгому и точному анализу. «Гигантскому уму Н. Е. Жуковского, — писал один из его ближайших учеников и последователей Л. С. Лейбензон, — впервые после Галилея удалось объять грандиозную науку — механику во всей ее совокупности. Для него не было разделения механики на теоретическую и практическую. Перед его умственным взором стояла единая наука механика, которую он прилагал для решения проблем окружающей действительности».

Одновременно Н. Е. Жуковский, а также И. В. Мещерский, А. Н. Крылов и их последователи уделяли большое внимание постановке преподавания теоретической механики в вузах страны, повышению наглядности обучения и установлению тесной связи курса механики с прикладными науками.

Новый этап в развитии всей отечественной науки, в том числе и механики, наступает после Великой Октябрьской социалистической революции, когда наука становится важным государственным и все-народным делом. В научные исследования вместо одиночек ученых вовлекаются большие научные коллективы; в стране создаются все новые и новые научные центры с мощной экспериментальной базой и всеми современными средствами научного исследования.

В кратком очерке невозможно охарактеризовать все достижения советских ученых-механиков, сделавших ценный вклад и в дальнейшее развитие теории¹⁾ и в разработку методов приложения этой теории к решению разнообразных практических задач во многих областях современной техники, в том числе и в такой прославившей нашу страну области, как освоение космоса.

Творчество советских ученых, вносящих новые оригинальные идеи в развитие всех областей механики, служит целям дальнейшего прогресса народного хозяйства и культуры нашей великой Родины.

3. Успехи физики в начале нынешнего века, ознаменовавшиеся новыми исследованиями в области электродинамики и строения материи, показали, что законы классической механики Галилея — Ньютона применимы только к движению тел, размеры которых значительно

¹⁾ Обзор работ многих советских механиков можно найти в книге «Механика в СССР за 30 лет», Гостехиздат, М., 1950.

больше размеров атома, а скорости — значительно меньше скорости света. Для тел очень малых размеров и для очень больших скоростей выводы классической механики теряют свою силу, и сама механика нуждается в дальнейшем развитии.

Теория относительности, созданная А. Эйнштейном, внесла довольно существенные изменения в основания механики и показала ограниченность ньютоновских представлений о пространстве, времени и материи, вследствие чего стало возможным дать простое теоретическое обоснование ряду явлений, которые не могли быть объяснены с точки зрения классической механики. Кроме того, классическая механика оказалась неприменимой к теории строения атома, и это обстоятельство явилось причиной возникновения атомной, или квантовой, механики.

Несмотря на это, классическая механика Галилея — Ньютона продолжает сохранять свою огромную ценность как мощное орудие научного исследования различных вопросов естествознания и техники, и ее законы дают при этом вполне достаточную для практики точность. Все разнообразные технические сооружения и все современные расчеты, связанные с космическими полетами, построены на основании законов классической механики и, как показывает опыт, с успехом выполняют свое назначение. Поправки и изменения, вносимые в законы классической механики теорией относительности и квантовой механикой, исчезающе малы в обычных условиях и становятся заметными только при больших скоростях, близких к скорости света, и для тел, размеры которых имеют порядок размеров атома. Поэтому классическая механика Галилея — Ньютона никогда не потеряет своего научного значения и практической ценности.

§ 3. Векторы

1. Величины скалярные и векторные. Методы векторного исчисления, широко применяемые в механике и других отделах физики, имеют большое преимущество перед координатным методом в смысле сокращения письма, наглядности и физической картинности формул; но самым главным преимуществом этих методов является то, что векторные формулы не связаны с системой ориентировки (т. е. системой координат) и не изменяются при переходе от одной системы к другой; иными словами, векторные формулы *инвариантны* по отношению к преобразованиям координат. Не следует, однако, думать, что можно совершенно игнорировать координатный метод: последний иногда оказывается удобнее векторного, особенно в тех случаях, когда требуется довести вычисление до конца и получить конкретный численный результат.

В математической физике встречаются два типа величин: скалярные и векторные. *Скалярной величиной* или просто *скаляром*

называется величина, которая вполне определяется одним числом, выражающим отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Для всякой скалярной величины можно установить *шкалу* (латинское *scala*), на которой для каждого значения скаляра закреплено определенное место; отсюда и происхождение термина «скаляр». Вообще скаляр может быть представлен положительным или отрицательным действительным числом. Масса, температура, энергия, объем и много других физических величин являются скалярными величинами.

Простейшей *векторной величиной*, или *вектором*, является направленный отрезок, который вполне определяется заданием его длины (численной величины вектора), измеренной в некотором масштабе, и его направления в пространстве. Такие физические величины, как скорость, ускорение или сила, представляют собой величины векторные: задание этих величин получает смысл только тогда, когда, кроме их численных значений, указывается и их направление. Термин «вектор» происходит от латинского слова *vehere*, что означает «влечь», «тянуть».

В зависимости от свойств изображаемой им величины вектор может быть *свободным*, т. е. приложенным в любой точке пространства, *скользящим*, т. е. приложенным в любой точке некоторой прямой, называемой *основанием* или *линией действия* вектора, и *неподвижным*, т. е. приложенным в некоторой фиксированной точке (подробнее об этом см. в конце параграфа, п. 13).

Мы здесь рассмотрим основы векторного исчисления для свободных векторов, так как изучение скользящих и неподвижных векторов сводится к изучению векторов свободных.

Как известно из аналитической геометрии, косинусы трех углов, образуемых направлением l какого-либо вектора с осями прямоугольных координат, связаны соотношением

$$\cos^2(\widehat{l, x}) + \cos^2(\widehat{l, y}) + \cos^2(\widehat{l, z}) = 1;$$

следовательно, направление вектора определяется двумя числами; приняв во внимание еще численное значение вектора, получим для свободного вектора другое определение: свободный вектор есть величина, вполне определяющаяся тремя числами (в пространстве трех измерений) и удовлетворяющая правилу сложения, изложенному ниже, в п. 5.

2. Геометрическое представление вектора.

Единичный вектор. Умножение вектора на скаляр.

Вектор может быть геометрически изображен прямолинейным отрезком AB (рис. 1), длина которого в известном масштабе соответствует численному значению вектора, а направление совпадает с направлением вектора. Численную величину вектора называют еще



Рис. 1.

модулем вектора. Концы A и B отрезка AB , изображающего вектор, называются соответственно *началом* и *концом* вектора \overline{AB} . Символом AB обыкновенно обозначается отрезок независимо от его направления. Для обозначения вектора будем пользоваться тем же символом, но с чертой наверху. Тогда

$$\text{вектор } AB = \overline{AB};$$

длина отрезка AB представит его модуль

$$\text{модуль вектора } \overline{AB} = |\overline{AB}| = AB.$$

Часто вектор обозначают одной буквой с чертой над ней или буквой, напечатанной жирным шрифтом:

$$\text{вектор } a = \overline{a} = \mathbf{a},$$

а его модуль — символом $|a|$ или буквой, напечатанной обыкновенным шрифтом; таким образом, $|a| = a$. Мы будем обозначать векторы жирными буквами.

Два вектора считаются равными, если они параллельны, направлены в одну сторону и имеют равные модули (рис. 2), т. е. если

$$a = b \text{ и } a \parallel\!\!\!\parallel b,$$

$$a = b.$$

При изменении направления вектора a на противоположное получим вектор, противоположный a , который будем обозначать символом $-a$ (рис. 3), т. е. если

$$a = b \text{ и } a \uparrow\!\!\!\downarrow b,$$

$$a = -b.$$

Если $a \parallel b$, то векторы называются параллельными, или коллинеарными; они могут быть *одинаково направленными* и *противоположно направленными*. Иногда первые векторы называются просто *параллельными*, а вторые *антипараллельными*.

Векторы, параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Вектор, по направлению своему совпадающий с направлением данного вектора и имеющий модуль, равный единице, называется *единичным* вектором, или *ортом* данного вектора. Очевидно, что длина отрезка, изображающего единичный вектор, должна быть равна единице длины. Единичный вектор будем обозначать тем же символом,

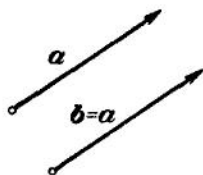


Рис. 2.

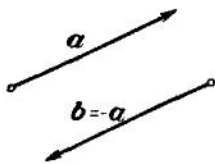


Рис. 3.

что и данный вектор, но с показателем 0, т. е. (рис. 4)

единичный вектор для $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0$.

Из определения следует, что

$$|\mathbf{a}^0| = 1.$$

При помощи единичного вектора всякий вектор может быть представлен как произведение модуля на единичный вектор, т. е.

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0, \quad \mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{a}. \quad (1)$$

При таком представлении вектор распадается на два элемента: модуль, характеризующий численное значение вектора, и единичный вектор, определяющий направление вектора в пространстве.

При умножении вектора на скаляр m получаем новый вектор

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a} = ma\mathbf{a}^0. \quad (2)$$

Вектор \mathbf{b} , очевидно, параллелен вектору \mathbf{a} (рис. 5) и направлен в ту же или противоположную сторону, в зависимости от знака скаляра m ; модуль вектора $m\mathbf{a}$ будет:

$$|m\mathbf{a}| = |m| \cdot |\mathbf{a}| = |m|a. \quad (3)$$

Если два вектора коллинеарны, то частное от их деления есть всегда скаляр, положительный или отрицательный, в зависимости от направлений этих векторов.

3. Проекция вектора на ось и на плоскость. Осью называется прямая, на которой установлено положительное направление отсчета. Углом между двумя векторами (или между вектором и осью, или между двумя осями) называется наименьший угол, на который нужно повернуть один вектор (или ось), чтобы он совпал по направлению с другим вектором (осью) (рис. 6).

Проекцией вектора $\overline{AB} = \mathbf{a}$ на ось l (рис. 7) называется взятая с соответствующим знаком длина отрезка A_1B_1 , заключенного между проекциями начала и конца вектора \overline{AB} на эту ось (здесь и далее рассматриваются только ортогональные проекции); при этом проекция берется со знаком плюс, если перемещение от A_1 к B_1 совпадает с положительным направлением оси l , и



Рис. 4.



Рис. 5.

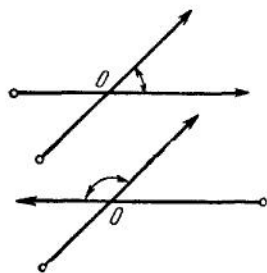


Рис. 6.

со знаком минус, если не совпадает. Из определения следует, что

$$\text{пр}_l \overline{AB} = (\overline{AB})_l = \pm |A_1 B_1| = \pm |AA'| = AB \cos(\widehat{AB, l}) \quad (4)$$

или

$$\text{пр}_l(\mathbf{a}) = a_l = a \cos(\widehat{\mathbf{a}, l}). \quad (5)$$

Таким образом, проекция вектора на ось равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью проекций.

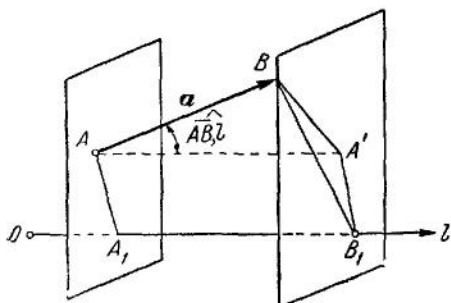


Рис. 7.

Согласно определению проекция вектора на ось есть величина скалярная, положительная или отрицательная в зависимости от того, острый или тупой угол образует проектируемый вектор с осью проекций.

Если отрезку, представляющему собой проекцию вектора на ось, дадим направление, совпадающее с направлением перемещения от проекции начала вектора к проекции его

конца, то получим вектор, называемый ортогональной составляющей, или компонентом вектора \mathbf{a} по оси l .

Очевидно, ортогональная составляющая вектора \mathbf{a} по оси l равна его проекции на эту ось, умноженной на единичный вектор, соответствующий направлению оси, т. е.

$$a_l = a_l \mathbf{l}^0. \quad (6)$$

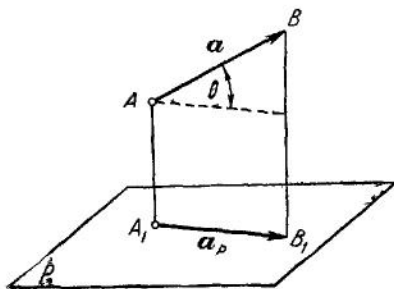


Рис. 8.

Проекцией вектора $\overline{AB} = \mathbf{a}$ на плоскость P называется вектор $\overline{A_1 B_1}$, соединяющий проекции начала и конца вектора \overline{AB} на эту плоскость (рис. 8). По определению $\mathbf{a}_p = \overline{A_1 B_1}$ есть вектор, так как для его задания необходимо, кроме численной величины $A_1 B_1$, указать еще и направление этого отрезка

в плоскости P . Модуль вектора \mathbf{a}_p определяется равенством

$$a_p = |A_1 B_1| = a \cos \theta, \quad (7)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{a}_p .

4. Аналитическое задание вектора. Аналитически вектор вполне определяется тремя своими проекциями на оси координат; эти проекции поэтому иногда называются координатами вектора.

Если дан вектор \mathbf{a} , т. е. даны его модуль a и его направление, которое определяется направляющими косинусами, то известны и проекции вектора на оси координат; в самом деле, на основании равенства (5) эти проекции будут (рис. 9):

$$\left. \begin{aligned} a_x &= a \cos(\widehat{\mathbf{a}, x}), \\ a_y &= a \cos(\widehat{\mathbf{a}, y}), \\ a_z &= a \cos(\widehat{\mathbf{a}, z}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

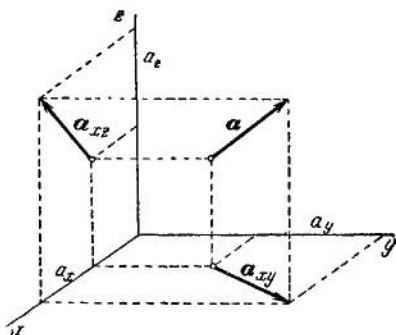


Рис. 9.

Обратно, если даны проекции вектора на оси координат, то вектор определен. Действительно, возведя почленно в квадрат равенства (8) и складывая их, имеем:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2,$$

откуда найдем модуль вектора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (9)$$

Далее на основании (8) и (9) получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{a}, x}) &= \frac{a_x}{a} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos(\widehat{\mathbf{a}, y}) &= \frac{a_y}{a} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos(\widehat{\mathbf{a}, z}) &= \frac{a_z}{a} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Формулы (10) дают выражения направляющих косинусов через проекции вектора.

В дальнейшем единичные векторы по направлению прямоугольных координатных осей будем обозначать через \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} (вместо x^0 , y^0 и z^0); тогда составляющие вектора по осям координат будут:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_x &= a \cos(\widehat{\mathbf{a}, x}) \mathbf{i}, \\ \mathbf{a}_y &= a \cos(\widehat{\mathbf{a}, y}) \mathbf{j}, \\ \mathbf{a}_z &= a \cos(\widehat{\mathbf{a}, z}) \mathbf{k}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

На основании (1) и (11) получим выражения для компонентов единичного вектора:

$$\left. \begin{aligned} a_x^0 &= \cos(\widehat{a, x}) i, \\ a_y^0 &= \cos(\widehat{a, y}) j, \\ a_z^0 &= \cos(\widehat{a, z}) k \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Отсюда видно, что проекции единичного вектора на оси координат равны направляющим косинусам вектора. В этом смысле и говорят, что «единичный вектор задает направление».

5. Сложение и вычитание векторов. Суммой двух векторов a и b называется вектор $c = a + b$, соединяющий начало вектора a с концом вектора b , если вектор b

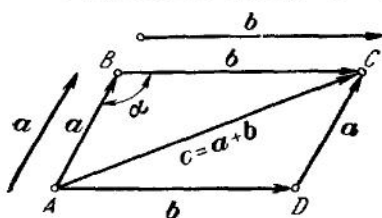


Рис 10

отложен от конца вектора a (рис 10). Это чисто формальное определение суммы векторов имеет свое обоснование во многих законах природы, например законе параллелограмма сил, параллелограмма скоростей и др. Из рис. 10 ясно, что

$$a + b = b + a, \quad (13)$$

так как $a + b$ и $b + a$ равны одной и той же диагонали c параллелограмма, построенного на векторах a и b . Отсюда вытекает, что сложение двух векторов обладает свойством *коммутативности* (*переместительности*).

Из $\triangle ABC$ имеем

$$c^2 = |a + b|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

отсюда, так как $\alpha = \pi - (\widehat{a, b})$,

$$c = |a + b| = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(\widehat{a, b})}. \quad (14)$$

Из (14) вытекает, что если $(\widehat{a, b}) = 0$, то

$$|a + b| = a + b,$$

если же $(\widehat{a, b}) = \pi$, то, полагая для определенности $a > b$, имеем:

$$|a + b| = a - b;$$

вообще же

$$a - b \leq |a + b| \leq a + b.$$

Сумму *нескольких* векторов получим последовательным применением закона сложения двух векторов, для получения суммы n векторов a, b, c, d, \dots, l, m сумму двух первых векторов $(a+b)$ сложим с третьим c , полученную сумму трех первых векторов $(a+b+c)$ сложим с четвертым вектором и т. д; сложив сумму $n-1$ первых векторов $(a+b+c+d+\dots+l)$ с последним вектором m (рис. 11), получим сумму всех n векторов

$$s = a + b + c + d + \dots + l + m. \quad (15)$$

Таким образом, сумма нескольких векторов есть вектор, который изображается замыкающей стороной ломаной линии, составленной из слагаемых векторов, при этом начало каждого последующего слагаемого вектора откладывается от конца предыдущего, а замыкающий вектор направлен от начала первого слагаемого вектора к концу последнего.

Составленный таким способом многоугольник носит название *векторного многоугольника*, а самый метод — *правила векторного многоугольника*

Если ломаная линия, составленная из слагаемых векторов, замыкается сама (т. е. если конец последнего из слагаемых векторов совпадает с началом первого), то сумма векторов равна нулю (вектор равен нулю, если его модуль равен нулю)

Так как при сложении любой пары векторов в равенстве (15) согласно уравнению (13) имеет место закон коммутативности, то и сумма n векторов обладает свойством *коммутативности*.

Непосредственно из рис. 11 видно, что сумма n векторов обладает также свойством *ассоциативности (сочетательности)*, т. е. что

$$\begin{aligned} s &= a + b + c + d + \dots + l + m = \\ &= (a + b) + c + d + \dots + (l + m) = \\ &= (a + b + c) + (d + \dots + l) + m \end{aligned}$$

и т. д.

Свойство коммутативности, позволяя сделать всевозможные перестановки слагаемых, распространяет ассоциативность на любые сочетания слагаемых, например

$$\begin{aligned} (a + b + c) + d + \dots + (l + m) = \\ = (d + m) + (a + l + c) + \dots + b. \quad (16) \end{aligned}$$

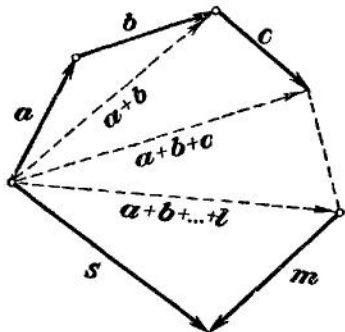


Рис. 11.

Свойства коммутативности и ассоциативности, в сущности, и оправдывают описанный геометрический метод сложения векторов по правилу векторного многоугольника. Заметим, что в общем случае этот многоугольник пространственный, так как составляющие его векторы вообще не компланарны.

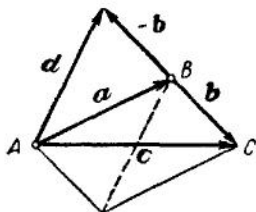


Рис. 12.

В случае коллинеарности слагаемых векторов (т. е. когда они лежат на одной прямой) векторное сложение сводится к алгебраическому сложению направленных отрезков.

Разностью двух векторов a и b называется вектор d , получающийся от сложения вектора a с вектором $-b$, противоположным b (рис. 12), т. е.

$$d = a - b = a + (-b). \quad (17)$$

Из рис. 12 видно, что сумма $c = a + b$ есть одна из диагоналей параллелограмма, построенного на векторах a и b , а разность $d = a - b$ есть другая его диагональ.

6. Разложение вектора по направлениям координатных осей.

Разложение вектора на сумму нескольких векторов есть вообще задача неопределенная, но в некоторых случаях, при наличии дополнительных условий, эта задача может стать определенной. К таким случаям принадлежат: разложение вектора по трем заданным неко-

планарным направлениям и разложение вектора по двум заданным направлениям, компланарным с данным вектором.

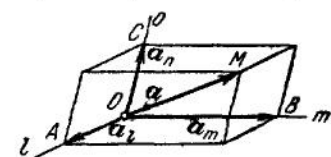


Рис. 13.

а) Пусть вектор $a = \overline{OM}$ требуется представить в виде суммы трех некопланарных векторов, параллельных заданным прямым. Для этого через начало вектора проводим прямые Ol , Om и On ,

параллельные заданным направлениям, и на векторе \overline{OM} , как на диагонали, строим параллелепипед, ребра которого направлены по этим прямым (рис. 13). Тогда, как ясно из рисунка,

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$$

или

$$a = a_l + a_m + a_n, \quad (18)$$

где обозначено:

$$\overline{OA} = a_l, \quad \overline{OB} = a_m, \quad \overline{OC} = a_n.$$

Если триэдр lmn принять за оси косоугольной системы координат, то векторы a_l , a_m , a_n будут косоугольными составляющими (компонентами) вектора a по осям l , m , n . При этом равенство (18)

можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a_l \mathbf{l}^0 + a_m \mathbf{m}^0 + a_n \mathbf{n}^0, \quad (19)$$

где \mathbf{l}^0 , \mathbf{m}^0 , \mathbf{n}^0 суть единичные векторы, соответствующие направлениям l , m , n . В случае прямоугольной системы xuz (рис. 14) имеем:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad (20)$$

где \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z будут уже ортогональными (прямоугольными) составляющими вектора \mathbf{a} по осям x , y , z .

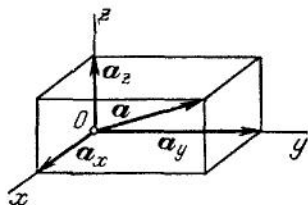


Рис. 14.

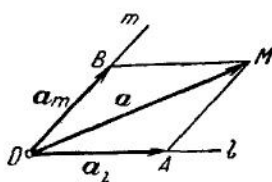


Рис. 15.

б) Пусть вектор \mathbf{a} требуется разложить по двум направлениям, компланарным с ним. Поступая аналогично предыдущему случаю, имеем (рис. 15):

$$\overline{OM} = \mathbf{a} = \overline{OA} + \overline{OB},$$

или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_l + \mathbf{a}_m = a_l \mathbf{l}^0 + a_m \mathbf{m}^0, \quad (21)$$

где \mathbf{a}_l и \mathbf{a}_m будут косоугольными компонентами вектора \mathbf{a} в осях l , m . В случае прямоугольной плоской системы координат xu (рис. 16)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j}. \quad (22)$$

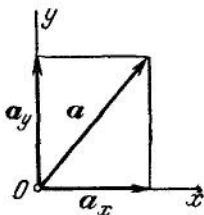


Рис. 16.

7. Теорема о проекции суммы векторов. Аналитический способ сложения векторов. Докажем теорему: *Проекция суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов на ту же ось.*

Пусть имеем n векторов

$$\mathbf{a}_v = a_{vx} \mathbf{i} + a_{vy} \mathbf{j} + a_{vz} \mathbf{k} \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (23)$$

Складывая эти векторы, получим:

$$\mathbf{s} = \sum_{v=1}^{v=n} \mathbf{a}_v = \sum_{v=1}^{v=n} a_{vx} \mathbf{i} + \sum_{v=1}^{v=n} a_{vy} \mathbf{j} + \sum_{v=1}^{v=n} a_{vz} \mathbf{k}. \quad (24)$$

Сравнивая найденное выражение с равенством (20), видим, что скалярные суммы $\sum_v a_{vx}$, $\sum_v a_{vy}$ и $\sum_v a_{vz}$ суть проекции вектора $\mathbf{s} = \sum_v \mathbf{a}_v$ на соответствующие оси координат, т. е.

$$s_x = \sum_{v=1}^{v=n} a_{vx}, \quad s_y = \sum_{v=1}^{v=n} a_{vy}, \quad s_z = \sum_{v=1}^{v=n} a_{vz}. \quad (25)$$

Теорема доказана. Одновременно формулы (25) определяют проекции вектора \mathbf{s} на оси координат. Модуль суммы \mathbf{s} выразится тогда согласно (9) равенством

$$s = \left| \sum_{v=1}^{v=n} \mathbf{a}_v \right| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{v=1}^{v=n} a_{vx} \right)^2 + \left(\sum_{v=1}^{v=n} a_{vy} \right)^2 + \left(\sum_{v=1}^{v=n} a_{vz} \right)^2}. \quad (26)$$

Углы, образуемые вектором \mathbf{s} с осями координат, найдутся по формулам, аналогичным (10).

8. Произведение векторов. В векторном исчислении различают два вида умножения векторов: скалярное и векторное.

а) *Скалярное*, или *внутреннее*, произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} есть скалярная величина, равная произведению модулей a и b этих векторов, умноженному на косинус угла $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ между ними. Операция скалярного умножения обозначается обычно символом $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ [иногда (\mathbf{a}, \mathbf{b}) или $\mathbf{a}\mathbf{b}$, но мы будем всегда применять обозначение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$]. По определению

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (27)$$

Скалярное произведение двух векторов можно еще рассматривать как произведение модуля одного вектора на проекцию на него другого (рис. 17), а именно

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab_a = ba_b = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (28)$$

Непосредственно из определения скалярного произведения следует, что:

1) скалярное произведение двух векторов обладает свойством коммутативности, т. е.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}; \quad (29)$$

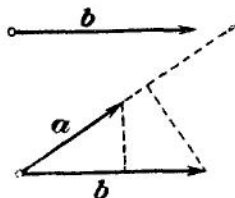


Рис. 17.

2) скалярное произведение обладает свойством дистрибутивности (распределительности) относительно суммы векторов, т. е.

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \quad (30)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot c &= c \cdot (a + b) = c(a + b)_c = ca_c + cb_c = \\ &= c \cdot a + c \cdot b = a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

Кроме того, как легко видеть,

$$ma \cdot nb = mna \cdot b; \quad (31)$$

из равенства (27) следует еще, что

$$\left. \begin{aligned} \text{когда } a \downarrow\downarrow b, \text{ то } \cos(\widehat{a, b}) &= 1 \text{ и } a \cdot b = ab, \\ \text{когда } a \uparrow\uparrow b, \text{ то } \cos(\widehat{a, b}) &= -1 \text{ и } a \cdot b = -ab, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

а также, что

$$\left. \begin{aligned} \text{если } a \perp b, \text{ то } \cos(\widehat{a, b}) &= 0 \text{ и } a \cdot b = 0, \\ \text{если } a = b, \text{ то } \cos(\widehat{a, b}) &= 1 \text{ и } a \cdot a = a^2, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

т. е. 1) скалярное произведение двух взаимно перпендикулярных векторов равно нулю; 2) скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

Для единичных векторов i, j и k формулы (33) дают:

$$\left. \begin{aligned} i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k &= 1, \\ j \cdot k = k \cdot i = i \cdot j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Опираясь на распределительный закон скалярного умножения (30) и на формулы (34), получим выражение скалярного произведения двух векторов через их проекции. Имеем:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k.$$

тогда

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) = \\ &= a_x b_x i \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_x b_z i \cdot k + a_y b_x j \cdot i + a_y b_y j \cdot j + \\ &+ a_y b_z j \cdot k + a_z b_x k \cdot i + a_z b_y k \cdot j + a_z b_z k \cdot k = \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, мы находим, что скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений из одноименных (по индексу) проекций векторов на координатные оси:

$$a \cdot b = ab \cos(\widehat{a, b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (36)$$

Отсюда имеем выражение косинуса угла между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b}

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}. \quad (37)$$

Если вектор \mathbf{a} перпендикулярен к вектору \mathbf{b} , то

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (38)$$

Рассматривая выражение (5) проекции вектора \mathbf{a} на ось l , видим, что

$$a_l = a \cos(\widehat{\mathbf{a}, l}) = a \cdot 1 \cdot \cos(\widehat{\mathbf{a}, l}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{l}^0, \quad (39)$$

т. е. проекция вектора на ось есть скалярное произведение вектора на единичный вектор данной оси.

б) *Векторное, или внешнее, произведение* двух векторов есть вектор, модуль которого равен произведению модулей перемножаемых векторов, умноженному на синус угла между ними, а направление перпендикулярно к плоскости, проходящей через оба вектора, и выбрано так, чтобы, смотря из конца полученного вектора, мы видели вращение первого множителя для кратчайшего совмещения его со вторым против хода часовой стрелки (рис. 18)¹⁾. Операция векторного умножения обозначается обычно символом $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (иногда $[\mathbf{a}\mathbf{b}]$ или $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, но мы будем всегда применять обозначение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$). По определению

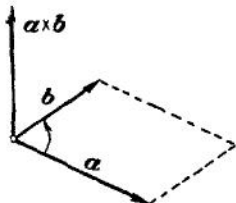


Рис. 18.

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \quad (40)$$

В основу выбора направления векторного произведения положено, очевидно, известное *правило правого винта*. В винте мы имеем сочетание определенного направления с вращением в плоскости, перпендикулярной к этому направлению. Соответственно понятиям о *левом* (с левой нарезкой) и *правом* (с правой нарезкой) винтах различают также левую и правую системы координат (рис. 19). В левой системе координат кратчайшее совмещение оси x с осью y видно с конца оси z по ходу часовой стрелки, а в правой — против хода часовой стрелки. На плоскости обычно всегда пользуются пра-

¹⁾ Строго говоря, векторное произведение геометрически изображается односторонней площадью параллелограмма, построенного на умножаемых векторах, а площадь параллелограмма в свою очередь — вектором, который направлен так, чтобы, смотря из конца этого вектора, мы видели обход контура, ограничивающего площадь, против хода стрелки часов (т. е. как указано в определении). Таким образом, векторное произведение, по существу, есть не вектор, а антисимметричный тензор второго ранга.

вой системой координат x, y . Поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться *правой* системой координат и для пространства, так как единообразный выбор координатных систем на плоскости и в пространстве весьма целесообразен и при рассмотрении вопросов теории и при решении практических задач.

Непосредственно из определения векторного умножения следует, что:

1) модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (см. рис. 18);

2) векторное умножение двух векторов свойством коммутативности не обладает, потому что

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}); \quad (41)$$

это следует из того, что $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$, а направления этих произведений (рис. 20) противоположны.

Кроме того, легко видеть, что

$$m\mathbf{a} \times n\mathbf{b} = mn(\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (42)$$

Геометрически векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} можно найти следующим построением (рис. 21): проводим плоскость P , перпендикулярную к вектору \mathbf{a} , строим ортогональную проекцию вектора \mathbf{b} на плоскость P , поворачи-

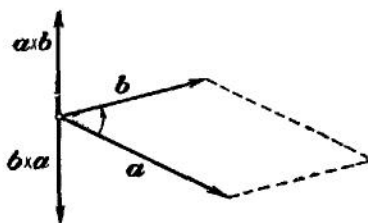


Рис. 20.

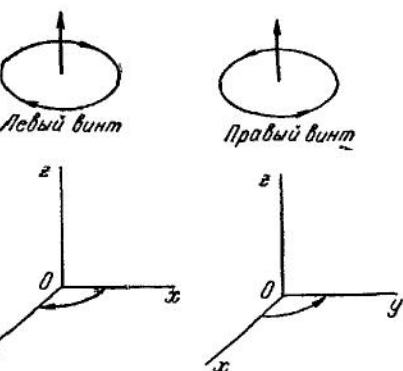


Рис. 19.

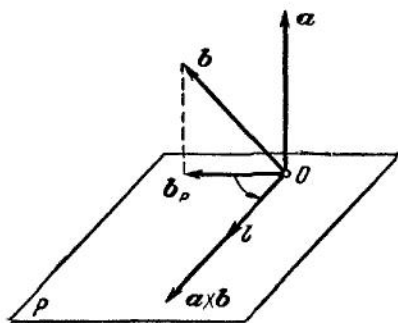


Рис. 21.

чиваем эту проекцию в плоскости P вокруг точки O на 90° против хода часовой стрелки (если смотреть на плоскость с конца вектора \mathbf{a}); умножив полученный вектор \overline{Ol} на \mathbf{a} , найдем вектор $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Действительно,

$$\mathbf{b}_P = b \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \mathbf{b}_P^0, \quad (43)$$

после же поворота вектора \mathbf{b}_p на 90° модуль его останется неизменным, а единичный вектор из \mathbf{b}_p^0 перейдет в $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0$; следовательно, полученный после поворота вектор \overline{Ol} будет равен

$$\overline{Ol} = b \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^0 = \frac{1}{a} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

откуда $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a \cdot \overline{Ol}$. Пользуясь этим представлением векторного произведения, можно доказать, что

3) векторное умножение обладает свойством *дистрибутивности* по отношению к сумме двух векторов:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \quad (44)$$

Этот результат легко получить, если учесть, что

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})_p = \mathbf{a}_p + \mathbf{b}_p.$$

Отметим следующие частные случаи векторного умножения:

$$\text{если } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}, \text{ то } \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0 \text{ и } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0, \quad (45)$$

$$\text{если } \mathbf{a} = \mathbf{b}, \text{ то } \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 0 \text{ и } \mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0, \quad (46)$$

$$\text{если } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}, \text{ то } \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 1 \text{ и } |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab, \quad (47)$$

т. е. 1) если векторы коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю, 2) векторный квадрат вектора равен нулю и 3) модуль векторного произведения двух взаимно перпендикулярных векторов равен произведению их модулей.

Для единичных векторов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ формулы (46) и (47) дают:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad (48)$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad (49)$$

а также, согласно свойству (41),

$$\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}. \quad (50)$$

Теперь найдем выражение векторного произведения векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} через их проекции. Имеем:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}.$$

Перемножая правые части *векторно* и пользуясь последовательно дистрибутивным законом (44), а также равенствами (48), (49) и (50),

получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\ &\quad + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \\ &= 0 + a_x b_y \mathbf{k} - a_x b_z \mathbf{j} - a_y b_x \mathbf{k} + 0 + a_y b_z \mathbf{i} + a_z b_x \mathbf{j} - a_z b_y \mathbf{i} + 0 = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k} \quad (51)$$

или

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (52)$$

Из (51) видно, что проекции векторного произведения на оси координат равны

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y = \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}, \quad (53)$$

а его модуль

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_x^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_y^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_z^2}, \quad (54)$$

где стоящие под знаком радикала величины определяются равенствами (53).

9. Произведения трех векторов. Комбинированные произведения из трех векторов могут иметь вид $\mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$. Прежде всего замечаем, что первая комбинация есть произведение вектора \mathbf{a} на скаляр $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$; четвертая же не имеет смысла, так как нельзя *векторно* множить вектор \mathbf{a} на *скаляр* $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Произведение трех векторов типа $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ называется *смешанным* произведением векторов и есть, очевидно, скаляр.

Чтобы составить выражение этого произведения через проекции векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , воспользуемся сначала формулой (36), а затем (53), имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= a_x (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_x + a_y (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_y + a_z (\mathbf{b} \times \mathbf{c})_z = \\ &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} + a_y \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (55) \end{aligned}$$

Из равенства (55) вытекают следствия:

1. Если какие-либо два из входящих в состав смешанного произведения вектора равны друг другу, то все произведение равно нулю, так как при этом две строки в определителе (55) будут одинаковы.

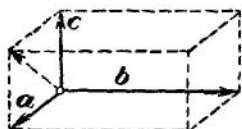


Рис. 22.

2. В смешанном произведении возможны циклические перестановки множителей

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b), \quad (56)$$

так как при этом определитель (55) сохранит свою величину и знак. Другие перестановки множителей уже отражаются на знаке произведения, например

$$a \cdot (c \times b) = b \cdot (a \times c) = c \cdot (b \times a) = -a \cdot (b \times c).$$

Численно смешанное произведение определяет объем параллелепипеда, построенного на векторах a , b и c (рис. 22).

Произведение трех векторов типа $a \times (b \times c)$ называется *тройным* векторным произведением и есть вектор. По формуле (52) имеем:

$$a \times (b \times c) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ (b \times c)_x & (b \times c)_y & (b \times c)_z \end{vmatrix}, \quad (57)$$

где $(b \times c)_x$, $(b \times c)_y$ и $(b \times c)_z$ суть проекции векторного произведения $b \times c$.

Составляя, согласно формулам (53), выражение проекции тройного векторного произведения на ось x , получим:

$$\begin{aligned} [a \times (b \times c)]_x &= a_y (b \times c)_z - a_z (b \times c)_y = \\ &= a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z) = a_y b_x c_y - a_y b_y c_x - a_z b_z c_x + \\ &+ a_z b_x c_z + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x = b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - \\ &- c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = b_x a \cdot c - c_x a \cdot b. \end{aligned} \quad (58)$$

Проекция на две другие оси найдется совершенно аналогично. Итак,

$$\begin{aligned} [a \times (b \times c)]_x &= b_x a \cdot c - c_x a \cdot b, \\ [a \times (b \times c)]_y &= b_y a \cdot c - c_y a \cdot b, \\ [a \times (b \times c)]_z &= b_z a \cdot c - c_z a \cdot b. \end{aligned} \quad (59)$$

Умножая равенства (59) соответственно на i , j , k и складывая их почленно, получим окончательно:

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b). \quad (60)$$

Заканчивая краткое изложение векторной алгебры, приведем следующие простые, но важные положения и формулы, которые могут быть легко доказаны:

1) Два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} коллинеарны, если

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (61)$$

где α и β — некоторые отличные от нуля скаляры, и обратно.

2) Три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} компланарны, если

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}, \quad (62)$$

где α , β и γ суть некоторые, отличные от нуля скаляры, и обратно.

3) Имеет место равенство

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = a^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + b^2.$$

4) Если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2, \quad (63)$$

вообще же $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 < a^2 b^2$.

5) Имеет место равенство

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = a^2 b^2. \quad (64)$$

10. Момент вектора. Для неподвижного (или для скользящего) вектора можно ввести понятие момента относительно центра и относительно оси. Пусть вектор \mathbf{a} приложен в точке M . Положение точки M по отношению к осям $Oxyz$ может быть определено радиусом-вектором \mathbf{r} , проведенным из центра O в точку M (рис. 23). При этом $\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$ или, так как проекции радиуса-вектора представляют собой координаты точки M , то

$$\left. \begin{aligned} r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z \\ \text{и} \\ \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \end{aligned} \right\} (65)$$

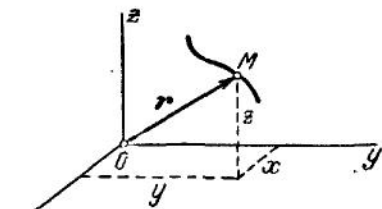


Рис. 23.

Моментом вектора \mathbf{a} относительно центра (или точки) O называется векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ радиуса-вектора \mathbf{r} , проведенного из центра O в точку M , где приложен вектор \mathbf{a} , на этот вектор (рис. 24). Обозначается момент вектора \mathbf{a} относительно центра O символом $\text{mom}_O \mathbf{a}$. Следовательно,

$$\text{mom}_O \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (66)$$

$$|\text{mom}_O \mathbf{a}| = r a \widehat{\sin(\mathbf{r}, \mathbf{a})}. \quad (67)$$

Как всякое векторное произведение, момент вектора \mathbf{a} относительно центра O по модулю равен площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{r} и \mathbf{a} .

Если центр O , относительно которого берется момент, совпадает с началом координат (как на рис. 24), то момент вектора \mathbf{a} относительно начала координат, согласно (65), выразится равенством

$$\text{мом}_O \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (68)$$

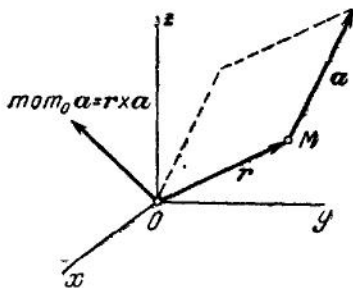


Рис. 24.

Теорема. Проекции на ось z моментов вектора \mathbf{a} относительно любых двух центров O и O' , взятых на оси z , равны между собой, т. е.

$$(\text{мом}_O \mathbf{a})_z = (\text{мом}_{O'} \mathbf{a})_z. \quad (69)$$

Действительно, $(\text{мом}_O \mathbf{a})_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{z}^0$, где \mathbf{z}^0 есть единичный вектор оси z . Но по свойству смешанного произведения трех векторов

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{z}^0 = (\mathbf{z}^0 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}.$$

Так как легко видеть, что вектор $\mathbf{z}^0 \times \mathbf{r}$ не зависит от положения точки (центра) O на оси z , то тем самым справедливость равенства (69) доказана.

Формулу (69) легко получить также из геометрических соображений. Действительно, обозначая угол между вектором $\mathbf{r} \times \mathbf{a}$ и осью z через γ (рис. 25), имеем:

$$(\text{мом}_O \mathbf{a})_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z = |\mathbf{r} \times \mathbf{a}| \cos \gamma = 2 |\text{пл. } OAB| \cos \gamma$$

или

$$(\text{мом}_O \mathbf{a})_z = \pm 2 (\text{пл. } O_1A_1B_1), \quad (70)$$

где треугольник $O_1A_1B_1$ есть проекция треугольника OAB на плоскость π , перпендикулярную к оси z . Очевидно, что площадь этой проекции не зависит от положения точки O на оси z , откуда следует равенство (69).

На основании доказанного свойства проекции момента на какую-либо ось устанавливается следующее определение момента вектора относительно оси:

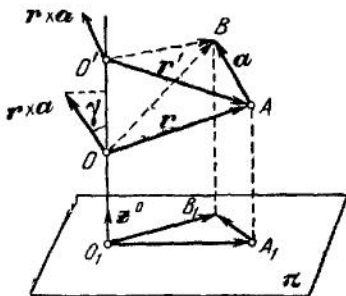


Рис. 25.

Моментом вектора относительно оси называется проекция на эту ось момента данного вектора относительно любой точки оси. Будем обозначать момент вектора \mathbf{a} относительно оси l символом $\text{mom}_l \mathbf{a}$. Тогда, если точка O лежит на оси l , то

$$\text{mom}_l \mathbf{a} = (\text{mom}_O \mathbf{a})_l. \quad (71)$$

Моменты вектора относительно осей координат x , y , z будут равны проекциям на эти оси момента вектора относительно начала O . Следовательно, согласно (68),

$$\left. \begin{aligned} \text{mom}_x \mathbf{a} &= (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_x = ya_z - za_y, \\ \text{mom}_y \mathbf{a} &= (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_y = za_x - xa_z, \\ \text{mom}_z \mathbf{a} &= (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z = xa_y - ya_x. \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

Из равенств (71) и (70) следует, что $\text{mom}_z \mathbf{a} = \pm 2$ пл. $O_1A_1B_1$. Но, как видно из рис. 25,

$$2 \text{ пл. } O_1A_1B_1 = |\text{mom}_{O_1} \overline{A_1B_1}|,$$

где $\overline{A_1B_1}$ — проекция вектора $\overline{AB} = \mathbf{a}$ на плоскость π , перпендикулярную к оси z . Отсюда следует другое определение момента вектора относительно оси: момент вектора \mathbf{a} относительно какой-нибудь оси z равен численной величине момента проекции вектора \mathbf{a} на плоскость π , перпендикулярную к оси z , взятого относительно точки O_1 пересечения оси z с этой плоскостью, т. е.

$$\text{mom}_z \mathbf{a} = \text{mom}_{O_1} \mathbf{a}_\pi. \quad (73)$$

Найдем выражение момента вектора \mathbf{a} относительно любого центра C (рис. 26), не совпадающего с началом координат. Имеем:

$$\text{mom}_C \mathbf{a} = \mathbf{r}' \times \mathbf{a}.$$

Но так как $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$, то

$$\begin{aligned} \text{mom}_C \mathbf{a} &= (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{a} = \\ &= (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{r}_C \times \mathbf{a}), \end{aligned} \quad (74)$$

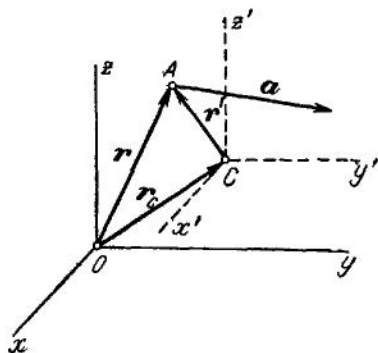


Рис. 26.

т. е. момент вектора относительно произвольного центра C равен разности двух моментов относительно начала: момента данного вектора и момента вектора, равного данному, но приложенного в точке C .

Проекции разности $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ на оси координат будут: $x - x_C$, $y - y_C$ и $z - z_C$, поэтому

$$\text{мом}_C \mathbf{a} = \mathbf{r}' \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (75)$$

Заметим, что проекции вектора $(\mathbf{r}' \times \mathbf{a})$ на оси координат дают моменты относительно осей, *проходящих через начало* вектора \mathbf{r}' . Поэтому $(\mathbf{r}' \times \mathbf{a})_x$, $(\mathbf{r}' \times \mathbf{a})_y$, $(\mathbf{r}' \times \mathbf{a})_z$ будут равны моментам вектора \mathbf{a} относительно осей x' , y' , z' , параллельных осям x , y , z и проходящих через точку C , а не моментам относительно осей x , y , z (см. рис. 26), т. е.

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{r}' \times \mathbf{a})_x &= \text{мом}_{x'} \mathbf{a} = (y - y_C) a_z - (z - z_C) a_y, \\ (\mathbf{r}' \times \mathbf{a})_y &= \text{мом}_{y'} \mathbf{a} = (z - z_C) a_x - (x - x_C) a_z, \\ (\mathbf{r}' \times \mathbf{a})_z &= \text{мом}_{z'} \mathbf{a} = (x - x_C) a_y - (y - y_C) a_x. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Моменты же вектора \mathbf{a} относительно осей x , y , z будут по-прежнему определяться формулами (72).

11. Дифференцирование векторов по скалярному аргументу. Пусть вектор \mathbf{a} есть непрерывная функция некоторого скалярного аргумента t , т. е.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t). \quad (77)$$

При этом в общем случае с изменением скаляра t непрерывно изменяются и модуль и направление вектора \mathbf{a} . Следовательно, если учесть, что $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 = \mathbf{a}(t)$, то

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t), \quad \mathbf{a}^0 = \mathbf{a}^0(t). \quad (78)$$

В частных случаях вектор может изменяться только по модулю

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t), \quad \mathbf{a}^0 = \text{const} \quad (79)$$

или только по направлению

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a}^0(t), \quad \mathbf{a} = \text{const}. \quad (80)$$

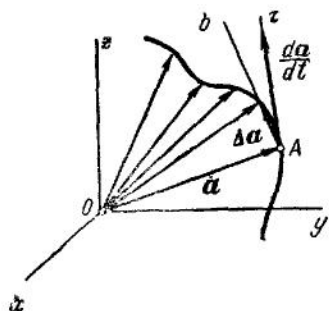


Рис. 27.

Будем вектор $\mathbf{a}(t)$ в процессе его изменения всегда откладывать от общего начала (полюса) O (рис. 27). Тогда в общем случае при изменении t конец вектора $\mathbf{a}(t)$ будет описывать некоторую определенную кривую (плоскую или пространственную), которая называется *годографом* вектора $\mathbf{a}(t)$. Если полюс O примем за начало прямо-

угольной декартовой системы координат, то параметрическое уравнение годографа будет иметь вид

$$x = a_x(t), \quad y = a_y(t), \quad z = a_z(t),$$

где a_x , a_y , a_z — проекции вектора \mathbf{a} на оси координат.

В частности, в случае (79) годографом вектора \mathbf{a} будет прямая, вдоль которой направлен этот вектор, а в случае (80) — кривая на сфере радиуса a .

Заметим, что векторная (а также и скалярная) величина может быть функцией не только скалярного, но и векторного аргумента. В частности, это имеет место, когда соответствующая величина образует поле.

*Поле*м данной скалярной или векторной величины называется область пространства, каждой точке которой однозначно соответствует определенное значение скалярной или векторной величины; в этом случае скалярные и векторные величины представляют собой функции координат точки x, y, z или ее радиуса-вектора \mathbf{r} .

Перейдем теперь к рассмотрению понятия производной от переменного вектора. Если аргумент t получит приращение Δt , то вектор \mathbf{a} получит приращение $\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)$ (рис. 28). Предел отношения $\Delta \mathbf{a}$ к Δt (при $\Delta t \rightarrow 0$), если он существует, называется *производной вектора \mathbf{a} по скалярному аргументу t* (это определение совпадает с определением производной скалярной функции). Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \\ &= \mathbf{a}'(t) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}. \end{aligned} \quad (81)$$

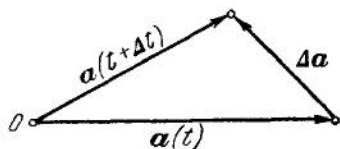


Рис. 28.

На годографе (см. рис. 27) вектор $\Delta \mathbf{a}$ направлен вдоль хорды, т. е. по секущей Ab . В пределе секущая занимает направление касательной At . Следовательно, так как от деления на скаляр Δt направление вектора не меняется, то направление производной $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ совпадает с направлением касательной к годографу вектора $\mathbf{a}(t)$ в точке A .

Если вектор выражен через его проекции на неподвижные оси, т. е. если

$$\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

то ясно, что

$$a_x = a_x(t), \quad a_y = a_y(t), \quad a_z = a_z(t); \quad (82)$$

векторы же \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} будут постоянными и по модулю и по направлению. Поэтому

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d}{dt} (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k}, \quad (83)$$

т. е. производная вектора по скалярному аргументу есть вектор, проекции которого на неподвижные оси равны производным по тому же аргументу от проекции дифференцируемого вектора.

Во многих задачах механики аргументом t является время. При этом обычно производная по времени обозначается точкой:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{a}_x \mathbf{i} + \dot{a}_y \mathbf{j} + \dot{a}_z \mathbf{k}. \quad (84)$$

Тем же методом, как и для скалярной функции, можно легко доказать следующие формулы:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \cdot \mathbf{a}, \quad (85)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b}\right) + \left(\mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}\right). \quad (86)$$

Покажем, что дифференциал (или производная) единичного вектора перпендикулярен к дифференцируемому вектору. Действительно, из (33) следует, что

$$\mathbf{a}^0 \cdot \mathbf{a}^0 = 1;$$

дифференцируя это равенство, мы, согласно формуле (85), получим:

$$2 \frac{d\mathbf{a}^0}{dt} \cdot \mathbf{a}^0 = 0,$$

следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}^0}{dt} \perp \mathbf{a}^0, \quad (87)$$

или, так как дифференциал аргумента dt есть скаляр, не влияющий на направление $\frac{d\mathbf{a}^0}{dt}$, то

$$d\mathbf{a}^0 \perp \mathbf{a}^0. \quad (87')$$

Кроме того, легко показать (рис. 29), что ¹⁾

$$|d\mathbf{a}^0| = |\mathbf{a}^0| d\varphi = d\varphi. \quad (88)$$

¹⁾ Действительно, треугольник, изображенный на рис. 29, равнобедренный, ибо $|\mathbf{a}^0| = |\mathbf{a}^0 + \Delta\mathbf{a}^0| = 1$; из этого треугольника имеем:

$$|\Delta\mathbf{a}^0| = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \Delta\varphi.$$

Отсюда, деля обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, находим:

$$\left| \frac{d\mathbf{a}^0}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{и} \quad |d\mathbf{a}^0| = d\varphi.$$

Пользуясь соотношениями (87) и (88), можно получить следующее выражение производной вектора по скалярному аргументу. Так как $\mathbf{a} = a\mathbf{a}^0$, то, учитывая (78), будем иметь:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \mathbf{a}^0 + \frac{d\mathbf{a}^0}{dt} a. \quad (89)$$

Это равенство показывает, что производная от вектора по скалярному аргументу t есть вектор, равный сумме двух взаимно перпендикулярных векторов, один из которых, $\frac{da}{dt} \mathbf{a}^0$, характеризует изменение вектора \mathbf{a} по модулю, а второй, $\frac{d\mathbf{a}^0}{dt} a$, — изменение его по направлению (рис. 30). Первый вектор, как видно из формулы (89), имеет направление вектора \mathbf{a} , а второй к нему перпендикулярен.

Второй член формулы (89) может быть представлен и иначе. Так как, согласно (88),

$$\left| \frac{d\mathbf{a}^0}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt},$$

то, обозначая единичный вектор по направлению $d\mathbf{a}^0$, перпендикулярному к вектору \mathbf{a}^0 , через \mathbf{p}^0 , имеем:

$$\frac{d\mathbf{a}^0}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{p}^0 \quad (\mathbf{p}^0 \perp \mathbf{a}^0).$$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \mathbf{a}^0 + a \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{p}^0. \quad (89')$$

Из формулы (89) видно, что в общем случае $|d\mathbf{a}| \neq da$. Равенство $|d\mathbf{a}| = da$ имеет, очевидно, место лишь при $\frac{d\mathbf{a}^0}{dt} = 0$, т. е. в случае (79), когда вектор \mathbf{a} изменяется только по модулю.

Найдем в заключение выражение производной от ортогональной составляющей вектора \mathbf{a} по оси l . Согласно равенствам (6) и (5),

$$\mathbf{a}_l = a \cos(\widehat{\mathbf{a}, l}) \mathbf{l}^0 = a_l \mathbf{l}^0.$$

Тогда, если ось l неподвижна ($\mathbf{l}^0 = \text{const}$), то

$$\frac{d\mathbf{a}_l}{dt} = \frac{da_l}{dt} \mathbf{l}^0. \quad (90)$$

Если же направление l меняется с изменением параметра t (например, времени), то

$$\frac{d\mathbf{a}_l}{dt} = \frac{da_l}{dt} \mathbf{l}^0 + \frac{d\mathbf{l}^0}{dt} a_l. \quad (91)$$

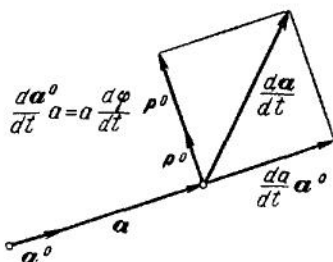


Рис. 30

12. Преобразование проекций вектора. Найдем, как изменяются проекции a_x , a_y и a_z вектора \mathbf{a} на прямоугольные оси координат (x, y, z) при переходе к другой также прямоугольной системе осей (x', y', z') .

Если новые оси x' , y' и z' параллельны прежним и имеют с ними одинаковое направление, то проекции $a_{x'}$, $a_{y'}$ и $a_{z'}$, очевидно, будут равны соответственно проекциям a_x , a_y и a_z (рис. 31, а), т. е. если

$$x \downarrow \downarrow x', \quad y \downarrow \downarrow y', \quad z \downarrow \downarrow z',$$

то

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x, & a_{y'} &= a_y, \\ a_{z'} &= a_z. \end{aligned} \quad (92)$$

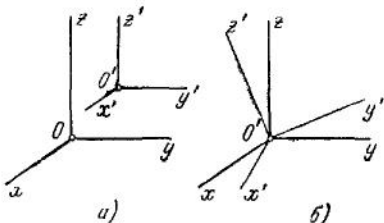


Рис. 31.

Пусть теперь (рис. 31, б) оси новой системы (x', y', z') образуют с осями прежней системы (x, y, z) углы, косинусы которых определяются таблицей

	x	y	z
x'	(11)	(12)	(13)
y'	(21)	(22)	(23)
z'	(31)	(32)	(33)

Тогда, в случае прямоугольности систем (x, y, z) и (x', y', z') , эти косинусы связаны шестью условиями ортогональности:

$$\left. \begin{aligned} (\alpha 1)(\beta 1) + (\alpha 2)(\beta 2) + (\alpha 3)(\beta 3) &= 0; & \alpha \neq \beta, \\ (\alpha 1)^2 + (\alpha 2)^2 + (\alpha 3)^2 &= 1 & (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Если системы (x, y, z) и (x', y', z') имеют общее начало, то формулы преобразования координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x' &= (11)x + (12)y + (13)z, \\ y' &= (21)x + (22)y + (23)z, \\ z' &= (31)x + (32)y + (33)z. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Найдем теперь формулы преобразования проекций вектора \mathbf{a} . Обозначая единичные векторы, соответствующие направлениям осей

систем (x, y, z) и (x', y', z') , через i, j, k и i', j', k' соответственно, имеем, согласно формуле (39),

$$a_x = a \cdot i' = (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot i' = a_x i \cdot i' + a_y j \cdot i' + a_z k \cdot i'.$$

Принимая во внимание, что

$$i \cdot i' = (11), \quad j \cdot i' = (12), \quad k \cdot i' = (13),$$

получим:

$$a_{x'} = (11) a_x + (12) a_y + (13) a_z.$$

Аналогично, составляя выражения для проекций $a_{y'}$ и $a_{z'}$, найдем следующие три формулы преобразования проекций вектора:

$$\left. \begin{aligned} a_{x'} &= a \cdot i' = (11) a_x + (12) a_y + (13) a_z, \\ a_{y'} &= a \cdot j' = (21) a_x + (22) a_y + (23) a_z, \\ a_{z'} &= a \cdot k' = (31) a_x + (32) a_y + (33) a_z. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

Отсюда видим, что формулы преобразования для проекций вектора те же, что и для координат, с той лишь существенной разницей, что формулы (94) имеют место в случае, когда начало координат у систем (x, y, z) и (x', y', z') является общим, а для формул (95) это ограничение отсутствует.

13. Классификация векторов. В зависимости от свойств физических величин, изображаемых векторами, векторы разделяются на:

- 1) свободные (или несвязанные),
- 2) скользящие (или связанные с прямой, вдоль которой направлен вектор),
- 3) неподвижные или приложенные (связанные с точкой своего приложения).

Свободный вектор изображает такую векторную величину, которая может быть отнесена к любой точке пространства, не теряя при этом своего первоначального физического смысла, т. е.

всякие два равных вектора в этом случае могут представлять ту же самую физическую величину. Так, например, скорость поступательного движения тела (рис. 32) есть свободный вектор, потому что она может быть отнесена к любой точке. Свободный вектор определяется *тремя* числами (своими проекциями a_x, a_y и a_z).

Скользящий вектор изображает такую величину, которая, не теряя своего первоначального физического смысла, может быть отнесена к любой из точек, лежащих на прямой DE , вдоль которой направлен вектор, т. е. одну и ту же физическую величину могут в этом случае представлять только те векторы, которые одновременно равны друг другу и направлены вдоль одной и той же прямой; эту прямую, на которой лежит вектор, называют *основанием* или

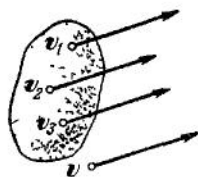


Рис 32

линией действия вектора. Примером скользящего вектора может служить сила, приложенная к абсолютно твердому телу, или угловая скорость (рис. 33).

Геометрически скользящий вектор определяется: 1) прямой, на которой он лежит (основанием вектора), 2) длиной отрезка, изображающего вектор, 3) стороной или направлением действия (это направление обозначается стрелкой на конце вектора). Аналитически скользящий вектор определяется *пятью* числами, например тремя проекциями a_x , a_y , a_z вектора \mathbf{a} и координатами x_1 , y_1 точки пересечения прямой, вдоль которой направлен этот вектор, с плоскостью Oxy .

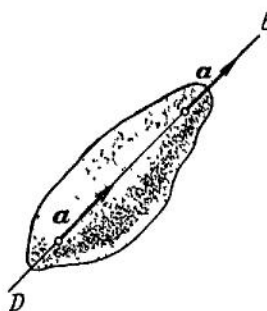


Рис 33

Неподвижный вектор изображает такую физическую величину, которая может быть отнесена лишь к одной определенной точке пространства и теряет свое первоначальное физическое значение, будучи отнесена ко всякой другой точке пространства. Так, скорость движущейся точки представляет собой вектор,

связанный с этой точкой. неподвижный вектор, таким образом, определяется *шестью* числами: тремя проекциями вектора и тремя координатами точки приложения.

При операциях сложения, умножения и дифференцирования скользящие и неподвижные векторы рассматриваются как свободные.

Другая классификация векторов основана на том существенном различии между ними, что направление одних определяется непосредственно по физическому смыслу величин, которые этими векторами изображаются (например, *сила*, *скорость*),

тогда как другие имеют *условное* направление, которое физическим смыслом изображаемых ими величин определяется лишь косвенно (например, *угловая скорость*, *момент*). Первые векторы называются *полярными*, а вторые — *аксиальными* или *осевыми*.

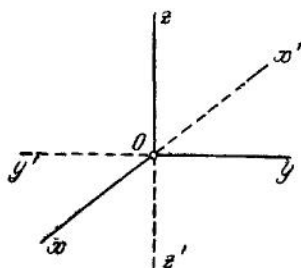


Рис. 34.

Выбор направления аксиального вектора зависит от выбора положительного направления вращения, другими словами, от выбора правой или левой системы координат (см., например, определение векторного произведения в п. 8 и рис. 19). Переход же от правой системы к левой (или обратно) может быть совершен простой заменой положительных направлений осей на отрицательные. Действительно, правая система $Oxyz$ (рис. 34) при замене положительных напра-

влений осей на отрицательные образует показанную пунктиром левую систему координат $Ox'y'z'$, которая никакими поворотами не может быть совмещена с правой.

Заметив это, легко сообразить, что проекции полярного вектора, сохраняющего свою ориентацию в пространстве, при замене осей на прямо противоположные изменяют свой знак, тогда как проекции осевых векторов, меняющих при этом свое направление также на противоположное, должны будут его сохранить. На основании этого можно дать другое определение полярных и аксиальных векторов. *Полярным вектором называется такой вектор, проекции которого при изменении направления координатных осей на прямо противоположные меняют свой знак. Аксиальным вектором называется такой вектор, проекции которого при изменении направления координатных осей на прямо противоположные не меняют своего знака.*

РАЗДЕЛ I

КИНЕМАТИКА

ГЛАВА ВТОРАЯ

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 4. Введение в кинематику

1. Основные понятия. Кинематика есть раздел механики, посвященный изучению движения тел с геометрической точки зрения, без учета причин, вызывающих изменение этого движения, т. е. сил. От геометрии кинематика отличается, по существу, тем, что при рассмотрении перемещений тел (или соответствующих геометрических образов) в пространстве принимается во внимание еще и время перемещения. Поэтому кинематику иногда называют «геометрией четырех измерений», понимая под четвертым измерением время. Такое представление оказалось плодотворным в теории относительности, где при изучении движения учитывается взаимосвязь пространства и времени друг с другом и с движущейся материей (мир по терминологии Г. Минковского рассматривается как пространственно-временное многообразие четырех измерений, а событие — как точка этого многообразия).

В механике Ньютона метрические свойства пространства считаются не зависящими от движущейся в нем материи и оно рассматривается как трехмерное евклидово пространство, однородное и изотропное по всем направлениям. Время в механике Ньютона также считается не связанным с движущейся материей, т. е. *абсолютным*, протекающим одинаково во всех точках пространства, на любых, как угодно движущихся друг относительно друга в пространстве телах.

Трехмерное евклидово пространство и абсолютное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно; но это приближение дает вполне достаточную для практики точность при изучении движений, рассматриваемых в механике Ньютона, т. е. движений со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Для измерений в пространстве выбирается некоторая единица длины, устанавливаемая по общему соглашению. В СССР, как и в большинстве других стран, такой единицей является метр (*м*).

Измерение времени основано на его арифметизации, т. е. на установлении соответствия между последовательными моментами времени и множеством действительных чисел. Осуществляется измерение времени при помощи *часов* в широком смысле этого слова, т. е. при помощи какого-либо периодического процесса (процесса, многократно повторяющегося через промежутки времени, которые на основании опыта и наблюдений можно считать равными).

Обыкновенно для измерения времени используются периодические астрономические явления — вращение Земли вокруг ее оси или же движение Земли вокруг Солнца. За единицу времени принимается секунда (*сек*).

Арифметизированное время представляет собой непрерывную последовательность одного измерения и графически может быть изображено бесконечной прямой, называемой *прямой* или *осью времен*; последовательность точек на этой прямой соответствует последовательности *моментов* времени.

Отсчет времени ведется от некоторого *начального момента* ($t=0$), или *начала отсчета времени*, о выборе которого каждый раз улаиваются. На оси времен начальному моменту соответствует начальная точка O (рис. 35). Подобно тому как отрезок прямой определяет расстояние между двумя точками, так и отрезок на оси времен изображает «расстояние» между двумя моментами времени, т. е. *промежуток времени*. Далее, как и в геометрии, положение всякой точки T на оси времен определяется ее расстоянием OT от начальной точки O ; иначе говоря, любой момент времени t определяется промежутком времени, протекшим до него от начального момента (величину $t=OT$ можно рассматривать как «координату» момента времени). Наконец, подобно тому как координаты точек геометрической прямой имеют различные знаки в противоположных направлениях от начала, так и «координатам» моментов времени t можно придать тот или иной знак, в зависимости от того, предшествуют ли соответствующие моменты началу отсчета времени или следуют за ним. Отрицательные времена ($-t$) отвечают представлению «раньше» начального момента, а положительные ($+t$) — представлению «позже» начального момента.

Всякое тело, движение которого изучается в механике, мы можем мыслить состоящим из очень большого числа материальных частиц ничтожно малых размеров, характер связи между которыми зависит от свойств данного тела. Эти частицы называют *материальными точками*. Любое тело, таким образом, представляет собой *систему (совокупность) материальных точек*.

В кинематике, где движение изучается с геометрической точки зрения, масса материальной точки во внимание не принимается и

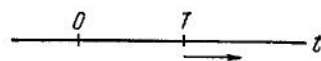


Рис. 35.

поэтому материальная точка рассматривается просто как точка геометрическая.

Неизменяемой системой называется система материальных точек, в которой расстояние между двумя любыми точками постоянно. При непрерывном распределении масс такая система дает идеальный образ твердого тела и называется *абсолютно твердым телом*. Абсолютно твердых тел, ни при каких условиях не изменяющих свою форму, в природе не существует. Однако во многих случаях при изучении движения реальных твердых тел их деформациями можно практически пренебречь и рассматривать эти тела как абсолютно твердые, что существенно упрощает все расчеты. Реальные твердые тела, способные деформироваться, а также тела жидкие и газообразные представляют собой *изменяемые системы* материальных точек.

2. Система отсчета. Относительность понятий движение и покой. Положение тела (или геометрического образа) в пространстве может быть определено только относительно произвольно выбранного другого неизменяемого тела, называемого *телом* или *системой отсчета*. Для определения положения рассматриваемого объекта с телом отсчета неподвижно связывают какую-нибудь (декартову или иную) систему координат (систему ориентировки). Обычно такую систему координат и рассматривают как систему отсчета; по существу, она представляет собой математическую абстракцию материального тела отсчета, которое можно себе представить неподвижно скрепленным с этой системой координат.

Экспериментально перемещение всякого тела устанавливается именно относительно тел отсчета. Полное отсутствие практической возможности установить какое-либо абсолютное («неподвижное») тело отсчета приводит к необходимости пользоваться относительными системами отсчета. Однако в каждом конкретном случае движение рассматривается по отношению к определенной системе отсчета, которая называется *основной* и должна быть точно указана.

Если положение тела (или геометрического образа) относительно выбранной системы отсчета со временем не изменяется, то мы говорим, что это тело (или геометрический образ) *покоится* относительно данной системы отсчета; если же тело (или геометрический образ) изменяет свое положение относительно выбранной системы отсчета, то мы говорим, что это тело (или геометрический образ) относительно данной системы отсчета *движется*. Таким образом, понятия «движения» и «покоя» являются по существу своему *относительными* и имеют смысл только тогда, когда указана система отсчета, относительно которой рассматривается положение тела. Более того, одно и то же движение носит совершенно различный характер, смотря по тому, к какой системе отсчета это движение будет отнесено.

3. Траектория. Движение по существу своему непрерывно. Поэтому точки пространства, в которых последовательно находится любая

движущаяся точка, представляют собой непрерывное многообразие одного измерения и, следовательно, образуют *непрерывную* кривую. Эта непрерывная кривая, описываемая точкой при ее движении, называется траекторией точки.

Термин происходит от латинского слова *trajicio* («перебрасываю») и первоначально обозначал путь артиллерийского снаряда, а потом стал употребляться в более широком смысле. В астрономии траектория часто называется *орбитой*.

Согласно определению, траектория есть непрерывная, плоская или пространственная кривая, к которой можно провести в каждой ее точке только одну касательную, за исключением, может быть, некоторого конечного числа особых точек.

Покой и движение точки, как и всякого другого геометрического образа, определяются только относительно выбранной системы отсчета. Поэтому и вид траектории точки зависит от той системы отсчета, к которой отнесено движение. Так, например, камень, брошенный вертикально вверх с палубы поступательно и равномерно движущегося парохода, будет относительно наблюдателя, находящегося на пароходе, двигаться прямолинейно, а относительно наблюдателя, стоящего на берегу, т. е. связанного с Землей, — по параболе, и т. д.

4. Задачи кинематики. Движение тела (или геометрического образа) по отношению к выбранной системе отсчета будет известно, если можно определить его положение относительно этой системы отсчета в любой произвольный момент времени.

Положение точки или тела относительно данной системы отсчета определяется соответствующими параметрами (координатами), а движение (или закон движения) — уравнениями, выражающими эти параметры, как функции времени.

Установление тех способов, с помощью которых может быть задано движение точек или тел по отношению к выбранной системе отсчета, является одной из задач кинематики. Основная задача кинематики состоит в том, чтобы по уравнениям, определяющим закон движения данной системы точек (тела), найти все кинематические характеристики этого движения (траектории различных точек, их скорости, ускорения и др.).

Движение любой системы точек относительно данной системы отсчета будет известно, если известно движение каждой точки относительно той же системы отсчета; следовательно, изучению движения системы точек должно предшествовать изучение движения одной точки. Поэтому кинематика распадается на два отдела: кинематику точки и кинематику системы.

5. Способы задания движения точки. Определить (или задать) движение точки — значит определить (задать) ее положение относительно выбранной системы отсчета в любой момент времени. Это делается одним из следующих способов.

а) *Естественный* способ определения движения точки требует задания ее *траектории* относительно выбранной системы отсчета *хуз* (рис. 36). На траектории следует задать *начало* и *положительное направление* отсчета расстояний $s = OM$; расстояние s от начала отсчета O до точки M , измеренное вдоль дуги траектории и взятое с соответствующим знаком, будет однозначно определять положение точки M на траектории, а следовательно, и в системе отсчета *хуз*. Далее должно быть указано *начало отсчета времени* (начальный момент $t = 0$). Тогда движение точки будет определено, если для каждого момента времени t будет известна величина s , указывающая положение точки, т. е. если будет дана зависимость

$$s = f(t). \quad (1)$$

Равенство (1) называется *законом движения* (или *конечным уравнением движения*) точки.

Таким образом, при *естественном* способе определения движения точки должны быть заданы: 1) траектория точки; 2) начало отсчета расстояний на траектории с указанием положительного направления отсчета и начальный момент времени; 3) закон движения точки вдоль траектории в виде $s = f(t)$.

По самой природе движения функция $f(t)$ должна быть:

1) *однозначной*, ибо в один и тот же момент времени движущаяся точка не может находиться в двух различных точках пространства;

2) *непрерывной*, ибо движение непрерывно и поэтому каждому

бесконечно малому изменению t соответствует бесконечно малое изменение s ;

3) *дифференцируемой*, т. е. должна допускать *производную*. Необходимость этого требования будет вполне очевидна из рассмотрения основных положений кинематики и динамики.

Если $s = c = \text{const}$, то это означает, что точка относительно данной системы отсчета находится в покое.

Закон движения точки может быть задан не только аналитически, но и графически (рис. 37), т. е. в виде кривой, дающей зависимость между s и t . Это графическое изображение закона движения со-

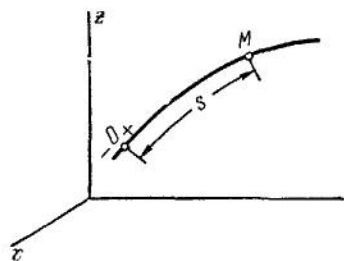


Рис. 36.

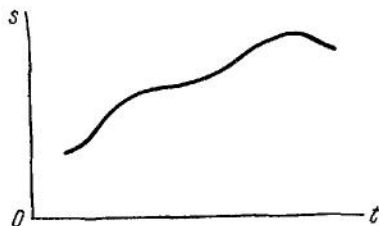


Рис. 37.

крайне называют *графиком движения*. Кривую графика движения не следует смешивать с траекторией движения; траектория может быть, например, прямой, а закон движения вдоль этой прямой может быть каким угодно, т. е. график движения может быть выражен любой кривой.

б) *Координатный* способ определения движения точки состоит в том, что даются: 1) какая-либо система координат (система ориентировки), связанная с телом отсчета, и 2) координаты движущейся точки, как функции времени.

Положение точки в пространстве трех измерений определяется тремя числами q_1, q_2, q_3 , которые вообще называются криволинейными координатами точки. Следовательно, закон движения точки будет в общем случае задаваться уравнениями

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_3 = q_3(t). \quad (2)$$

Здесь, как и в равенстве (1), все функции должны быть однозначными, непрерывными и дифференцируемыми.

Чаще всего для определения положения точки используется прямоугольная декартова система координат *хуз*. В этой системе координат движение точки задается в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (3)$$

Каждое из трех уравнений (3), взятое отдельно, определяет закон движения проекции точки на соответствующую ось; поэтому можно считать, что при этом способе задания исследуемое движение разлагается по направлениям осей координат и представляется как совокупность трех движений вдоль этих взаимно перпендикулярных осей.

Уравнения (3) представляют собой, с одной стороны, *закон движения* точки, так как позволяют для каждого момента времени t определить x, y и z , а следовательно, и положение точки M ; с другой стороны, эти уравнения являются уравнениями *траектории* точки в *параметрической форме*, причем роль параметра играет время t . Исключая из уравнений (3) параметр t , получим одну из следующих систем двух уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(x, y) = 0, \\ \chi(x, z) = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \psi(y, z) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} \chi(x, z) = 0, \\ \psi(y, z) = 0 \end{array} \right\}; \quad (4)$$

каждая из этих систем представляет траекторию точки как пересечение двух цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны осям координат (рис. 38). Если $x = a, y = b, z = c$, где a, b и c — постоянные, то точка M относительно системы отсчета *хуз* находится в покое.

Кроме декартовой, в механике для изучения движения точки используются и другие системы координат, в частности сферические и цилиндрические, которые будут рассмотрены ниже (см. стр. 83).

в) *Векторный* способ определения движения точки основан на задании ее положения радиусом-вектором r , проведенным из начала O выбранной системы ориентировки (см. рис. 38). Так как

$$r = xi + yj + zk,$$

то в векторной форме закон движения точки представится в виде

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k. \quad (5)$$

Траекторией точки при векторном задании движения будет голограф радиуса-вектора r (см. стр. 38).

В случае *плоского движения*, т. е. когда траектория есть плоская кривая, закон движения точки относительно какой-либо системы координат, расположенной в плоскости движения, выразится только двумя уравнениями.

В частности, в случае плоской декартовой системы координат (x, y) будем иметь:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (6)$$

а в случае плоской полярной системы координат (r, φ) (см. рис. 53)

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad (7)$$

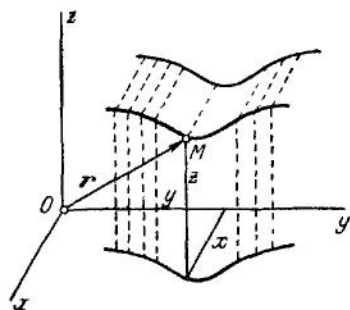


Рис. 38.

где r — полярный радиус.

Векторное выражение закона плоского движения будет

$$r = r(t) = x(t)i + y(t)j. \quad (8)$$

Исключая t в системах (6) или (7), получим уравнения траектории плоского движения в декартовых координатах

$$f(x, y) = 0 \quad (9)$$

или в полярных

$$\Phi(r, \varphi) = 0. \quad (10)$$

По характеру траектории движение точки может быть *прямолинейным* и *криволинейным*, причем эти свойства траектории, конечно, зависят от выбора системы отсчета. Движение, прямолинейное относительно одной системы отсчета, может быть криволинейным относительно другой, и наоборот.

§ 5. Прямолинейное движение точки

1. Закон прямолинейного движения. Прямолинейным называется такое движение точки, при котором ее траектория относительно выбранной системы отсчета есть прямая линия. Положение точки на прямой определяется координатой x (рис. 39), которая представляет

собой *расстояние* движущейся точки M от произвольно выбранного начала O , и берется с положительным или отрицательным знаком в зависимости от направления отрезка OM ; величина $OM = x$ есть, следовательно, величина алгебраическая. Когда точка M движется прямолинейно, то закон движения ее выражается уравнением

$$x = f(t). \quad (1)$$

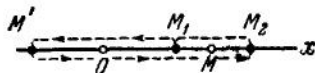


Рис. 39.

Если x по абсолютной величине возрастает, то точка M удаляется от начала O и движение называется *прямым*, в противном случае — *возвратным*. Если $x = f(t)$ за все время движения на некотором интервале времени только убывает или только возрастает, то прямолинейное движение на этом интервале называется *монотонным*. Если x от времени не зависит, то точка M не изменяет своего расстояния от начала O и, следовательно, находится в *покое* относительно данной системы отсчета. (По существу, положение точки M определяется вектором \overline{OM} ; но так как все векторы \overline{OM} при прямолинейном движении коллинеарны и различаются между собой, кроме длины, только стороной, куда они направлены, т. е. знаком, то в этом случае положение точки M можно определять алгебраической величиной OM .)

Пусть точка M движется по прямой Ox (см. рис. 39) и в момент времени t_1 находится в положении M_1 , а в момент t_2 — в положении M_2 . Вектор $\overline{M_1M_2}$, имеющий начало в начальном положении точки, а конец — в конечном, называется *перемещением* точки M за промежуток времени $t_2 - t_1$. Необходимо различать между собой понятия «перемещение» и «путь»: точка M может прийти из положения M_1 в положение M_2 , пройдя разные пути (например, путь $M_1M'M_2$), тогда как перемещение ее будет одно и то же, т. е. $\overline{M_1M_2}$.

В случае прямолинейного движения векторы перемещений точек будут коллинеарны, и мы их можем тоже рассматривать как алгебраические величины. Понятия «перемещение» и «путь» совпадают только в том случае, если движение прямолинейно и монотонно.

2. Скорость в прямолинейном движении. Пусть точка движется по прямой Ox и в момент времени t положение точки определяется координатой x , а в момент t' — координатой x' . Тогда за промежуток времени $\Delta t = t' - t$ точка совершает перемещение $\Delta x = x' - x$. Отношение перемещения точки к соответствующему промежутку времени, т. е. величина

$$v = \frac{x' - x}{t' - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (2)$$

называется *средней скоростью* движения точки за этот промежуток времени.

Если уменьшать промежуток времени Δt , устремляя его к нулю, то в пределе средняя скорость дает величину, называемую *скоростью* точки в момент времени t , т. е.

$$v = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = \frac{dx}{dt} = f'(t). \quad (3)$$

Таким образом, скорость точки в данный момент времени равна первой производной от расстояния по времени.

Легко убедиться, что если на данном участке пути скорость $v = \frac{dx}{dt}$ и координата x имеют одинаковые знаки, то точка удаляется от начала O и ее движение на этом участке является прямым; если же v и x имеют разные знаки, то точка приближается к началу O и ее движение будет возвратным.

Скорость может обращаться в нуль в двух существенно разных случаях: 1) Если $v = \frac{dx}{dt} = 0$ в какой-либо *момент времени*, то x в этот момент имеет стационарное значение. При этом если, в частности, x имеет максимум или минимум, то скорость v , переходя через нуль, меняет знак и происходит изменение движения с прямого на возвратное или наоборот. 2) Если $v = 0$ в течение какого-то *промежутка времени*, то в течение этого промежутка $x = \text{const}$ и точка находится в покое (говорить в первом случае, что «точка находится в покое в *данный момент времени*», бессмысленно, так как понятия «движение» и «покой» не могут быть отнесены к моменту времени).

Скорость, как частное от деления двух именованных величин, есть величина нового наименования; ее размерность

$$[v] = \frac{\text{длина}}{\text{время}} = \frac{L}{T}.$$

Единицами измерения скорости обычно служат *см/сек*, *м/сек* или *км/час*.

Если $v = v_0 = \text{const}$, т. е. если скорость точки постоянна, то движение называется *равномерным*. Найдем закон этого движения. Имеем:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \quad \text{и} \quad dx = v_0 dt.$$

Интегрируя это выражение, получим *закон прямолинейного равномерного движения* точки:

$$x = x_0 + v_0 t. \quad (4)$$

В этом случае расстояние есть линейная функция времени. Постоянная величина x_0 в равенстве (4) представляет собой координату точки в начальный момент $t=0$, или начальное расстояние.

3. Ускорение прямолинейного движения. В общем случае скорость прямолинейного движения является функцией времени. Допустим, что в момент t точка имеет скорость v , а в момент t' — скорость v' ; тогда $\Delta v = v' - v$ есть приращение скорости за промежуток времени $\Delta t = t' - t$.

Отношение приращения скорости к соответствующему промежутку времени, т. е. величина

$$\omega^* = \frac{v' - v}{t' - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (5)$$

называется *средним ускорением* точки за этот промежуток времени. Если уменьшать промежуток времени Δt до нуля, то среднее ускорение в пределе становится величиной, называемой *ускорением* точки в момент времени t , т. е.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

или, учитывая равенство (3),

$$\omega = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (7)$$

Таким образом, ускорение точки в данный момент времени равняется первой производной от скорости или второй производной от расстояния по времени.

Ускорение получается из выражения $v(t)$ так же, как скорость из выражения $x(t)$, и есть как бы скорость второго порядка. Размерность ускорения будет:

$$[\omega] = \frac{\text{скорость}}{\text{время}} = \frac{\text{расстояние}}{\text{время} \cdot \text{время}} = \frac{L}{T^2}.$$

Единицами измерения ускорения обычно служат см/сек^2 или м/сек^2 .

Движение, ускорение которого постоянно, носит название *равномерно переменного*. Найдем закон этого движения. Пусть $\omega = a = \text{const}$; тогда

$$\frac{dv}{dt} = a \quad \text{и} \quad dv = a dt.$$

Интегрируя это равенство, получим:

$$v = v_0 + at, \quad (8)$$

где постоянная v_0 есть скорость точки в момент $t=0$, т. е. начальная скорость точки. Подставляя, далее, в равенство (8) $v = \frac{dx}{dt}$

и интегрируя затем получившееся равенство, найдем *закон равномерно переменного прямолинейного движения точки*

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (9)$$

где x_0 есть начальное расстояние точки (расстояние в момент $t = 0$).

Заметим, что при равномерно переменном движении расстояние есть функция второй, а скорость — первой степени относительно времени.

Если скорость по абсолютной величине возрастает, то движение называется *ускоренным*, а если убывает, то *замедленным*.

При $v > 0$ движение будет ускоренным, если $\frac{dv}{dt} = w > 0$, и замедленным, если $\frac{dv}{dt} = w < 0$; при $v < 0$ — наоборот. Следовательно, если ускорение будет иметь тот же знак, что и скорость, то движение будет ускоренным, а если противоположный, то замедленным.

Скорость и ускорение, как известно, являются величинами векторными. Но в случае прямолинейного движения эти векторы направлены вдоль траектории (коллинеарны) и, кроме модулей, отличаются лишь знаками; поэтому они рассматриваются как величины алгебраические¹⁾.

4. Графическое представление закона движения. Закон прямолинейного движения может быть изображен графически. Возьмем систему прямоугольных декартовых координат на плоскости и будем откладывать по оси абсцисс промежутки времени t , а по оси ординат — соответствующие расстояния x . Тогда закон движения изобразится кривой, исследование которой позволит определить все свойства данного движения. Эта кривая называется, как указывалось, *графиком движения* или *графиком расстояния*.

Чтобы получить графически среднюю скорость движения

$$v^* = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

для промежутка времени $\Delta t = t' - t$, достаточно провести секущую через точки графика, соответствующие моментам t и t' (рис. 40);

¹⁾ По существу, алгебраические величины v и w представляют собой проекции векторов \mathbf{v} и \mathbf{w} на ось x , т. е. $v = v_x$ и $w = w_x$. Однако здесь и всюду далее проекцию любого вектора \mathbf{u} , коллинеарного оси l , на эту ось мы будем (как и модуль) обозначать символом u ($u_l = u$) и называть, в отличие от модуля, численной или алгебраической величиной вектора \mathbf{u} . Так как численная величина вектора может отличаться от его модуля только знаком, то это совпадение обозначений обычно несущественно. В случаях же, когда могут возникнуть недоразумения, модуль вектора будет обозначаться символом $|\mathbf{u}|$.

тогда искомая скорость выразится тангенсом угла наклона секущей к оси времен, ибо с точностью до масштабного коэффициента

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha^*.$$

Для построения средней скорости откладываем на оси времен отрезок OF , равный по масштабу 1 сек, и проводим через точку F прямую FT , параллельную секущей; тогда отрезок OT , измеренный в масштабе длин, даст среднюю скорость в единицах скорости (например, в см/сек).

Скорость точки в какой-либо момент времени t , т. е. величина $v = \frac{dx}{dt}$, выразится на графике движения тангенсом угла α , который

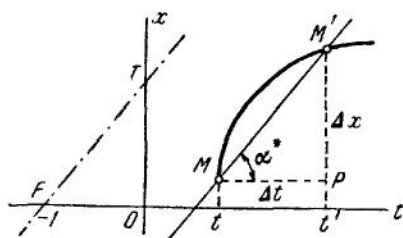


Рис. 40.

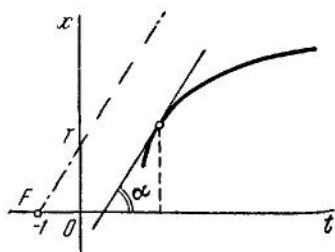


Рис. 41.

образует с осью абсцис касательная к кривой в точке M , соответствующей этому моменту. Ее построение выполняется так же, как и построение средней скорости v^* (рис. 41). Расположение кривой относительно оси времен определяет характер изменения

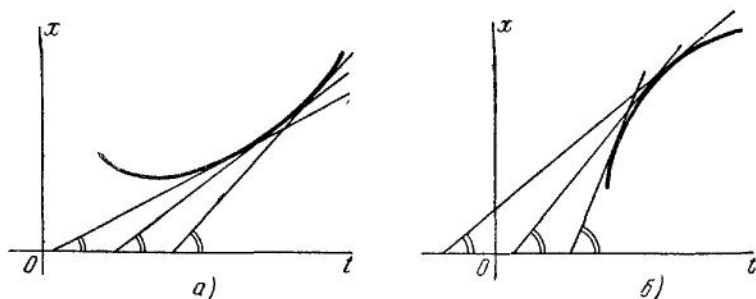


Рис. 42.

скорости. Из рис. 42, *a* и *б* видно, что выпуклость кривой по отношению к оси t (угол α , а следовательно, и его тангенс со временем возрастают) соответствует ускоренному, а вогнутость (тангенс убывает) — замедленному движению.

Скорость как функция времени может быть также представлена некоторой кривой, называемой *графиком скорости*.

Пользуясь аналогией, отмеченной в п. 3, находим, что графическое построение среднего и истинного ускорений по кривой скорости может быть выполнено так же, как и построение скорости по графику расстояний. Из рисунков видно, что с точностью до масштабного коэффициента $\omega^* = \operatorname{tg} \beta^*$ (рис. 43, а) и $\omega = \operatorname{tg} \beta$ (рис. 43, б).

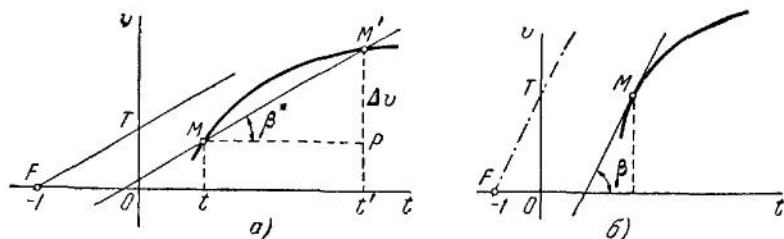


Рис. 43.

Путь S_{12} , пройденный точкой за данный промежуток времени $t_2 - t_1$, изобразится на графике скорости площадью, ограниченной кривой скорости, ординатами, соответствующими началу и концу промежутка времени, и осью времен, т. е. площадью ABt_2Bt_1 (рис. 44), где обе заштрихованные части берутся со знаком плюс, так как

$$S_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |v| dt$$

(под знаком интеграла стоит модуль скорости). Выражение

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt = x_2 - x_1$$

даст не путь, а перемещение точки M , т. е. изменение ее расстояния от выбранного начала отсчета за промежуток времени $t_2 - t_1$. Геометрически перемещение $(x_2 - x_1)$ выразится разностью площадей $(ABt_1) - (BCt_2)$.

Для равномерного движения, закон которого есть $x = x_0 + v_0 t$, графиком расстояний служит прямая (рис. 45); x_0 есть начальное расстояние, а скорость, определяемая величиной $\operatorname{tg} \alpha$, постоянна.

Для равнопеременного движения график расстояний изображается ветвью некоторой параболы, а графиком скорости служит

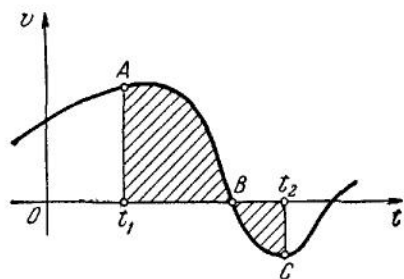


Рис. 44.

прямая, тангенс угла наклона которой к оси времен определяет величину ускорения в данном движении.

Б. Гармоническое колебание. Одним из часто встречающихся в приложениях случаев прямолинейного движения является *гармоническое колебательное* движение, закон которого дается уравнением

$$x = a \sin \omega t. \quad (10)$$

Скорость точки при гармоническом колебании будет:

$$v = \frac{dx}{dt} = a\omega \cos \omega t, \quad (11)$$

а ускорение

$$w = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2 \sin \omega t = -\omega^2 x. \quad (12)$$

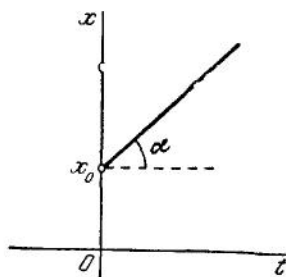


Рис. 45.

Величина a есть наибольшее отклонение движущейся точки от начала отсчета O и называется *амплитудой* колебаний (рис. 46); точка O называется *центром* колебаний, а промежуток времени, в течение которого точка возвращается в прежнее положение с той же скоростью, — *периодом*

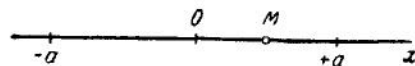


Рис. 46.

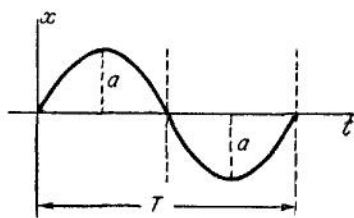


Рис. 47.

колебаний (T). Период определяется из условий [см. формулы (10) и (11)]:

$$\sin \omega(t + T) = \sin \omega t \quad \text{и} \quad \cos \omega(t + T) = \cos \omega t,$$

откуда

$$\omega T = 2\pi \quad \text{и} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (13)$$

Величина, обратная периоду, т. е.

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \nu,$$

называется *частотой* колебаний. Аргумент синуса ωt называется *фазой* колебаний. Величина $\omega = 2\pi\nu$ называется *циклической* или *круговой частотой* колебаний. Кривой расстояний этого движения является синусоида (рис. 47), кривой скоростей — косинусоида, а кривой ускорений — также синусоида, но сдвинутая по фазе относительно

графика движения на π . Как видно из формулы (12), ускорение гармонического движения точки пропорционально ее отклонению от центра колебаний.

В общем случае закон гармонических колебаний дается уравнением $x = a \sin(\omega t + \alpha)$, где величина α является начальной фазой колебаний (фазой в момент $t = 0$). В частности, при $\alpha = 0$ получаем закон (10); при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ закон движения будет $x = a \cos \omega t$.

6. Примеры. При решении задач кинематики точки необходимо, как правило, вначале установить по данным задачи закон, которым определяется рассматриваемое движение. После этого все искомые характеристики движения находятся по формулам, полученным в этом параграфе.

1. Тело, брошенное вертикально вверх с поверхности Земли, падает обратно на Землю через T сек после начала движения. Найти, на какую наибольшую высоту H поднялось тело, если его ускорение во все время движения направлено по вертикали вниз и равно постоянной величине g (пример соответствует случаю, когда сопротивлением воздуха можно пренебречь; g здесь ускорение силы тяжести).

Пренебрегая размерами тела, будем рассматривать его как точку. Так как по условиям ускорение $g = \text{const}$, то движение будет равномерно переменным. Считая ось Ox направленной вертикально вверх (начало отсчета O в точке бросания) и учитывая, что ускорение g направлено вниз, будем иметь закон движения в виде

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad (a)$$

где v_0 — неизвестная нам начальная скорость, полученная телом при бросании. В момент падения $x = 0$, а $t = T$. Подставляя эти величины в уравнение (a), находим:

$$v_0 = \frac{gT}{2}. \quad (б)$$

Скорость в этом движении меняется по закону $v = \dot{x} = v_0 - gt$. В наивысшей точке $v = 0$; следовательно, время подъема $t_1 = \frac{v_0}{g} = \frac{T}{2}$. Подставляя это значение t_1 и величину v_0 из равенства (б) в уравнение (a), найдем искомую высоту подъема

$$H = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gT^2}{8}.$$

2. На неподвижную проволочную окружность радиуса R (рис. 48) надето колечко M . Через колечко одновременно проходит стержень AB , вращающийся вокруг оси O так, что угол $DOB = \varphi$ растет пропорционально времени по закону $\varphi = \omega t$, где ω — заданная постоянная величина (такое вращение называется равномерным). Определить скорость и ускорение движения колечка M вдоль стержня.

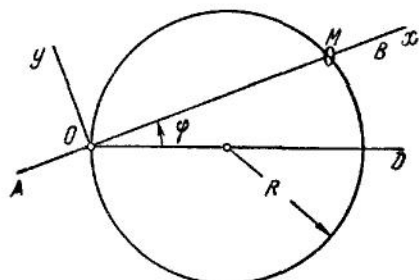


Рис. 48.

Так как необходимо определить движение колечка относительно стержня, то основную систему отсчета Oxy связываем со стержнем, направляя ось Ox вдоль стержня. Движение колечка в этой системе отсчета будет прямолинейным (вдоль оси Ox). Для решения задачи надо сначала определить закон этого движения, т. е. зависимость $x = OM$ от времени t . Из рисунка видно, что $OM = 2R \cos \varphi$. Следовательно, закон движения будет:

$$x = 2R \cos \omega t.$$

Отсюда видно, что колечко совершает вдоль стержня гармоническое колебание с амплитудой $2R$. Скорость и ускорение этого движения будут [ср. с формулами (11) и (12)]:

$$v = \dot{x} = -2R\omega \sin \omega t, \quad w = \ddot{x} = -2R\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 x.$$

3. Ползун A движется из положения D вдоль вертикальных направляющих с постоянной скоростью u (рис. 49). Прикрепленная к ползуну нерастяжимая нить перекинута через блок O и несет на конце груз B , который тоже перемещается вертикально. Расстояние блока O от вертикали AD равно a . Пренебрегая размерами блока, найти скорость и ускорение груза B как функцию пути s , пройденного ползунком A .

Движение рассматривается относительно системы отсчета Oxy . Закон движения груза B будет известен, если будет установлена зависимость между расстоянием $OB = x$ и $DA = s$, так как по данным задачи $s = ut$. Эта зависимость дается равенством (l — длина нити)

$$(l - x)^2 = s^2 + a^2. \quad (a)$$

Дифференцируя это равенство два раза по времени, будем иметь:

$$\begin{aligned} -\dot{x}(l-x) &= s\dot{s} = su, \\ -\ddot{x}(l-x) + \dot{x}^2 &= \dot{s}\dot{u} = u^2. \end{aligned}$$

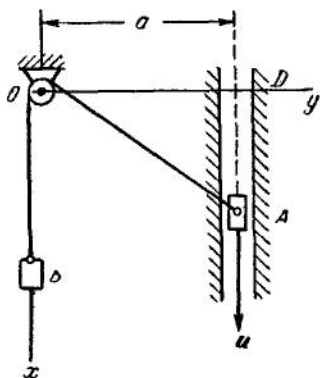


Рис. 49.

Отсюда, учитывая равенство (а), получаем следующие значения для скорости $v = \dot{x}$ и ускорения $w = \ddot{x}$ груза B :

$$v = -\frac{su}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \quad w = -\frac{a^2 u^2}{V(s^2 + a^2)^3}.$$

Знаки показывают, что груз движется вверх и притом ускоренно (перед знаком берется знак плюс, так как $l - x > 0$).

§ 6. Криволинейное движение точки

1. Закон движения. Если траектория движущейся точки относительно выбранной системы отсчета есть кривая линия, то движение называется *криволинейным*.

Положение точки в данной системе отсчета определяется радиусом-вектором $r(x, y, z)$, имеющим начало в начале координат (рис. 50).

При движении точки радиус-вектор меняется (в общем случае и по модулю и по направлению) как функция времени. Закон криволинейного движения точки выражается векторным уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

которое равносильно трем скалярным уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

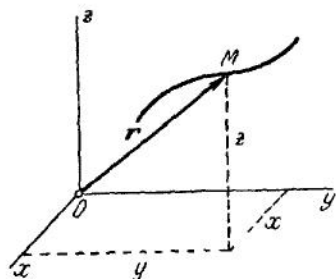


Рис. 50.

представляющим собой законы движения проекций точки по осям координат,

или закон движения точки в осях прямоугольных декартовых координат.

Если $\mathbf{r} = \text{const}$, то точка находится относительно данной системы отсчета в покое. Если \mathbf{r} изменяется в зависимости от времени, точка будет двигаться, описывая траекторию, которая явится годографом вектора \mathbf{r} . Равенства (2) представляют собой одновременно уравнения траектории в параметрической форме.

2. Скорость в криволинейном движении. Пусть в некоторый момент времени t положение точки M (рис. 51) определяется радиусом-вектором \mathbf{r} , а в момент t' — радиусом-вектором $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$. Тогда перемещение точки M за промежуток времени $\Delta t = t' - t$ будет:

$$\overline{MM'} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}.$$

Величина, равная отношению перемещения точки к соответствующему промежутку времени, т. е.

$$\mathbf{v}^* = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{t' - t} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}, \quad (3)$$

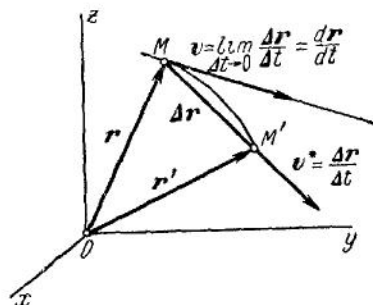


Рис. 51.

называется *средней скоростью* точки за промежуток времени Δt .

Следовательно, средняя скорость точки есть вектор, направленный по хорде в сторону движения (так как Δt есть скаляр).

Скорость точки в данный момент определяется как предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (4)$$

Таким образом, скорость точки в данный момент времени есть векторная величина, равная первой производной от радиуса-вектора точки по времени. Так как в пределе, при $\Delta t \rightarrow 0$, направление вектора $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ совпадает с направлением касательной к траектории (см. рис. 51), то скорость точки в данный момент времени направлена по касательной к ее траектории. Далее, так как $|d\mathbf{r}| = |ds|$, где ds есть элемент дуги траектории, то модуль скорости

$$|v| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right|. \quad (5)$$

Заметим, что равенство

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (6)$$

определяет алгебраическую величину скорости или, иными словами, проекцию вектора \mathbf{v} на касательную τ , проведенную в точке M в сторону положительного отсчета расстояния s , т. е. в этом случае $v = v_\tau$ (см. подстрочное примечание на стр. 56).

Выражая \mathbf{r} через его проекции на прямоугольные декартовы оси координат в виде

$$\mathbf{r} = xi + yj + zk,$$

получим выражение скорости точки через ее проекции на те же оси:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}. \quad (7)$$

Отсюда легко заключить, что проекции скорости точки на прямоугольные декартовы оси координат равны первым производным от координат точки по времени, т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \quad (8)$$

Из этих равенств следует также, что проекция скорости точки на любую неподвижную относительно данной системы отсчета ось равна скорости проекции этой точки на ту же ось.

По общей формуле, выражающей модуль вектора через его проекции, из равенств (8) имеем:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (9)$$

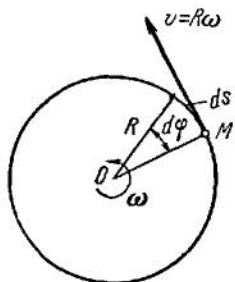
Для направляющих косинусов скорости получим:

$$\cos(\widehat{\mathbf{v}, x}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}, y}) = \frac{v_y}{v}, \quad \cos(\widehat{\mathbf{v}, z}) = \frac{v_z}{v}, \quad (10)$$

где v_x , v_y , v_z и v определяются равенствами (8) и (9).

Формулы (8) — (10) позволяют вычислить скорость точки в любой момент времени, если движение задано уравнениями (2), т. е. координатным способом.

3. Скорость в круговом движении. Угловая скорость. Рассмотрим движение точки M по окружности радиуса R (рис. 52). Скорость точки M в этом случае будет иметь численное значение



$$v = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt}, \quad (11)$$

так как $ds = R d\varphi$. Величина

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad (12)$$

называется *угловой скоростью* вращения радиуса $OM = R$ (см. еще § 8, п. 2).

Таким образом, при круговом движении скорость точки будет:

$$v = R\omega. \quad (13)$$

Рис. 52.

Направлена скорость по касательной к окружности, т. е. перпендикулярно к радиусу OM .

4. Разложение скорости на радиальную и трансверсальную составляющие. Представим радиус-вектор r точки в виде

$$r = r r^0, \quad (14)$$

где r^0 есть единичный вектор по направлению r . При движении точки вектор r меняется и по длине и по направлению, а следовательно, r^0 и r суть некоторые функции времени. Дифференцируя равенство (14) по t , получим следующее выражение скорости точки:

$$v = \frac{dr}{dt} r^0 + \frac{dr^0}{dt} r. \quad (15)$$

Скорость, как видно из этого выражения, состоит из двух слагаемых. Первое из них $\frac{dr}{dt} r^0$ имеет то же направление, что и радиус-вектор r , и характеризует изменение r по модулю. Чтобы выяснить смысл второго слагаемого, заметим, что $|dr^0| = d\varphi$ [см. формулу (88) на стр. 40], где φ — угол поворота вектора r ; следовательно, модуль второго слагаемого будет:

$$\left| \frac{dr^0}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Направление этого слагаемого перпендикулярно к направлению r^0 , так как направление дифференциала единичного вектора перпенди-

кулярно к направлению самого вектора. Тогда

$$r \frac{dr^0}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} p^0, \quad (16)$$

где p^0 есть единичный вектор направления, перпендикулярного к r^1). Таким образом, второе слагаемое представляет изменение вектора r по направлению. Окончательное выражение скорости будет:

$$v = v_r + v_p = \frac{dr}{dt} r^0 + r \frac{d\varphi}{dt} p^0. \quad (17)$$

Первое слагаемое $v_r = \frac{dr}{dt} r^0$ называется *радиальной* составляющей, а второе слагаемое $v_p = r \frac{d\varphi}{dt} p^0$ — *транскверсальной* (или поперечной) составляющей скорости (рис. 53).

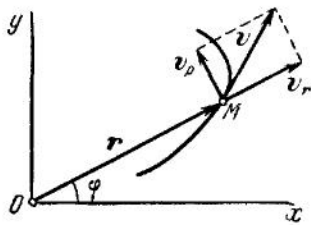


Рис. 53.

5. Скорость точки в полярных координатах. Пусть точка движется в плоскости и закон ее движения дан в полярных координатах уравнениями

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (18)$$

Тогда (рис. 53)

$$v = v_r + v_p = v_r r^0 + v_p p^0, \quad (19)$$

где, согласно (17),

$$v_r = \dot{r}, \quad v_p = r\dot{\varphi}. \quad (20)$$

Модуль скорости найдем из равенства

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_p^2} \quad \text{или} \quad v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (21)$$

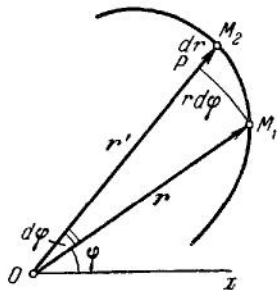


Рис. 54.

Этот же результат можно получить непосредственно, исходя из выражения элемента дуги ds в полярных координатах на плоскости. Рассматривая бесконечно малый криволинейный треугольник $M_1 M_2 P$ (рис. 54), мы можем его, с точностью до бесконечно малых высшего порядка, считать за прямолинейный и прямоугольный (угол P — прямой, так как PM_1 есть дуга окружности радиуса r). Тогда по теореме Пифагора получим:

$$(M_1 M_2)^2 = (P M_2)^2 + (M_1 P)^2.$$

¹⁾ Из равенства (15) следует, что вектор p^0 лежит в плоскости, проходящей через векторы r^0 и v , т. е. через радиус-вектор точки и касательную к траектории в этой точке; его направление получается поворотом вектора r^0 в этой плоскости на 90° в сторону возрастания угла φ .

Но $M_1M_2 = ds$, $PM_2 = dr$ и $M_1P = r d\varphi$. Следовательно,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Отсюда, деля обе части равенства на dt^2 , получаем:

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad (22)$$

что совпадает с результатом, даваемым формулой (21).

6. Секторная скорость. Предположим, что точка M движется по закону:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (23)$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (24)$$

Радиус-вектор точки, перемещаясь в пространстве, описывает конус, направляющей которого служит траектория точки. Обозначим величину

площади OM_0M боковой поверхности этого конуса, ограниченной кривой и двумя радиусом-векторами $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$, через σ (рис. 55). Пусть в момент t точка находится в положении M , определяемом радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ приходит в положение M' , определяемое радиусом-вектором $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(t + \Delta t)$. Тогда, если Δt мало, то приращение площади σ за промежуток времени Δt можно приближенно (с точностью до малых

высшего порядка) представить вектором, изображающим плоскую площадку OMM' , т. е. вектором, модуль которого равен половине площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{r} и $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, следовательно,

$$\Delta\sigma \approx \overline{OMM'} = \frac{1}{2} (\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}). \quad (25)$$

Предел отношения приращения площади, описываемой радиусом-вектором, к соответствующему промежутку времени Δt , при $\Delta t \rightarrow 0$, называется *секторной скоростью* точки относительно центра O . Следовательно,

$$\mathbf{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \mathbf{v}_\sigma = \frac{d\sigma}{dt}. \quad (26)$$

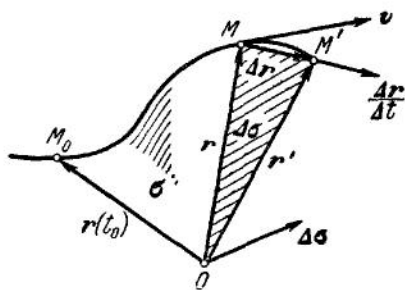


Рис. 55

Чтобы найти выражение v_σ через вектор скорости \mathbf{v} , разделим обе части равенства (25) на Δt ; получим:

$$2 \frac{\Delta \sigma}{\Delta t} \approx \frac{\mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (27)$$

Переходя в выражении (27) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, найдем на основании известных теорем о пределах:

$$2\mathbf{v}_\sigma = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\mathbf{r} \times \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \mathbf{r} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Следовательно,

$$2\mathbf{v}_\sigma = 2 \frac{d\sigma}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad (28)$$

т. е. удвоенная секторная скорость точки относительно некоторого центра равна моменту скорости этой точки относительно того же центра.

Из равенства (28) видно, что секторная скорость зависит от центра, относительно которого она определяется, и для каждого центра будет иметь свою величину; поэтому, задавая секторную скорость, необходимо указывать центр, относительно которого она берется.

Вычислим проекции \mathbf{v}_σ на оси координат. Для этого заметим, например, что проекция на ось Oz вектора $\frac{d\sigma}{dt}$, перпендикулярного

к площадке $d\sigma$, равна проекции площади этой площадки на плоскость xy , перпендикулярную к оси z , т. е. площадке $d\sigma_{xy}$, разделенной на dt (рис. 56). Спроектируем теперь все части равенства

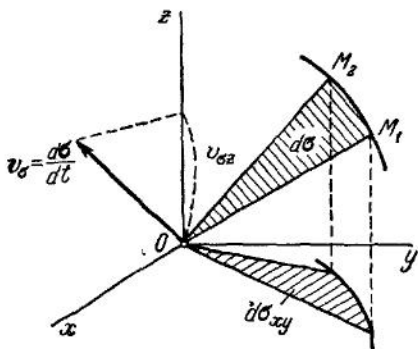


Рис. 56.

$$2\mathbf{v}_\sigma = 2 \frac{d\sigma}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \quad (29)$$

на оси координат x , y , z с началом в центре O . Получим:

$$\left. \begin{aligned} 2v_{\sigma x} &= 2 \frac{d\sigma_{yz}}{dt} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_x = y\dot{z} - z\dot{y}, \\ 2v_{\sigma y} &= 2 \frac{d\sigma_{zx}}{dt} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_y = z\dot{x} - x\dot{z}, \\ 2v_{\sigma z} &= 2 \frac{d\sigma_{xy}}{dt} = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z = x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Из равенств (30), дающих выражения, для проекций секторной скорости на оси координат, следует, что удвоенная секторная скорость проекции точки на какую-либо плоскость, проходящую через центр O , равна моменту скорости точки относительно оси, перпендикулярной к этой плоскости и проходящей через тот же центр O .

В случае плоского движения величина элемента площади может быть представлена через полярные координаты в виде (см. рис. 54)

$$d\sigma = OM_1M_2 = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

следовательно, численное значение секторной скорости в полярных координатах выражается равенством

$$v_\sigma = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}, \quad (31)$$

где φ есть полярный угол.

7. Ускорение точки в криволинейном движении. Пусть точка, двигаясь по закону, выражаемому равенствами (1) или (2), в момент t находится в положении M и имеет скорость $\vec{v} = \vec{v}(t)$, а в момент $t + \Delta t$ приходит в положение M' и имеет скорость $\vec{v}' = \vec{v}(t + \Delta t)$ (рис. 57). Построим вектор, равный \vec{v}' , в точке M . Тогда

$$\vec{v}' - \vec{v} = \Delta\vec{v},$$

где $\Delta\vec{v}$ есть приращение скорости за промежуток времени Δt . Разделив $\Delta\vec{v}$ на Δt , получим вектор

$$\vec{w}^* = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \quad (32)$$

который называется *средним ускорением* точки за

промежуток времени Δt . Перейдя к пределу, при $\Delta t \rightarrow 0$, получим величину \vec{w} , называемую *ускорением* точки в данный момент времени t :

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (33)$$

или, учитывая равенство (4),

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (34)$$

Таким образом, ускорение точки в данный момент времени есть векторная величина, равная первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

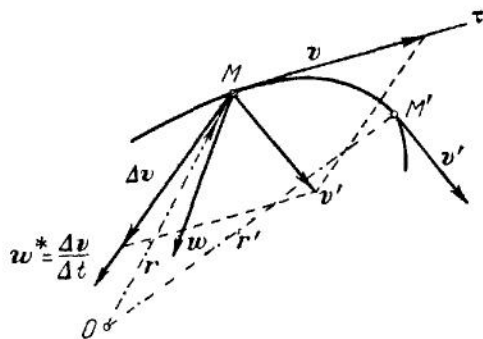


Рис. 57.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ расположен по ту же сторону от касательной $M\tau$ к траектории, что и векторы $\boldsymbol{\omega}^*$ или $\Delta\boldsymbol{v}$; следовательно, он всегда направлен в сторону вогнутости траектории.

Предельное положение плоскости, проходящей через какие-нибудь три точки кривой, когда эти точки стремятся к точке M , или (что то же) предельное положение плоскости, проходящей через касательную $M\tau$ и точку M' , когда эта точка стремится к M , определяет *соприкасающуюся плоскость* в точке M кривой. Для плоской кривой соприкасающаяся плоскость есть, очевидно, плоскость самой кривой.

Из равенства (33) следует, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет лежать в той же плоскости, в которой в пределе лежит вектор $\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}$, т. е. в соприкасающейся плоскости. Таким образом, вектор ускорения $\boldsymbol{\omega}$ лежит в соприкасающейся плоскости и направлен в сторону вогнутости траектории.

Разложим вектор \boldsymbol{r} по осям координат; тогда

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

Дифференцируя это выражение два раза по времени, получим:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}.$$

Отсюда

$$\omega_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \omega_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad \omega_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \quad (35)$$

и

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad \text{или} \quad \omega = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}. \quad (36)$$

Направляющие косинусы ускорения будут:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{\omega}, x}) = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{\omega}, y}) = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{\omega}, z}) = \frac{\omega_z}{\omega}, \quad (37)$$

где значения ω_x , ω_y , ω_z и ω даются равенствами (35) и (36).

Согласно (35), проекции ускорения точки на оси координат равны вторым производным от координат этой точки по времени. Одновременно из формул (35) видно, что проекция ускорения точки на любую, неподвижную относительно данной системы отсчета ось, равна ускорению проекции этой точки на ту же ось.

Формулы (35)—(37) позволяют вычислить ускорение точки в любой момент времени, если движение задано координатным способом уравнениями (2).

8. Некоторые сведения из дифференциальной геометрии.

1) *Естественный трехгранник*. Предельное положение прямой, проходящей через точки M и M' кривой, когда точка M' стремится к M , определяет *касательную* к кривой в данной точке M .

Перпендикуляр к касательной в точке M называется *нормалью* к кривой в этой точке. Очевидно, что в данной точке кривой можно провести бесконечное множество (пучок) нормалей, и все они будут лежать в плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной к касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью*. Нормаль, лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью* к кривой в точке M . Таким образом, главная нормаль есть линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскостей в данной точке M кривой¹⁾. Нормаль, перпендикулярная к соприкасающейся плоскости, называется *бинормалью*.

Обозначим единичные векторы: касательной через τ^0 , главной нормали через n^0 и бинормали через b^0 (рис. 58). Через эти векторы



Рис 58

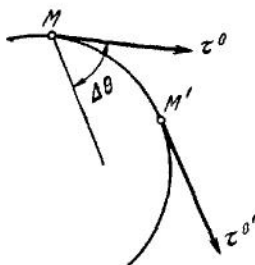


Рис. 59.

проходят плоскости: $(\tau^0 n^0)$ — соприкасающаяся, $(n^0 b^0)$ — нормальная и $(b^0 \tau^0)$ — называемая *спрямляющей* плоскостью.

Три взаимно перпендикулярных направления, определяемых векторами τ^0 , n^0 и b^0 , образуют прямоугольный триэдр с вершиной в точке M , называемый *естественным, натуральным* или *подвижным трехгранником*, причем направления τ^0 , n^0 и b^0 определяются так же, как направления координатных осей (по правой системе).

2) *Кривизна кривой*. В двух точках кривой M и M' проведем единичные векторы касательных: τ^0 и $\tau^{0'}$. Угол между этими касательными, называемый *углом смежности*, обозначим через $\Delta\theta$, а длину дуги MM' — через Δs (рис. 59). Отношение

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = k^* \quad (38)$$

¹⁾ Напоминаем, что соприкасающаяся плоскость в точке M кривой определяется как предельное положение плоскости, проходящей через любые три точки кривой, когда эти точки стремятся к точке M , или же как предельное положение плоскости, проходящей через касательную в точке M и любую точку M' , когда M' стремится к M .

называется *средней кривизной* кривой на отрезке MM' , а предел этого отношения при $\Delta s \rightarrow 0$, если он существует, т. е.

$$\lim \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \lim \frac{|\Delta \tau^0|}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = k, \quad (39)$$

называется *кривизной* кривой в данной точке M ¹⁾.

Таким образом, кривизна кривой в данной точке равна отношению элементарного угла смежности к элементу дуги, т. е.

$$k = \frac{d\theta}{ds}. \quad (40)$$

Найдем кривизну окружности радиуса R (рис. 60). Элемент дуги окружности $\overline{MM'} = ds = R d\theta$, где центральный угол $d\theta$ равен углу смежности. Тогда

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{R d\theta} = \frac{1}{R}, \quad (41)$$

т. е. кривизна окружности есть величина, обратная радиусу R и постоянная для всех точек; следовательно, окружность есть кривая постоянной кривизны.

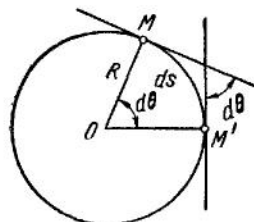


Рис. 60.

Кривизна любой кривой вообще не постоянна, а меняется от точки к точке.

Если через три точки M, M_1, M_2 любой кривой провести окружность, то в пределе (при приближении точек M_1 и M_2 к точке M) она будет лежать в соприкасающейся плоскости (рис. 61, а). Эта



Рис. 61.

предельная окружность называется *соприкасающимся кругом* или *кругом кривизны*. В соприкасающейся плоскости можно построить бесчисленное множество окружностей, центры которых будут лежать

¹⁾ Угол $d\theta$ в равенстве (39), вообще не есть дифференциал некоторой функции θ .

на главной нормали к кривой и которые будут иметь в точке M общую касательную с кривой, т. е. касаться кривой в этой точке (рис. 61, б). Из всего этого множества только соприкасающийся круг проходит через три бесконечно близкие точки кривой, т. е. находится с кривой в касании второго порядка (остальные окружности проходят через две бесконечно близкие точки кривой). Поэтому кривизна кривой в точке M равна кривизне соприкасающегося круга; отсюда термин «круг кривизны». Центр круга кривизны называется *центром кривизны*, а радиус этого круга — *радиусом кривизны* кривой в точке M .

Обозначая радиус кривизны через ρ , получим выражение кривизны кривой в точке M

$$k = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}. \quad (42)$$

9. Разложение ускорения по осям естественного трехгранника. Представим скорость точки M в виде

$$v = v_\tau \tau^0 = v \tau^0, \quad (43)$$

где $v = v_\tau$ — проекция вектора v на ось $M\tau^0$ (см. рис. 58). Дифференцируя равенство (43) по времени, получим:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} \tau^0 + \frac{d\tau^0}{dt} v. \quad (44)$$

Первое слагаемое есть вектор $\frac{dv}{dt} \tau^0$, направленный по касательной τ^0 . Найдем значение второго слагаемого. Дифференциал единичного вектора $d\tau^0$ перпендикулярен к τ^0 и, как видно из рис. 62, лежит в соприкасающейся плоскости; следовательно, вектор $d\tau^0$ направлен

по главной нормали n^0 . Кроме того, $|d\tau^0| = |\tau^0| d\theta = d\theta$, где $d\theta$ — угол смежности [см. формулу (88) на стр. 40]. Отсюда находим, что $d\tau^0 = d\theta n^0$ и

$$\frac{d\tau^0}{dt} = \frac{d\theta}{dt} n^0.$$

Но

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho},$$

так как

$$\frac{ds}{dt} = v, \text{ а } \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

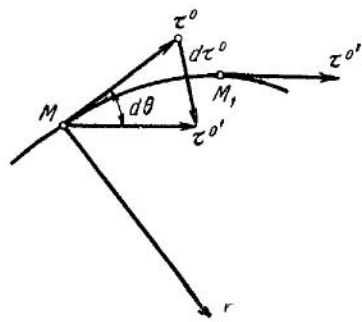


Рис. 62.

где ρ есть радиус кривизны кривой в точке M . Следовательно,

$$\frac{d\tau^0}{dt} = \frac{v}{\rho} n^0. \quad (45)$$

Подставляя найденную величину в равенство (44), получим окончательно:

$$\boldsymbol{w} = \frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \boldsymbol{n}^0. \quad (46)$$

Таким образом, проекции ускорения на оси естественного трехгранника равны¹⁾

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad \omega_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \omega_b = 0. \quad (47)$$

Вектор $\boldsymbol{w}_\tau = \omega_\tau \boldsymbol{\tau}^0$ называется *тангенциальной* или *касательной* составляющей ускорения, а вектор $\boldsymbol{w}_n = \omega_n \boldsymbol{n}^0$ — *нормальной* составляющей (рис. 63). Модуль ускорения на основании равенств (46) будет:

$$\omega = \sqrt{\omega_\tau^2 + \omega_n^2}$$

или

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}. \quad (48)$$

Угол μ между вектором \boldsymbol{w} и главной нормалью определяется из уравнения (см. рис. 63)

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega_\tau}{\omega_n}. \quad (49)$$

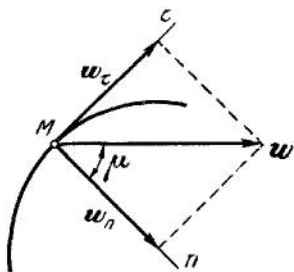


Рис. 63.

По формулам (47) — (49) можно определить модуль и направление ускорения, если движение задано естественным способом, т. е. дана траектория (следовательно, известен радиус кривизны в каждой ее точке) и дан закон движения вдоль траектории в виде $s = f(t)$. Вектор $\boldsymbol{\tau}^0$ (или ось $\boldsymbol{\tau}$) направляется в этом случае в сторону положительного отсчета расстояния s .

Рассуждая так же, как в случае прямолинейного движения (стр. 56), приходим к выводу, что движение будет ускоренным, когда проекции векторов \boldsymbol{v} и \boldsymbol{w} на ось $\boldsymbol{\tau}$, т. е. величины $v = \frac{ds}{dt}$ и $\omega_\tau = \frac{dv}{dt}$, имеют одинаковые знаки (угол между \boldsymbol{v} и \boldsymbol{w} острый, рис. 64, а),

¹⁾ Значение ω_τ можно еще представить в виде

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

и замедленным, когда эти знаки разные (угол между v и w тупой, рис. 64, б).

Если в *данный момент времени* $\frac{dv}{dt} = w_\tau = 0$ (что может иметь место, когда величина скорости достигает максимума или минимума), то ускорение точки в этот момент направлено по главной нормали ($w = w_n$, $\mu = 0$).

Если же $\frac{dv}{dt} = w_\tau = 0$ в течение некоторого *промежутка времени*, то на этом интервале времени численная величина скорости постоянна (движение является равномерным криволинейным), а ускорение, появляющееся за счет изменения вектора v по направлению, направлено вдоль главной нормали к траектории ($w = \frac{v^2}{\rho} n^0$).

Аналогично если в *данный момент времени* $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, то вектор w в этот момент направлен по касательной к траектории ($w = w_\tau$, $\mu = 90^\circ$). Такой случай может иметь место или когда в данный момент скорость точки обращается в нуль (точка меняет направление своего движения), или же когда движущаяся точка находится в точке перегиба своей траектории,

где $\rho = \infty$ (рис. 65). Если же $w_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$ в течение некоторого *промежутка времени*, а точка движется ($v \neq 0$), то это может быть лишь в случае, когда в течение всего промежутка времени движение прямолинейно ($\rho = \infty$).

Наконец, полное ускорение точки в течение некоторого промежутка времени может быть равно нулю ($w = 0$), когда в течение этого промежутка и $w_\tau = 0$ и $w_n = 0$, т. е., как следует из предыдущих рассуждений, когда точка в течение этого промежутка движется относительно выбранной системы отсчета равномерно и прямолинейно.

10. Законы равномерного и равнопеременного криволинейного движения. 1) Если во все время движения численная величина скорости постоянна, т. е. $v = v_0 = \text{const}$, то криволинейное движение называется равномерным. Из выражения $\frac{ds}{dt} = v$ или $ds = v dt$, интегрируя, найдем закон равномерного криволинейного движения:

$$s = s_0 + v_0 t, \quad (50)$$

где s_0 — начальное расстояние точки (в момент $t = 0$).

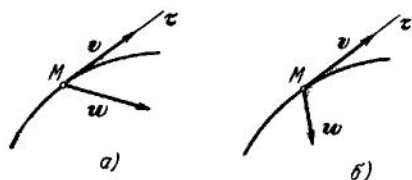


Рис. 64.

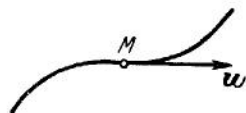


Рис. 65.

2) Если *касательное ускорение* точки во все время движения постоянно, т. е. $\omega_\tau = a_\tau = \text{const}$, то криволинейное движение называется *равнопеременным*. Из выражения $\frac{dv}{dt} = a_\tau$ или $dv = a_\tau dt$ найдем закон изменения скорости в этом движении:

$$v = v_0 + a_\tau t, \quad (51)$$

где v_0 — начальная скорость точки (в момент $t=0$). Отсюда, принимая во внимание, что $v = \frac{ds}{dt}$, получим закон равнопеременного криволинейного движения в виде

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \quad (52)$$

где s_0 — начальное расстояние. От случая прямолинейного движения [см. стр. 56, формула (9)] выражение (52) отличается тем, что в него вместо x входит s , а вместо a — величина a_τ .

11. Ускорение в круговом движении. Если точка движется по окружности радиуса $OM = R$ (рис. 66), то, согласно (13), скорость ее будет:

$$v = R\omega. \quad (53)$$

Дифференцируя это выражение по t , получим тангенциальную проекцию ускорения

$$\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \quad (54)$$

Величина

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (55)$$

называется *угловым ускорением* вращения радиуса $OM = R$ (см. еще § 8, п. 2).

Нормальную проекцию ускорения, которую при круговом движении называют еще *центростремительным* ускорением, получим, принимая во внимание, что радиус кривизны $\rho = R$, в виде

$$\omega_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2. \quad (56)$$

Модуль ускорения точки в круговом движении будет:

$$\omega = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (57)$$

Угол μ , который образует ускорение ω с радиусом, определяется из равенства

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega_\tau}{\omega_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (58)$$

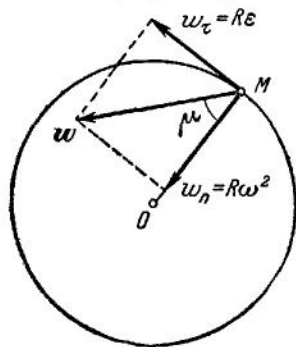


Рис. 66.

Если $v = \text{const}$, то ускорение в круговом движении будет направлено по радиусу, так как тангенциальное ускорение в этом случае равно нулю.

12. Разложение ускорения на радиальную и трансверсальную составляющие. Выражение ускорения в полярных координатах. Пусть точка движется по плоской кривой (рис. 67) по закону $r = r(t)$. Согласно формуле (17), скорость v этого движения можно представить в виде

$$v = \frac{dr}{dt} r^0 + r \frac{d\varphi}{dt} p^0.$$

Дифференцируя данное равенство по t , получим:

$$\frac{dv}{dt} = w = \frac{d^2r}{dt^2} r^0 + \frac{dr}{dt} \frac{dr^0}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} p^0 + r \frac{d^2\varphi}{dt^2} p^0 + r \frac{d\varphi}{dt} \frac{dp^0}{dt}. \quad (59)$$

Найдем модуль и направление вектора $\frac{dp^0}{dt}$. Дифференциал единичного вектора dp^0 перпендикулярен к p^0 и направлен, как видно из рисунка, противоположно r^0 (направление dp^0 получается поворотом p^0 на 90° в сторону положительного отсчета угла φ); кроме того, $|dp^0| = d\varphi$. Следовательно,

$$\frac{dp^0}{dt} = - \frac{d\varphi}{dt} r^0. \quad (60)$$

Подставляя это значение $\frac{dp^0}{dt}$ в равенство (59) и вынося единичные векторы r^0 и p^0 за скобки, получим, принимая во внимание равенство (16) и приводя подобные члены,

$$w = \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} r^0 + \left\{ r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right\} p^0. \quad (61)$$

Формула (61) представляет собой разложение ускорения на составляющие: *радиальную*

$$w_r = \left\{ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} r^0, \quad (62)$$

направленную по радиусу-вектору, и *трансверсальную* (или *поперечную*)

$$w_p = \left\{ r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right\} p^0, \quad (63)$$

перпендикулярную к радиусу-вектору.

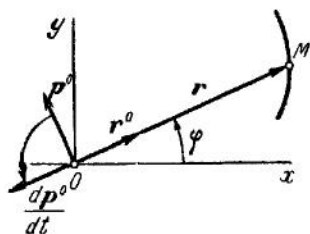


Рис. 67.

Рассмотрим отдельно члены, входящие в выражения $\boldsymbol{\omega}_r$ и $\boldsymbol{\omega}_p$. Член $\frac{d^2 r}{dt^2}$ есть ускорение точки вследствие ее движения по радиус-вектору, а $r \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ есть центростремительное ускорение, происходящее вследствие вращения радиуса-вектора [см. формулу (56)]; этим же вращением вызывается тангенциальное ускорение $r \frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ в выражении $\boldsymbol{\omega}_p$ [формула (54)]. Член $2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt}$ представляет собой так называемое *поворотное* или *кориолисово* ускорение, которое будет рассмотрено в конце главы III.

Заметим, что величина $\boldsymbol{\omega}_p$ может быть представлена еще в виде

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \quad (64)$$

Выражение $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right)$, которое на основании (31) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d\boldsymbol{v}_\sigma}{dt} = \frac{d^2 \boldsymbol{\sigma}}{dt^2},$$

называется *секторным ускорением*.

Легко доказать, что момент ускорения относительно какого-либо центра равен удвоенному секторному ускорению относительно этого центра. Действительно, согласно равенству (28),

$$\text{мом}_O \boldsymbol{v} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = 2 \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, будем иметь:

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = 2 \frac{d^2 \boldsymbol{\sigma}}{dt^2}.$$

Так как $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{w}$, а $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{v}$, вследствие чего первый член левой части обращается в нуль, то окончательно получим:

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{w} = 2 \frac{d^2 \boldsymbol{\sigma}}{dt^2},$$

или

$$\text{мом}_O \boldsymbol{w} = 2 \frac{d^2 \boldsymbol{\sigma}}{dt^2}, \quad (65)$$

что и требовалось доказать.

Если закон движения точки дан в полярных координатах уравнениями

$$\boldsymbol{r} = r(t) \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi(t),$$

то по этим данным легко вычислить проекции ускорения w_r и w_p , так как, согласно (62) и (63),

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (66)$$

Модуль ускорения выразится формулой

$$w = \sqrt{w_r^2 + w_p^2} = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})^2}. \quad (67)$$

13. Примеры. Как уже указывалось, для нахождения кинематических характеристик движения точки (траектории, скорости, ускорения и др.) надо знать уравнения, определяющие закон ее движения. Если уравнения движения точки непосредственно не заданы, то решение задачи обычно следует начинать с нахождения этих уравнений.

1. В механизме эллипсографа, изображенного на рис. 68, ползуны A и B , соединенные линейкой AB , могут перемещаться по взаимно перпендикулярным направляющим. Механизм приводится в движение кривошипом OC (C — середина отрезка AB), вращающимся с постоянной угловой скоростью ω . Найти траекторию, скорость и ускорение точки M линейки AB , если $AM = a$, $BM = b$.

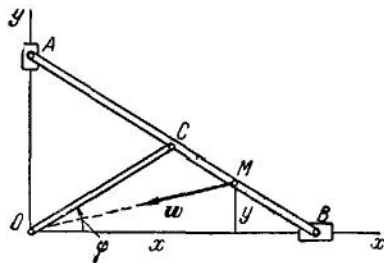


Рис. 68.

Направим оси Ox и Oy основной системы отсчета вдоль направляющих OA и OB и найдем закон движения точки M , т. е. ее координаты x , y , как функции времени t . Из рисунка видно, что $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$. Но по условиям задачи $\varphi = \omega t$, следовательно, уравнения движения точки M будут:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t. \quad (a)$$

Для определения траектории исключим t из уравнений (а), представив их в виде

$$\frac{x}{a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{b} = \sin \omega t.$$

Возводя обе части этих равенств в квадрат и складывая их почленно, найдем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (б)$$

Таким образом, траекторией точки M будет эллипс с полуосями a и b . Закрепляя с помощью простого устройства в любой точке M линейки AB карандаш, мы получим прибор, который будет чертить эллипсы с разными полуосями a и b ; отсюда и наименование прибора — эллипсограф.

Для определения скорости точки M вычисляем проекции скорости, дифференцируя равенства (а) по t . Получим:

$$v_x = \dot{x} = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = b\omega \cos \omega t. \quad (в)$$

Отсюда модуль скорости будет:

$$v = \omega \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + b^2 \cos^2 \omega t}. \quad (\Gamma)$$

Если $a > b$, то скорость v изменяется между ее наибольшим значением $v = \omega a$, которое она имеет при $x = 0$, $y = \pm b$, т. е. на концах малой полуоси эллипса, и наименьшим значением $v_{\min} = \omega b$ при $x = \pm a$, $y = 0$, т. е. на концах большой полуоси. Направление вектора v в любой момент времени определяется из равенств

$$\cos(\widehat{v, Ox}) = \frac{v_x}{v}, \quad \cos(\widehat{v, Oy}) = \frac{v_y}{v}, \quad (\delta)$$

где величины, стоящие справа, даются формулами (в) и (г).

Ускорение точки M также найдется по его проекциям:

$$w_x = \ddot{x} = -\omega^2 a \cos \omega t = -\omega^2 x, \quad w_y = \ddot{y} = -\omega^2 b \sin \omega t = -\omega^2 y. \quad (\epsilon)$$

Отсюда модуль ускорения будет:

$$w = \omega^2 \sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r. \quad (\zeta)$$

Следовательно, ускорение точки пропорционально ее расстоянию $OM = r$ от начала координат. Для углов, образуемых вектором w с осями координат, находим:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{w, Ox}) &= \frac{w_x}{w} = -\frac{x}{r}, \\ \cos(\widehat{w, Oy}) &= \frac{w_y}{w} = -\frac{y}{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ представляют собой направляющие косинусы радиуса-вектора r , то отсюда видно, что вектор w направлен прямо противоположно вектору r , т. е. вдоль линии MO к центру O .

2. При малых углах отклонения груз M маятника (рис. 69) движется по окружности радиуса $AM = l$ по закону $s = a \sin kt$, где $s = OM$, а величины a и k — постоянные. Найти скорость, а также касательное и нормальное ускорение груза и те положения, в которых эти величины обращаются в нуль.

В данном случае движение точки M задано, причем естественным способом, так как известны ее траектория и закон движения вдоль траектории $s(t)$. Тогда, пользуясь соответствующими формулами, находим:

$$v = \dot{s} = ak \cos kt, \quad w_\tau = \dot{v} = -ak^2 \sin kt, \quad w_n = \frac{v^2}{l} = \frac{a^2 k^2}{l} \cos^2 kt.$$

Точка M совершает вдоль траектории гармоническое колебание с дуговой амплитудой a . В крайних положениях M' и M'' , для которых $\widehat{OM'} = \widehat{OM''} = a$, будет $\sin kt = \pm 1$ и $\cos kt = 0$. Следовательно, в этих точках скорость и нормальное ускорение обращаются в нуль, а касательное ускорение

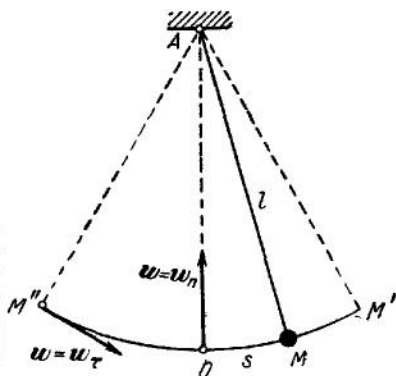


Рис. 69.

принимает наибольшее по модулю значение $w_{\tau \max} = ak^2$. Наоборот, в начале отсчета O , где $s = 0$, будет $\sin kt = 0$ и $\cos kt = 1$. В этом положении $w_{\tau} = 0$, а v и w_n имеют максимальные значения $v_{\max} = ak$ и $w_{n \max} = \frac{a^2 k^2}{l}$.

Пример подтверждает сделанный ранее общий вывод о том, что в точках, где скорость в данный момент имеет максимум (или минимум), касательное ускорение $w_{\tau} = 0$, а в точках, где $v = 0$ (или в точках перегиба траектории), нормальное ускорение $w_n = 0$.

3. Закон движения точки дан уравнениями

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t, \quad z = ut + \frac{at^2}{2}. \quad (a)$$

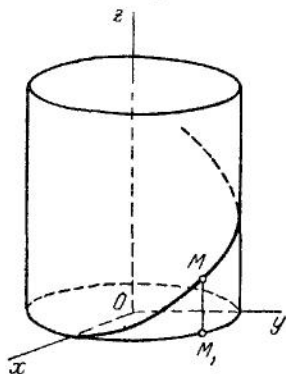


Рис. 70.

Найти касательное и нормальное ускорения точки и радиус кривизны ее траектории.

Возводя первые два из уравнений (а) в квадрат и складывая их почленно, найдем, что траектория точки лежит на поверхности $x^2 + y^2 = R^2$, т. е. на круговом цилиндре радиуса R , ось которого совпадает с осью Oz (рис. 70).

Точка M движется так, что ее проекция M_1 на плоскость Oxy описывает окружность радиуса R , а расстояние $M_1M = z$ со временем возрастает; следовательно, точка M описывает некоторую винтовую линию. Расстояние h , на которое точка M поднимается за время, в течение которого ее проекция M_1 описывает полную окружность, т. е. за время $T = 2\pi/\omega$, называется шагом винтовой линии. В данном случае шаг будет переменным (возрастающим). При $a = 0$ расстояние $M_1M = z = ut$ растет пропорционально времени и $h = uT = 2\pi u/\omega = \text{const}$. В этом частном случае траекторией точки будет винтовая линия с постоянным шагом.

Для определения w_{τ} и w_n надо сначала по уравнениям (а) вычислить v и w . Тогда искомые величины найдутся из равенств $|w_{\tau}| = |dv/dt|$ и $w^2 = w_{\tau}^2 + w_n^2$ (значения w_n можно было бы найти как v^2/ρ , вычисляя ρ по формулам дифференциальной геометрии, но такой путь сложнее).

Производя соответствующие подсчеты, получим:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -\omega R \sin \omega t, & v_y = \dot{y} &= \omega R \cos \omega t, & v_z = \dot{z} &= u + at, \\ w_x = \ddot{x} &= -\omega^2 R \cos \omega t, & w_y = \ddot{y} &= -\omega^2 R \sin \omega t, & w_z = \ddot{z} &= a. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v^2 &= \omega^2 R^2 + (u + at)^2, \\ w^2 &= \omega^4 R^2 + a^2 = \text{const}. \end{aligned} \quad (б)$$

Дифференцируя первое из этих выражений по времени, находим $v \frac{dv}{dt} = a(u + at)$, откуда, представляя w_{τ} как функцию v , получим:

$$|w_{\tau}| = \frac{a\sqrt{v^2 - \omega^2 R^2}}{v}. \quad (в)$$

После этого из равенства $w_n^2 = w^2 - w_\tau^2$ окончательно находим:

$$w_n = \frac{\omega R}{v} \sqrt{\omega^2 v^2 + a^2}. \quad (г)$$

Зная w_n , легко определить радиус кривизны траектории ρ . Так как $w_n = v^2/\rho$, то, следовательно,

$$\rho = \frac{v^3}{\omega R \sqrt{\omega^2 v^2 + a^2}}. \quad (д)$$

Значения всех искомых величин как функции времени t можно найти, заменяя v его значением из (б). В частном случае, когда $a = 0$ и точка описывает винтовую линию с постоянным шагом, будем иметь:

$$v = \sqrt{\omega^2 R^2 + u^2}, \quad w_n = w = R\omega^2, \quad w_\tau = 0. \quad (е)$$

Точка в этом случае движется с постоянными по модулю скоростью и ускорением, причем ускорение направлено по нормали к траектории (перпендикулярно к оси Oz). Для радиуса кривизны, полагая в (д) $a = 0$ и заменяя v его значением из (е), будем окончательно иметь:

$$\rho = R + \frac{u^2}{R\omega^2}.$$

Таким образом, радиус кривизны винтовой линии с постоянным шагом больше, чем радиус R кругового сечения цилиндра.

4. Точка M начинает двигаться вдоль прямой OA из положения M_0 со скоростью u , пропорциональной расстоянию $OM = r$ (рис. 71). Таким образом, $u = kr$ и $r = r_0$ при $t = 0$. Сама прямая вращается вокруг центра O в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью ω . Найти траекторию, скорость и ускорение точки M .

Закон движения точки удобно определить, воспользовавшись полярными координатами r и φ . По условиям задачи $\varphi = \omega t$, а радиальная проекция скорости $v_r = \frac{dr}{dt} = u = kr$, откуда

$$\frac{dr}{r} = k dt.$$

Беря определенные интегралы слева в пределах от r_0 до r , а справа от 0 до t , получим:

$$\ln \frac{r}{r_0} = kt \quad \text{или} \quad r = r_0 e^{kt}.$$

Таким образом, уравнения движения точки в полярных координатах будут:

$$r = r_0 e^{kt}, \quad \varphi = \omega t. \quad (а)$$

Исключая из этих равенств t , найдем уравнение траектории

$$r = r_0 e^{\frac{k}{\omega} \varphi}. \quad (б)$$

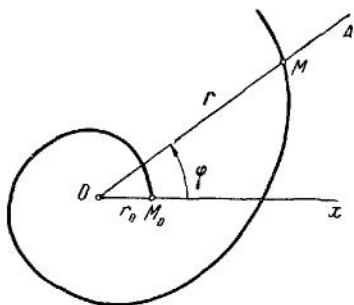


Рис 71.

Следовательно, точка M описывает логарифмическую спираль. Скорость и ускорение точки подсчитаем по их радиальным и трансверсальным проекциям [формулы (20) и (66)]. Имеем из уравнений (а)

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = kr e^{kt} = kr, & v_\varphi &= r\dot{\varphi} = \omega r, \\ w_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = (k^2 - \omega^2)r, & w_\varphi &= r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 2k\omega r. \end{aligned} \quad (b)$$

Отсюда

$$v = \sqrt{k^2 + \omega^2} r, \quad w = \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} r = (k^2 + \omega^2) r. \quad (г)$$

Таким образом, модули скорости и ускорения точки растут пропорционально ее расстоянию r от центра O

Теперь, аналогично тому как это делалось в примере 3, легко подсчитать касательное и нормальное ускорение точки и радиус кривизны траектории:

$$\begin{aligned} w_\tau &= \frac{dv}{dt} = \sqrt{k^2 + \omega^2} \dot{r} = k\sqrt{k^2 + \omega^2} r, \\ w_n &= \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = \omega\sqrt{k^2 + \omega^2} r, \\ \rho &= \frac{v^2}{w_n} = \frac{\sqrt{k^2 + \omega^2} r}{\omega}. \end{aligned} \quad (д)$$

Все эти величины также растут пропорционально r .

14. Криволинейные координаты. Выражение скорости в криволинейных координатах. Пусть в некоторой декартовой системе K точка M имеет координаты x, y, z . За координаты этой точки мы можем принять любые однозначные и дифференцируемые функции x, y, z :

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \quad (68)$$

если только возможно из системы (68) однозначно определить:

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3) \quad (69)$$

(точечное преобразование пространства). Действительно, тогда всякой системе значений (x, y, z) будет соответствовать определенная система значений (q_1, q_2, q_3) , даваемая равенствами (68), и обратно. Числа q_1, q_2, q_3 называются вообще *криволинейными координатами* точки M .

Заметим, что уравнения (69) при каждом частном значении переменных (q_1, q_2, q_3) обращаются в уравнения координатных плоскостей системы K

$$x = c_1, \quad y = c_2, \quad z = c_3; \quad (70)$$

эти плоскости параллельны основным координатным плоскостям и пересекаются в точке (c_1, c_2, c_3) . В свою очередь уравнения (68) при каждом частном значении переменных (x, y, z) представляют собой уравнения некоторых *поверхностей*:

$$q_1 = \alpha, \quad q_2 = \beta, \quad q_3 = \gamma, \quad (71)$$

где α , β и γ суть некоторые постоянные, причем вид этих поверхностей зависит от вида функций f_1 , f_2 и f_3 . Действительно, подставляя в равенства (71) вместо q_1 , q_2 и q_3 их выражения через x , y и z , получим уравнения

$$f_1(x, y, z) = \alpha, \quad f_2(x, y, z) = \beta, \quad f_3(x, y, z) = \gamma, \quad (72)$$

которые являются относительно декартовой системы координат уравнениями поверхностей.

Таким образом, если декартовы координаты x , y , z какой-нибудь точки связаны с тремя параметрами q_1 , q_2 , q_3 уравнениями (68), то q_1 , q_2 , q_3 можно рассматривать как координаты той же точки в некоторой системе координат, у которой роль координатных плоскостей играют поверхности, определяемые уравнениями (71) или (72); поэтому эти поверхности называются *координатными поверхностями* данной системы координат (q_1 , q_2 , q_3).

Уравнения (70) представляют семейство координатных плоскостей. Каждые два уравнения из этих трех в совокупности определяют семейство *координатных линий* (*прямых*). Итак, в декартовой системе координат точка определяется пересечением или трех координатных плоскостей, или соответствующих координатных линий. Рассуждая аналогично, найдем, что в случае системы координат (q_1 , q_2 , q_3) точка определяется пересечением или трех координатных поверхностей, или соответствующих им координатных линий, определяемых попарным пересечением координатных поверхностей. Так как координатные линии вообще будут кривыми, то все системы координат, имеющие произвольные координатные поверхности, называются *криволинейными системами координат*.

В случае декартовой системы координат все пространство можно себе представить состоящим из множества бесконечно малых параллелепипедов, ребра которых параллельны осям координат. При преобразовании координат точек этого пространства к криволинейным координатам эти параллелепипеды, исказившись, обратятся в бесконечно малые ячейки с кривыми гранями и ребрами, образуемыми координатными поверхностями и линиями. Преобразование координат точек, конечно, не изменяет метрики пространства, и последнее остается прежним евклидовым пространством.

Среди всех возможных пространственных криволинейных систем координат всего чаще употребляются *сферические* и *цилиндрические* координаты.

В *сферической* (или *полярной*) системе координат положение точки M (рис. 72) определяется длиной полярного радиуса $OM = r$, проведенного из начала координат O , углом φ , который образует полярный радиус r с плоскостью P (плоскостью Oxy), называемой *полярной* или *экваториальной плоскостью* (или углом, образуемым r с осью Oz , называемой *полярной осью*), и двугранным углом λ ,

который образует плоскость, проходящая через полярную ось и точку M , с основной плоскостью Q (называемой иногда *плоскостью первого меридиана*). Так как этой системой часто пользуются в астрономии, то угол φ называют еще *широтой*, а λ — *долготой* (иногда вместо широты φ употребляют *полярный угол* $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$). Итак, сферические координаты точки M суть:

$$r = OM, \quad \lambda = \angle xOA, \quad \varphi = \angle AOM. \quad (73)$$

Непосредственно из рисунка видно, что связь между сферическими и декартовыми координатами при расположении осей x , y , z , указанном на рисунке, будет следующая:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= r \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Координатные поверхности в сферической системе координат представляются уравнениями

$$r = \alpha, \quad \lambda = \beta, \quad \varphi = \gamma, \quad (75)$$

где α , β и γ — некоторые переменные параметры. Эти уравнения соответственно представляют:

$r = \alpha$ — сферу, описанную радиусом α из центра O ,

$\lambda = \beta$ — плоскость, проходящую через точку M и полярную ось z ,

$\varphi = \gamma$ — круглый конус с осью z , вершиной O и углом при вершине, равным $(\frac{\pi}{2} - \varphi)$.

Координатные линии получаются пересечением координатных поверхностей, т. е. определяются следующими совокупностями двух уравнений из (75):

$$(a) \begin{cases} r = \alpha, \\ \lambda = \beta, \end{cases} \quad (б) \begin{cases} \lambda = \beta, \\ \varphi = \gamma, \end{cases} \quad (в) \begin{cases} \varphi = \gamma, \\ r = \alpha. \end{cases} \quad (76)$$

Они представляют собой:

- (а) — окружность AMD радиуса α (или меридиан),
- (б) — прямую OM , по которой направлен вектор r ,
- (в) — окружность $MBCM$ радиуса $\alpha \cos \varphi$ (или параллель).

В *цилиндрической или полуполярной* системе координат положение точки M (рис. 73) определяется расстоянием ее $O'M = r$ до

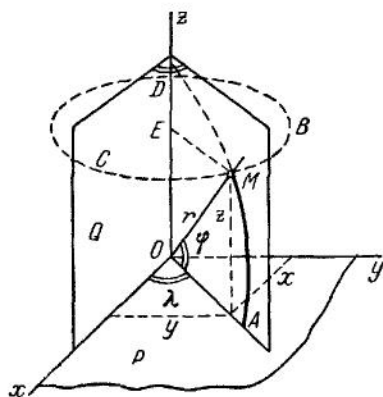


Рис. 72.

оси Oz , проходящей через начало O , расстоянием проекции точки M на ось Oz до начала O , т. е. величиной $OO' = z$, и двугранным углом $\varphi = \angle CO'M$, образуемым плоскостью, проходящей через точку M и ось Oz , с основной плоскостью Q . Иначе положение точки M в цилиндрической системе координат определяется расстоянием плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно к оси Oz , от начала O , т. е. величиной $OO' = z$, и плоскими полярными координатами точки в этой плоскости $O'M = r$ и $\angle CO'M = \varphi$.

Итак, цилиндрические координаты точки M суть:

$$r = OM' = O'M, \quad \varphi = \angle CO'M, \\ z = OO'.$$

Непосредственно из рисунка видно, что связь между цилиндрическими и декартовыми координатами при расположении осей x, y, z , указанном на рисунке, будет следующая:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (77)$$

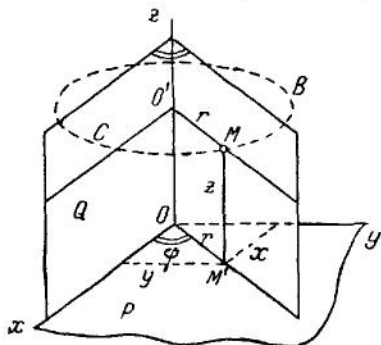


Рис. 73.

Координатные поверхности в цилиндрической системе координат даются уравнениями

$$r = \alpha, \quad \varphi = \beta, \quad z = \gamma, \quad (78)$$

где α, β и γ — некоторые переменные параметры. Эти уравнения соответственно представляют:

$r = \alpha$ — круглый цилиндр радиуса α , ось которого совпадает с осью z ,

$\varphi = \beta$ — плоскость, проходящую через ось z и точку M ,

$z = \gamma$ — плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно к оси z .

Координатные линии получатся пересечением координатных поверхностей, т. е. определяются следующими совокупностями уравнений из (78):

$$(a) \begin{cases} r = \alpha \\ \varphi = \beta \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \varphi = \beta \\ z = \gamma \end{cases} \quad (в) \begin{cases} z = \gamma \\ r = \alpha \end{cases} \quad (79)$$

Они представляют собой:

(a) — прямую $M'M$,

(б) — прямую $O'M$,

(в) — окружность $MBCM$.

Сферические и цилиндрические системы координат обладают тем свойством, что координатные линии у них пересекаются между собой

под прямыми углами. Такие системы называются *ортогональными*. Прямоугольные декартовы координаты также принадлежат к ортогональным системам.

Чтобы получить выражение скорости в криволинейных координатах, проще всего воспользоваться формулой

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (80)$$

и найти в криволинейных координатах выражение элемента дуги ds .

Пусть имеем прямоугольную декартову систему координат. Тогда

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (81)$$

Найдем квадрат дифференциала дуги в произвольной системе криволинейных координат (q_1, q_2, q_3) . Для этого вычислим дифференциалы x, y, z , рассматривая их как функции q_1, q_2, q_3 [равенства (69)]. Получим:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Подставляя эти значения dx, dy, dz в равенство (81), найдем ds^2 в виде квадратичной формы от дифференциалов координат q_1, q_2, q_3 (т. е. в виде однородного многочлена второй степени относительно этих дифференциалов):

$$ds^2 = a_{11} dq_1^2 + a_{22} dq_2^2 + a_{33} dq_3^2 + 2a_{23} dq_2 dq_3 + 2a_{31} dq_3 dq_1 + \\ + 2a_{12} dq_1 dq_2 = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dq_i dq_k, \quad (83)$$

где обозначено:

$$a_{ii} = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (84)$$

$$a_{ik} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_k} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (i \neq k). \quad (85)$$

Если система (q_1, q_2, q_3) ортогональная, то коэффициенты a_{ik} из равенств (85) обращаются в нули и выражение квадрата дифференциала дуги в этом случае будет:

$$ds^2 = a_{11} dq_1^2 + a_{22} dq_2^2 + a_{33} dq_3^2. \quad (86)$$

В самом деле, координатная линия q_1 определяется как пересечение поверхностей $q_2 = \text{const}$ и $q_3 = \text{const}$. Направляющие косинусы

касательной к этой линии будут пропорциональны dx , dy , dz или, как видно из равенств (82), где в этом случае $dq_2 = dq_3 = 0$, эти косинусы пропорциональны

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1}.$$

Аналогично направляющие косинусы касательных к координатным линиям q_2 и q_3 будут пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial y}{\partial q_2}, \frac{\partial z}{\partial q_2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial x}{\partial q_3}, \frac{\partial y}{\partial q_3}, \frac{\partial z}{\partial q_3}.$$

Отсюда видно, что в случае, когда система (q_1, q_2, q_3) ортогональна, величины (85) действительно равны нулю.

Подставляя в (80) выражение элемента дуги (83), имеем

$$v^2 = \frac{\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dq_i dq_k}{dt^2} = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_k}{dt} = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k,$$

откуда получаем следующее выражение модуля скорости в криволинейных координатах.

$$v = \sqrt{\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k}. \quad (87)$$

Если система (q_1, q_2, q_3) ортогональная, то равенство (87) примет вид

$$v = \sqrt{a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2}. \quad (88)$$

В частности, сферическая и цилиндрическая системы координат ортогональны и для них v определяется формулой (88).

Для сферических координат, считая $q_1 = r$, $q_2 = \lambda$, $q_3 = \varphi$, найдем из равенств (74), пользуясь формулами (84),

$$a_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = \cos^2 \varphi (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) + \sin^2 \varphi = 1,$$

и аналогично

$$a_{22} = r^2 \cos^2 \varphi, \quad a_{33} = r^2.$$

Следовательно, в сферических координатах, согласно (88),

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (89)$$

Для цилиндрических координат, полагая $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$, получим аналогичным образом из равенств (77), что $a_{11} = 1$, $a_{22} = r^2$,

$a_{33} = 1$. Следовательно, в *цилиндрических* координатах, согласно (88),

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}. \quad (90)$$

Формулы (89) и (90) легко получить и непосредственным расчетом, подобно тому как это делалось для плоской полярной системы координат (см. стр. 65). Элементарное перемещение ds складывается в сферических координатах геометрически из элементарных перемещений вдоль координатных линий OM , MB и MD (см. рис. 72); эти перемещения взаимно перпендикулярны и численно равны dr , $ME \cdot d\lambda = (r \cos \varphi) d\lambda$ и $r d\varphi$. Следовательно, $ds^2 = dr^2 + (r \cos \varphi)^2 d\lambda^2 + r^2 d\varphi^2$, откуда, деля обе части этого равенства на dt^2 , получим формулу (89).

Точно так же в цилиндрических координатах ds складывается из взаимно перпендикулярных элементарных перемещений вдоль координатных линий $O'M$, $M'B$ и $M'M$ (см. рис. 73), численно равных dr , $r d\varphi$ и dz ; следовательно, $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$, откуда, деля обе части этого равенства на dt^2 , приходим к формуле (90).

Выражение ускорения в криволинейных координатах будет выведено в динамике точки иным методом.

15. Теорема о сложении скоростей. Если мы знаем движение точки относительно системы отсчета K и движение системы K относительно основной (неподвижной) системы отсчета K_1 , то можно определить движение точки по отношению к системе K_1 . Движение точки по отношению к подвижной системе K называют в этом случае *относительным*, а по отношению к неподвижной системе K_1 — *сложным* или, условно, *абсолютным*; движение самой системы K по отношению к системе K_1 называют *переносным движением*.

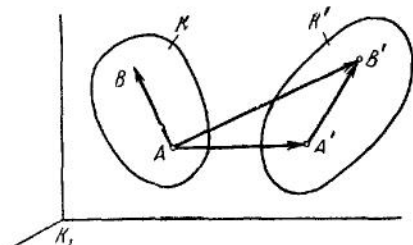


Рис. 74.

Пусть подвижная система занимает в момент времени t положение K , а движущаяся точка M находится в этот момент в положении A (рис. 74). За промежуток времени Δt точка M переместится по отношению к системе K в новое положение B , совершив относительное перемещение \overline{AB} . Величина ¹⁾

$$v_{\text{отн}} = v_r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{\Delta t} \quad (91)$$

называется *относительной скоростью* точки M .

¹⁾ Относительную, переносную и абсолютную скорости точки будем обозначать $v_{\text{отн}}$, $v_{\text{пер}}$, $v_{\text{абс}}$ или v_r , v_e , v_a (индексы „r“ и „e“ от французск. *relatif* — относительный и *entraîner* — увлекать с собой, переносить).

Одновременно система K за промежуток времени Δt переместится (по отношению к основной системе K_1) в другое положение K' и точка A системы K , где в момент t находилась точка M , придет в положение A' . Вектор $\overline{AA'}$ определяет переносное перемещение точки, а величина

$$v_{\text{пер}} = v_e = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} \quad (92)$$

называется *переносной скоростью* точки M . Следовательно, переносная скорость — это скорость той, принадлежащей подвижной системе отсчета точки A , с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M .

В результате точка M придет через промежуток времени Δt в положение B' и совершит по отношению к основной системе отсчета K_1 абсолютное перемещение $\overline{AB'}$. Величина

$$v_{\text{абс}} = v_a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AB'}}{\Delta t} \quad (93)$$

называется *абсолютной скоростью* точки M или *скоростью сложного движения*.

Зависимость между всеми этими скоростями дается теоремой: *скорость сложного движения точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей*. Для доказательства заметим, что из векторного треугольника $AA'B'$ следует равенство $\overline{AB'} = \overline{AA'} + \overline{A'B'}$. Деля обе его части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AB'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA'}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{A'B'}}{\Delta t}.$$

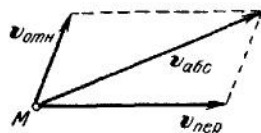


Рис 75.

Отсюда, замечая, что при $\Delta t \rightarrow 0$ положение K' подвижной системы неограниченно приближается к K и, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{A'B'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{\Delta t} = v_{\text{отн}} = v_r,$$

а также учитывая (92) и (93), находим:

$$v_{\text{абс}} = v_{\text{отн}} + v_{\text{пер}}. \quad (94)$$

Равенство (94) и выражает теорему о сложении скоростей или так называемый закон параллелограмма скоростей (рис. 75).

Последовательно применяя полученный результат к случаю, когда движущаяся точка перемещается по отношению к подвижной системе отсчета K_1 , которая в свою очередь движется относительно другой

подвижной системы K_2 и т. д. вплоть до некоторой системы K_{n-1} , движущейся относительно *основной* системы отсчета K_n , получим:

$$v_{abc} = \sum_{k=1}^n v_k, \quad (95)$$

где v_1 — относительная скорость точки по отношению к системе K_1 , v_2 — первая переносная скорость, получаемая при движении системы K_1 относительно K_2 , v_3 — вторая переносная скорость, получаемая при движении системы K_2 относительно K_3 , и т. д. Кратко этот результат формулируют так: *скорость сложного движения равна геометрической сумме скоростей составных движений.*

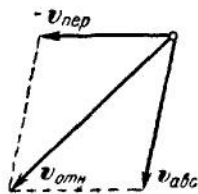


Рис. 76.

Доказанная теорема позволяет также, зная абсолютную скорость точки по отношению к основной системе отсчета K_1 и движение подвижной системы отсчета K по отношению к K_1 , определить относительную скорость точки в системе K по вытекающей из (94) формуле (рис. 76)

$$v_{отн} = v_{абс} - v_{пер} = v_{абс} + (-v_{пер}). \quad (96)$$

В качестве простейшего примера применения формулы (94) найдем выражение скорости точки в полярных координатах. Движение точки по отношению к основной системе отсчета Oxy (см. рис. 53) можно рассматривать как относительное вдоль радиуса OM со скоростью $v_{отн} = \dot{r} = v_r$. Переносным движением будет при этом вращение радиуса OM с угловой скоростью $\dot{\varphi}$ и переносная скорость будет равна скорости той точки радиуса, где в данный момент находится точка M ; следовательно, по формуле (11) $v_{пер} = r\dot{\varphi} = v_p$. В результате приходим к найденным ранее равенствам (20) и (21).

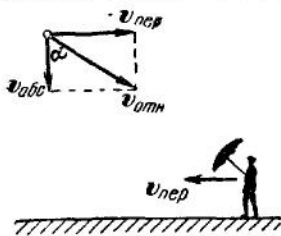


Рис. 77.

Примерами применения формулы (96) служат известные из элементарной физики задачи о наклонении зонта под дождем или астрономических труб для устранения влияния «абберации». Так, например, скорость дождевой капли, падающей на землю вертикально со скоростью $v_{абс}$, будет относительно человека, идущего со скоростью $v_{пер}$ (рис. 77), выражаться вектором $v_{отн}$, наклоненным к вертикали под углом

$$\alpha = \text{arctg} \frac{v_{пер}}{v_{абс}}.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

КИНЕМАТИКА СИСТЕМЫ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 7. Механическая система

1. Механическая система. Число степеней свободы системы и абсолютно твердого тела. Механической системой называется множество материальных точек, в котором движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы. Пусть n есть число точек системы. Так как положение каждой точки M_v ($v = 1, 2, \dots, n$) относительно выбранной системы отсчета определяется тремя ее координатами x_v, y_v, z_v , то положение системы (конфигурация) известно, если известны координаты всех точек системы, т. е.

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n. \quad (1)$$

Зависимость между движениями точек системы существует: 1) вследствие сил взаимодействия между ними (например, движения тел солнечной системы зависят друг от друга, так как между ними действуют силы тяготения), 2) вследствие наличия связей геометрических и кинематических.

Связями называют условия, которые налагают ограничения либо только на положения, либо также и на скорости точек системы. В первом случае связь называется геометрической, или конечной, во втором — кинематической, или дифференциальной. Аналитически связи выражаются уравнениями, которым в любой момент движения должны удовлетворять или только координаты точек системы (геометрическая связь), или координаты и их первые производные по времени (кинематическая связь). Поэтому *уравнения связей* имеют вид

$$f(x_1, y_1, \dots, z_n; t) = 0 \quad (\text{геометрическая связь}), \quad (2)$$

$$\varphi(x_1, y_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dots, \dot{z}_n; t) = 0 \quad (\text{кинематическая связь}). \quad (3)$$

Пусть на систему наложено k геометрических связей:

$$f_\chi(x_1, y_1, \dots, z_n; t) = 0 \quad (\chi = 1, 2, \dots, k). \quad (4)$$

Тогда из $3n$ координат независимых будет только $3n - k$ координат, ибо при задании каких-либо $3n - k$ координат остальные определяются из уравнений связей (4). Эти независимые координаты называют также *координатами системы*. Число координат системы в случае существования *только геометрических* связей называется также *числом степеней свободы* этой системы.

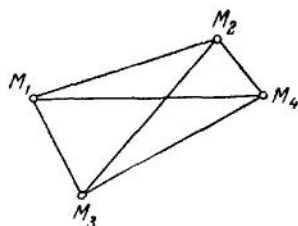


Рис. 78.

Абсолютно твердым телом или *неизменяемой системой* называется, как указывалось, такая механическая система, в которой расстояние между любыми двумя точками неизменно. Абсолютно твердое тело имеет *шесть степеней свободы*. В самом деле, возьмем три точки тела M_1, M_2, M_3 , не лежащие на одной прямой (рис. 78).

Девять координат этих точек связаны тремя соотношениями, выражающими неизменяемость длин трех отрезков M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 ; поэтому положение трех точек определится *шестью* независимыми параметрами. Если добавить какую-нибудь четвертую точку M_4 , то положение ее определяется еще тремя числами x_4, y_4, z_4 , которые, однако, связаны с координатами первых трех точек тремя условиями:

$$M_1M_4 = \text{const}, \quad M_2M_4 = \text{const}, \quad M_3M_4 = \text{const}.$$

Таким образом, число независимых координат остается равным шести.

Из этих рассуждений следует также, что положение абсолютно твердого тела в пространстве определяется положением любых трех его точек, не лежащих на одной прямой.

Дополняя сказанное о движении абсолютно твердого тела, заметим, что движение тела, как абсолютно твердого, возможно только в евклидовом пространстве (а также и в неевклидовом пространстве постоянной кривизны).

2. Аналитическое определение положения абсолютно твердого тела. Эйлераы углы. Покажем, каким образом можно задать шесть

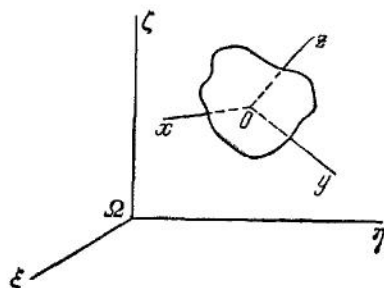


Рис. 79.

независимых параметров, однозначно определяющих положение абсолютно твердого тела. Пусть $\Omega\xi\eta\zeta$ есть неподвижная прямоугольная система координат (основная система отсчета) и пусть абсолютно твердое тело неизменно связано с некоторой другой, подвижной, прямоугольной системой $Oxuz$ (рис. 79). Координаты начала O под-

вижной системы относительно неподвижной пусть будут a, b, c , а косинусы углов между осями систем заданы таблицей

	ξ	η	ζ
x	(11)	(12)	(13)
y	(21)	(22)	(23)
z	(31)	(32)	(33)

Девять косинусов (i, k) связаны шестью условиями ортогональности, а именно, так как система $\Omega\xi\eta\zeta$ прямоугольна, то

$$\left. \begin{aligned} (11)^2 + (12)^2 + (13)^2 &= 1, \\ (21)^2 + (22)^2 + (23)^2 &= 1, \\ (31)^2 + (32)^2 + (33)^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

а так как и система $Oxyz$ прямоугольна, то

$$\left. \begin{aligned} (21) \cdot (31) + (22) \cdot (32) + (23) \cdot (33) &= 0, \\ (31) \cdot (11) + (32) \cdot (12) + (33) \cdot (13) &= 0, \\ (11) \cdot (21) + (12) \cdot (22) + (13) \cdot (23) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Следовательно, из девяти косинусов (i, k) независимы только три. Присоединяя сюда три числа a, b, c , мы и получаем шесть параметров, определяющих положение твердого тела.

Предположив, что начала координат в системах $\Omega\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ совпадают, мы можем определить положение твердого тела тремя эйлеровыми углами. Если OK есть прямая пересечения плоскостей $O\xi\eta$, Oxy , называемая *линией узлов*, то углы эти следующие (рис. 80): 1) угол φ между OK и Ox , 2) угол ψ между $O\xi$ и OK и 3) угол θ между $O\zeta$ и Oz . При этом все углы берутся между положительными направлениями осей. Положительное направление линии узлов выбирается согласно правилу правого винта, т. е. так, чтобы наблюдатель, смотрящий вдоль KO , видел поворот от $O\zeta$ к Oz совершающимся против хода часовой стрелки.

По аналогии с терминами, принятыми в астрономии, иногда называют: φ — *углом собственного вращения тела*, ψ — *углом прецессии*, θ — *углом нутации*.

Очевидно, что триэдр $O\xi\eta\zeta$ может быть приведен в совпадение с $Oxyz$ путем трех поворотов, совершаемых в такой последова-

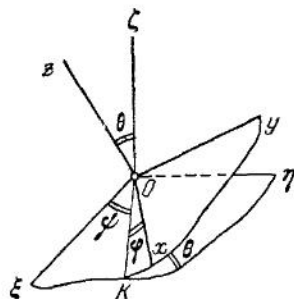


Рис. 80.

тельности: 1) на угол ψ вокруг оси $O\xi$, 2) на угол θ вокруг линии узлов OK , 3) на угол φ вокруг оси Oz . При этом все повороты производятся против хода стрелки часов, если соответствующая ось вращения направлена на наблюдателя.

В общем случае, когда начала обеих систем координат различны, можно определить положение твердого тела тремя числами a , b , c и эйлеровыми углами, определяющими положение подвижной системы $Oxuz$ относительно третьей, промежуточной, системы координат $O\xi_1\eta_1\xi_1$, начало которой совпадает с началом подвижной системы, а оси параллельны осям неподвижной.

§ 8. Основные движения твердого тела¹⁾

Впоследствии мы покажем, что всякое движение твердого тела может быть сведено к двум основным движениям: поступательному и вращательному, с рассмотрения которых мы и начнем.

1. Поступательное движение. *Поступательным движением* твердого тела называется такое его движение, при котором каждая из двух не параллельных между собой прямых, неизменно связанных с телом, перемещается параллельно самой себе, т. е. оставаясь параллельной своему начальному направлению. В этом случае параллельно самой себе перемещается любая прямая, связанная с телом. Пусть A_1 , B_1 и A_2 , B_2 суть положения двух точек тела для двух моментов времени t_1 и t_2 (рис. 81). По определению твердого тела $A_1B_1 = A_2B_2$; по определению поступательного движения $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Следовательно, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 равны и параллельны, т. е.

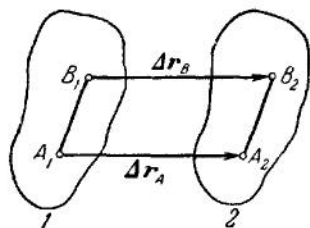


Рис. 81.

ступательного движения $A_1B_1 \parallel A_2B_2$. Следовательно, отрезки A_1A_2 и B_1B_2 равны и параллельны, т. е.

$$\overline{A_1A_2} = \overline{B_1B_2}. \quad (7)$$

Это равенство могло бы быть принято за определение поступательного движения, и тогда наше первоначальное определение получилось бы из нового как следствие.

Обозначив перемещения $\Delta r_A = \overline{A_1A_2}$, $\Delta r_B = \overline{B_1B_2}$, будем иметь:

$$\Delta r_A = \Delta r_B \quad \text{и} \quad \frac{\Delta r_A}{\Delta t} = \frac{\Delta r_B}{\Delta t},$$

¹⁾ В дальнейшем абсолютно твердое тело мы часто будем сокращенно называть «твердым» телом или просто телом, если это не может вызывать каких-либо недоразумений.

где $\Delta t = t_2 - t_1$ есть промежуток времени, в течение которого тело перемещается из положения 1 в положение 2. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим, согласно определению скорости:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}, \quad (8)$$

где \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B суть скорости точек A и B . Так как точки A , B были выбраны произвольно, то при поступательном движении твердого тела скорости всех точек тела в данный момент равны друг другу и выражаются одним и тем же вектором, который мы обозначили просто через \mathbf{v} .

Поэтому, в отличие от скорости материальной точки или точки произвольно движущегося тела, которая есть вектор, приложенный к этой точке в данном ее положении, скорость твердого тела, движущегося поступательно, есть вектор *свободный*, ибо он может быть приложен к любой точке тела. Только в случае поступательного движения и можно говорить о скорости тела как целого. Траектории всех точек тела в этом случае суть конгруэнтные кривые, т. е. такие кривые, которые при наложении совпадают всеми своими точками.

Равенство (8) имеет место в любой момент времени, т. е. представляет собой равенство функций: $\mathbf{v}_A(t) = \mathbf{v}_B(t) = \mathbf{v}(t)$. Поэтому, дифференцируя все части этого равенства по времени, получим:

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_B = \boldsymbol{\omega}. \quad (9)$$

Таким образом, и ускорение $\boldsymbol{\omega}$ точек поступательно движущегося тела есть вектор свободный. Итак, *при поступательном движении скорости и ускорения всех точек тела для каждого момента времени равны между собой.*

Из всего предыдущего вытекает, что поступательное движение твердого тела вполне определяется движением одной из его точек.

Поступательное движение неизменяемой системы можно определить иначе, именно как движение, при котором для любого момента времени все точки системы имеют равные скорости; из этого определения как следствие вытекают все остальные свойства поступательного движения. Если скорость поступательного движения постоянна, т. е. $\mathbf{v} = \text{const}$, то все точки системы движутся прямолинейно и равномерно; такое движение неизменяемой системы, на основании первого закона Ньютона, называется *инерциальным*. Если скорости всех точек неизменяемой системы равны между собой только для одного какого-либо момента, то из этого не следует, что система движется поступательно; в этом случае мы будем говорить, что неизменяемая система в данный момент имеет *мгновенную поступательную скорость*.

2. Вращательное движение. Угловая скорость и угловое ускорение. Если твердое тело движется так, что две его точки A и B остаются неподвижными, то движение тела называется *вращательным*, а прямая AB — осью вращения. При вращательном движении твердого тела траектории всех его точек суть окружности, плоскости которых перпендикулярны к оси вращения, а центры лежат на этой оси (рис. 82).

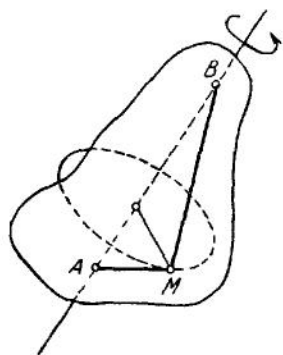


Рис. 82.

В самом деле, если M есть какая-нибудь точка тела, то в силу неизменяемости расстояний AM и BM точка M должна постоянно оставаться как на поверхности сферы, описанной из A радиусом AM , так и на поверхности сферы, описанной из B радиусом BM . Следовательно, она остается на линии пересечения обеих сфер, т. е. на окружности, плоскость которой перпендикулярна к AB , центр лежит на этой прямой, а радиус равен расстоянию точки от оси

вращения. Если M лежит на оси, то радиус окружности обращается в нуль, так что точки оси вращения остаются неподвижными.

Положение вращающегося тела может быть определено взятым с соответствующим знаком двугранным углом φ между двумя полуплоскостями, проходящими через ось вращения, одна из которых, Q , неподвижна относительно системы отсчета, а другая, P , неизменно связана с телом (рис. 83). Для определения знака φ совмещают с осью вращения координатную ось Az , и считают, что $\varphi > 0$, если с положительного конца оси z угол φ виден отложенным от неподвижной полуплоскости против хода стрелки часов (в правой системе отсчета).

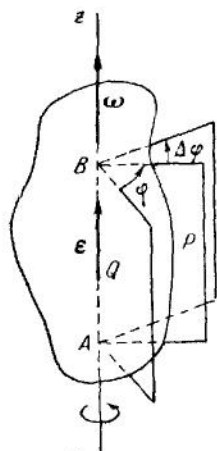


Рис. 83.

Положение тела в любой момент времени t определяется уравнением

$$\varphi = \varphi(t), \tag{10}$$

дающим закон *вращательного движения*.

Если за промежуток времени Δt угол φ получает приращение $\Delta\varphi$, то величина

$$\omega^* = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{11}$$

называется *средней угловой скоростью* тела за данный промежуток времени. Предел, к которому стремится эта величина при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \tag{12}$$

называется *угловой скоростью* тела в данный момент или просто угловой скоростью вращения твердого тела.

В общем случае ω с течением времени изменяется, т. е. $\omega = \omega(t)$. Если приращение ω за промежуток времени Δt равно $\Delta\omega$, то величина

$$\varepsilon^* = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (13)$$

называется *средним угловым ускорением* тела за данный промежуток времени. Предел, к которому стремится эта величина при $\Delta t \rightarrow 0$, т. е.

$$\varepsilon = \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}, \quad (14)$$

называется *угловым ускорением* тела в данный момент времени.

Размерности этих величин, когда угол φ измеряется в радианах, будут:

$$[\omega] = \frac{1}{\text{время}} = \frac{1}{T}, \quad [\varepsilon] = \frac{1}{T^2}, \quad (15)$$

а единицами измерения служат соответственно сек^{-1} и сек^{-2} .

Состояние движения вращающегося твердого тела в данный момент характеризуют вектором ω , направленным по оси вращения (см. рис. 83). Длина этого вектора изображает в некотором масштабе модуль угловой скорости, т. е. $|\omega|$, а направление выбирается так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора, видел вращение совершающимся против хода стрелки часов (по правилу правого винта).

Если бы правую систему координат мы заменили левой, то направление ω должно было бы быть заменено противоположным, так что ω есть вектор аксиальный. Кроме того, очевидно, что ω есть скользящий вектор, который можно считать приложенным в любой точке оси вращения.

Угловое ускорение вращающегося тела можно также изобразить в виде вектора $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, направленного вдоль оси вращения. При этом направление ε совпадает с направлением ω , когда тело вращается ускоренно (т. е. так, что модуль угловой скорости со временем возрастает), и противоположно ω , когда вращение является замедленным.

Величины ω и ε , определяемые равенствами (12) и (14), выражают численное или алгебраическое значение угловой скорости и углового ускорения и представляют собой, по существу, проекции векторов ω и ε на ось, направлением которой определяется знак угла φ .

Если во все время движения $\omega = \text{const}$, то вращение называется *равномерным*. Закон такого вращения, если обозначить через φ_0 начальный угол (в момент $t = 0$), будет:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (16)$$

Если во все время движения $\varepsilon = \text{const}$, то вращение называется *равнопеременным*. Закон этого вращения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}, \quad (17)$$

где ω_0 — начальная угловая скорость (в момент $t=0$). При этом угловая скорость вращения изменяется по закону:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \quad (18)$$

Формулы (16) и (17) получаются так же, как формулы (4) и (9) для прямолинейного движения точки (см. § 5).

3. Скорости и ускорения точек вращающегося тела. Так как любая точка M тела совершает круговое движение, то по формуле (13) § 6

$$v_M = O_0 M \cdot \omega. \quad (19)$$

Из равенства (19) следует, что по модулю вектор v равен $|\text{пот}_M \omega|$, ибо $O_0 M$ есть плечо вектора ω относительно точки M (рис. 84). Согласно определению момента, легко установить, что v совпадает с $\text{пот}_M \omega$ и по направлению. Следовательно,

$$v_M = \text{пот}_M \omega. \quad (20)$$

Если O есть произвольная точка оси, в которой приложен скользящий вектор ω , и $r = \overline{OM}$, то

$$\begin{aligned} v_M &= \text{пот}_M \omega = \overline{MO} \times \omega = \\ &= -\overline{OM} \times \omega = -r \times \omega = \omega \times r. \end{aligned}$$

Таким образом, для всякой точки вращающегося твердого тела скорость v определяется формулой Эйлера

$$v = \omega \times r. \quad (21)$$

Так как одновременно $v = \frac{dr}{dt}$, то отсюда следует, что если вектор r изменяется со временем *только по направлению* ($|r| = \text{const}$), то

$$\frac{dr}{dt} = \omega \times r, \quad (22)$$

где ω — угловая скорость поворота вектора. Формулой (22) часто удобно пользоваться при вычислении производной.

Возьмем произвольную точку O на оси вращения за начало системы координат $Oxyz$ и направим ось Oz вдоль оси вращения

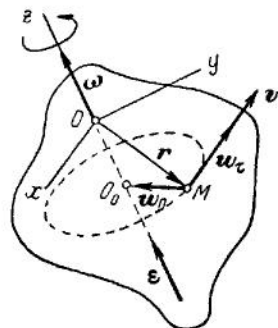


Рис. 84.

(см. рис. 84). Тогда $\omega_x = \omega_y = 0$, а $\omega_z = \omega$, где ω — алгебраическое значение угловой скорости, и мы получим:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} \quad (23)$$

или

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = 0. \quad (24)$$

Равенства (24) дают проекции скорости любой точки $M(x, y, z)$ вращающегося твердого тела на выбранные оси координат. Легко заметить при этом, что вид формул (24) не зависит от того, будут ли оси $Oxyz$ неподвижными или же будут связаны с вращающимся телом. Следовательно, проекции скоростей *ковариантны* по отношению к переходу от неподвижной к подвижной системе осей (т. е. определяются в этих осях формулами одинакового вида).

Ускорение любой точки M вращающегося тела также находится по формулам кругового движения (стр. 75). Следовательно,

$$\omega_\tau = O_0M \cdot \varepsilon, \quad \omega_n = O_0M \cdot \omega^2, \quad \omega = O_0M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (25)$$

Выражение для $\boldsymbol{\omega}$ можно еще получить из равенства (21)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}\right) + \left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right),$$

или

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \quad (26)$$

Из рис. 84 видно, что вектор $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$ коллинеарен $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}$, т. е. направлен вдоль касательной к траектории, а вектор $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$ направлен вдоль MO_0 , т. е. по главной нормали к траектории; следовательно,

$$\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} = \omega_\tau, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \omega_n. \quad (27)$$

Из (27) и (19) находим $|\omega_\tau| = |\boldsymbol{\varepsilon}| r \sin \angle O_0OM = |\boldsymbol{\varepsilon}| O_0M$, $\omega_n = \omega v = \omega^2 O_0M$, т. е. приходим к равенствам (25).

Если взять систему координатных осей $Oxyz$, в которой ось z направлена вдоль оси вращения, и представить ω_n в виде $\omega_n = -\omega^2 \overline{O_0M}$, то, согласно (26) и (27), будет:

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) - \omega^2 \overline{O_0M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x & y & z \end{vmatrix} - \omega^2 \overline{O_0M}. \quad (28)$$

Отсюда получаем формулы для вычисления проекции ускорения любой точки $M(x, y, z)$ вращающегося тела на выбранные оси координат:

$$\omega_x = -\varepsilon y - \omega^2 x, \quad \omega_y = \varepsilon x - \omega^2 y, \quad \omega_z = 0. \quad (29)$$

Эти формулы будут также ковариантны по отношению к переходу от неподвижной системы осей к подвижной.

4. Перманентная и мгновенная оси вращения. Если скорости точек тела, лежащих на оси AB , равны нулю *во все время движения*, то эта ось называется *перманентной* или *постоянной* осью вращения. Изложенные выше результаты относятся именно к этому случаю. Если же скорости точек тела, лежащих на некоторой оси, равны нулю *только в данный момент времени*, то эта ось называется *мгновенной осью вращения*. Значения скоростей всех точек тела в этом случае также определяются формулой (21), где векторная величина ω , направленная по мгновенной оси вращения, называется *мгновенной угловой скоростью* тела. В отличие от перманентной оси, мгновенная ось вращения, а с ней и вектор мгновенной угловой скорости ω непрерывно изменяют свое направление как в самом теле, так и по отношению к основной системе отсчета.

Вследствие этого вектор $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ не будет совпадать по направлению с вектором ω и картина распределения ускорений точек тела будет отлична от изображенной на рис. 84; этот рисунок относится только к случаю, когда ось Oz перманентна (см. § 10).

§ 9. Плоскопараллельное движение

1. Основные понятия. Плоскопараллельным (или плоским) движением абсолютно твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно какой-нибудь неподвижной (основной) плоскости. Из геометрических соображений ясно, что при плоскопараллельном движении всякая прямая, скрепленная с телом (рис. 85) и перпендикулярная к основной плоскости, будет двигаться *поступательно*, т. е. параллельно самой себе (само же тело будет двигаться вообще не поступательно). В самом деле, если отрезок прямой AB , перпендикулярный к основной плоскости, за некоторый промежуток времени Δt переместится в положение $A'B'$, то так как тело абсолютно твердое ($AB = A'B'$),

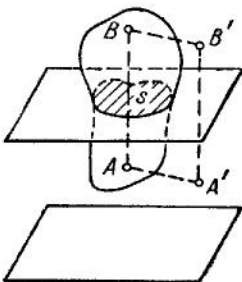


Рис. 85.

а перемещения AA' и BB' должны быть параллельны основной плоскости, заключаем, что фигура $ABB'A'$ — параллелограмм и $A'B' \parallel AB$.

Отсюда следует, что движение точек тела, лежащих на прямой, перпендикулярной к основной плоскости, определяется движением одной из этих точек, а движение всего тела — движением параллельного основной плоскости сечения S тела в плоскости этого сечения. Таким образом, рассмотрение плоскопараллельного движения тела

сводится к рассмотрению движения неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости. При этом неизменяемой фигурой мы называем такую, у которой расстояние между любыми ее точками всегда остается постоянным.

Строго говоря, рассматривая кинематически движение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости, мы рассматриваем движение всей плоскости, неизменно связанной с движущейся фигурой, относительно неподвижной плоскости, так что вопрос сводится к рассмотрению движения *подвижной* плоскости относительно *неподвижной*. Точно так же кинематическое рассмотрение движения абсолютно твердого тела сводится к рассмотрению движения *подвижного* пространства, неизменно связанного с движущимся телом, относительно *неподвижного*.

Положение неизменяемой плоской фигуры в ее плоскости вполне определяется положением двух ее точек, или, что то же, положением отрезка прямой, соединяющей эти две точки, например отрезка AB на рис. 86.

Основными видами движения плоской фигуры в ее плоскости являются *поступательное* и *вращательное*.

Поступательным движением плоской фигуры будет такое движение, при котором любая прямая, взятая в плоскости движущейся фигуры, перемещается параллельно самой себе. Из этого определения следует, так же как и в случае твердого тела (см. § 8), что все точки фигуры (подвижной плоскости) в этом случае имеют равные скорости и ускорения и описывают конгруэнтные траектории.

Вращательным движением фигуры в ее плоскости будет такое движение, при котором одна точка фигуры, называемая *центром вращения*, остается неподвижной. В этом движении все точки фигуры движутся по концентрическим окружностям, имеющим центр в центре вращения (см. рис. 66), причем скорости и ускорения точек пропорциональны их расстоянию до центра вращения, которое называется *радиусом вращения*, т. е.

$$v_M = OM \cdot \omega, \quad (1)$$

$$\omega_M = OM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}, \quad (2)$$

где ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение вращения. Ускорение точки фигуры при поступательном движении отклонено от радиуса вращения на угол φ , а для всех точек имеет одинаковую

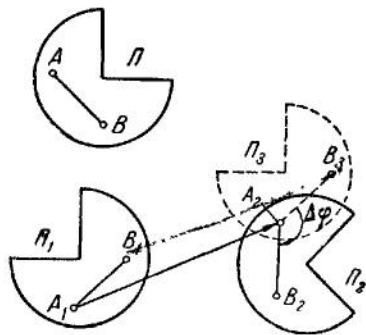


Рис. 86.

величину и зависит только от ω и ε , поскольку

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\omega \tau}{\omega_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (3)$$

2. Геометрическое рассмотрение движения плоской фигуры в ее плоскости. Теорема I. *Всякое перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть составлено из поступательного перемещения и поворота около произвольного центра (полюса).*

Пусть имеем два произвольных положения Π_1 и Π_2 плоской фигуры Π , характеризуемые положениями A_1B_1 и A_2B_2 отрезка AB , неизменно связанного с этой фигурой (рис. 86). Поступательным движением фигуры Π переместим ее из положения Π_1 в Π_3 так, чтобы точка A_1 заняла положение A_2 (это перемещение определяется вектором $\overline{A_1A_2}$). Тогда отрезок AB займет положение $A_2B_3 \parallel A_1B_1$. При повороте фигуры около центра A_2 на угол $B_3A_2B_2$ отрезок A_2B_3 займет положение A_2B_2 , а фигура Π — требуемое положение Π_2 .

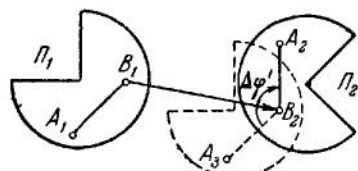


Рис. 87.

В ходе доказательства в качестве полюса, выбор которого произволен, была взята точка A . При этом поступательное перемещение

фигуры определялось вектором $\overline{A_1A_2}$, а вращательное — углом поворота $\Delta\varphi = \angle B_3A_2B_2$. Если в качестве полюса взять другую точку, например B (рис. 87), то из положения Π_1 в Π_2 фигура будет переведена поступательным перемещением, определяемым вектором $\overline{B_1B_2}$ и поворотом вокруг полюса B_2 на угол $\Delta\varphi' = \angle A_3B_2A_2$. Легко видеть, что $\overline{B_1B_2} \neq \overline{A_1A_2}$, т. е. что поступательная часть перемещения с изменением полюса меняется; угол же $\Delta\varphi' = \Delta\varphi$, так как эти углы образованы параллельными отрезками. Следовательно, *вращательная часть движения фигуры от выбора полюса не зависит*, т. е. при любом полюсе, чтобы привести фигуру из положения Π_1 в положение Π_2 , ее надо повернуть вокруг полюса на один и тот же угол $\Delta\varphi$, равный углу между направлениями отрезков A_1B_1 и A_2B_2 .

Поскольку поступательная часть перемещения фигуры с изменением полюса меняется, оказывается возможным выбрать полюс так, чтобы эта часть перемещения вообще отсутствовала.

Теорема II. *Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть выполнено одним поворо-*

том ее около определенного центра, называемого центром, или полюсом конечного вращения.

Пусть имеем два произвольных положения Π_1 и Π_2 плоской фигуры Π , характеризуемых положениями A_1B_1 и A_2B_2 отрезка AB , неизменно связанного с этой фигурой (рис. 88), причем, согласно условиям теоремы, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Если центр конечного вращения существует, то он должен находиться в такой точке O , которая была бы равно удалена от A_1 и A_2 , а также от B_1 и B_2 , так как должно быть $OA_1 = OA_2$ и $OB_1 = OB_2$. Следовательно, центр вращения должен находиться в точке O пересечения перпендикуляров, восстановленных из середины отрезков A_1A_2 и B_1B_2 . Докажем, что точка O действительно есть центр вращения.

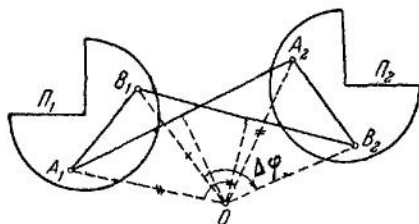


Рис. 88.

В самом деле, так как $A_1O = A_2O$, $B_1O = B_2O$ и $\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2$, то при повороте фигуры на $\angle A_1OA_2 = \Delta\varphi$ отрезок A_1B_1 совпадает с A_2B_2 и фигура из положения Π_1 перейдет в положение Π_2 .

Равенство углов A_1OA_2 и B_1OB_2 легко доказать следующим образом. Из равенства соответственных сторон ($A_1B_1 = A_2B_2$, $OA_1 = OA_2$ и $OB_1 = OB_2$) следует равенство треугольников A_1B_1O и A_2B_2O , откуда $\angle A_1OB_1 = \angle A_2OB_2$; прибавив к обеим частям последнего равенства по углу B_1OA_2 , получим:

$$\angle A_1OA_2 = \angle B_1OB_2 = \Delta\varphi.$$

При этом легко видеть, что угол $\Delta\varphi$ равен углу между направлениями отрезков A_1B_1 и A_2B_2 , т. е. остается таким же, как при повороте вокруг любого полюса по теореме I.

Доказанные теоремы касаются лишь вопроса о том, как можно *переместить* плоскую фигуру из какого-то одного фиксированного положения в другое. Однако, основываясь на них, можно представить и геометрическую картину *движения* плоской фигуры.

Всякое движение, в том числе и движение плоской фигуры в ее плоскости, непрерывно и может рассматриваться как непрерывная последовательность элементарных перемещений, которые по доказанным теоремам можно представить двумя способами.

1) Согласно теореме I элементарное перемещение можно получить путем бесконечно малого поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота на бесконечно малый угол вокруг этого полюса. Отсюда вытекает, что всякое *движение* плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как

совокупность поступательного движения, определяемого движением произвольно выбранного полюса, и вращательного движения вокруг этого полюса.

2) Согласно теореме II любое элементарное перемещение фигуры можно осуществить одним только поворотом на бесконечно малый угол вокруг некоторого *определенного* центра, называемого *мгновенным центром вращения*. Отсюда вытекает, что *всякое непоступательное движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как непрерывную последовательность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных центров вращения*. При этом положение мгновенного центра вращения непрерывно изменяется как в неподвижной плоскости, так и в плоскости, связанной с движущейся фигурой.

Из доказанных теорем следует также, что поворот вокруг любого полюса или вокруг мгновенного центра происходит с одной и той же для данного момента времени угловой скоростью $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$.

Величина ω , не зависящая от выбора полюса, называется *угловой скоростью* фигуры в данный момент времени или *мгновенной угловой скоростью*.

3. Мгновенный центр вращения. Мгновенный центр вращения получается как предельное положение центра конечного вращения O (см. рис. 88), когда положение Π_2 фигуры неограниченно приближается к Π_1 . Таким образом, этот центр представляет собой точку, элементарным поворотом вокруг которой фигура перемещается из данного положения в соседнее положение, бесконечно близкое к данному. Скорости всех точек A_1, A_2, \dots, A_n плоской фигуры будут в данный момент перпендикулярны к радиусам вращения, соединяющим мгновенный центр P с этими точками (рис. 89). Скорость точки плоской фигуры, совпадающей с центром P ,

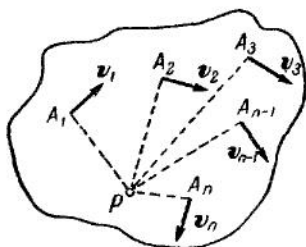


Рис. 89

будет в данный момент равна нулю; эту точку фигуры называют *мгновенным центром скоростей*. Зная положение мгновенного центра P , можно, очевидно, найти в данный момент направление скорости любой точки плоской фигуры. Так как перпендикуляры к направлениям скоростей всех точек плоской фигуры, восстановленные из этих точек, пересекаются в данный момент в центре P , то для определения положения мгновенного центра вращения надо знать направления скоростей каких-нибудь двух точек фигуры; составив из этих точек перпендикуляры к направлениям их скоростей, получим в точке пересечения этих перпендикуляров мгновенный центр вращения P .

4. Центроиды. Геометрическую картину движения плоской фигуры в ее плоскости можно еще представить с помощью так называемых *центроид*. Как указывалось, при движении плоской фигуры положение мгновенного центра вращения будет вообще непрерывно изменяться как на неподвижной плоскости, так и на плоскости, связанной с движущейся фигурой. Геометрическое место мгновенных центров вращения на *неподвижной* плоскости есть, следовательно, непрерывная кривая, которая называется *неподвижной* центроидой (или неподвижной полодией). Геометрическое место мгновенных центров вращения на *подвижной* плоскости, связанной с движущейся фигурой, есть также непрерывная кривая, называемая *подвижной* центроидой (или подвижной полодией).

Картину образования центроид можно представить себе следующим образом. Будем точки, принадлежащие неподвижной плоскости, обозначать значком (○), а подвижной — значком (⊗). Пусть в некоторый момент времени t_1

точка (⊗) является мгновенным центром вращения (рис. 90, а; эта точка обозначена знаком ⊗ как принадлежащая одновременно и неподвижной и подвижной плоскостям). В следующий момент времени t_2 (рис. 90, б), после поворота вокруг нового мгновенного центра, точки (○) и (⊗) разойдутся. Точка (○) сохранит при этом свое положение в неподвижной плоскости $\Omega\xi\eta$,

а точка (⊗) по отношению к плоскости $\Omega\xi\eta$ переместится, но сохранит свое положение относительно подвижной плоскости; положения нового мгновенного центра на неподвижной плоскости (○) и на подвижной (⊗) будут опять совпадать в точке (⊗) и т. д. Таким образом, мгновенные центры, соответствующие последовательным моментам времени (рис. 90, в), действительно расположатся по непрерывным кривым — центроидам. В каждый момент времени обе центроиды будут касаться друг друга в мгновенном центре вращения, соответствующем этому моменту.

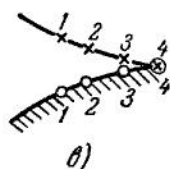
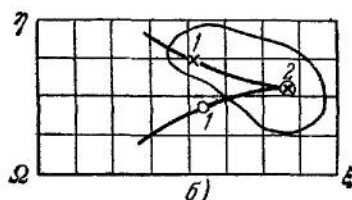
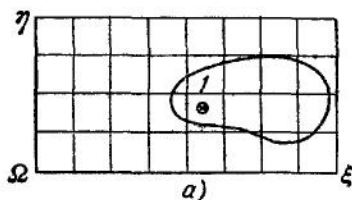


Рис. 90.

После элементарного поворота фигуры вокруг данного мгновенного центра подвижная центроида, повернувшись вместе с фигурой, соприкоснется с неподвижной в новой точке, которая будет мгновенным центром для следующего момента времени и т. д.

Следовательно, при движении фигуры подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения (точка касания, являющаяся для фигуры мгновенным центром скоростей, имеет скорость, равную нулю). Пользуясь этой картиной, данной Пуансо, можно всякое непоступательное движение плоской фигуры в ее плоскости осуществить геометрически качением без скольжения неизменно связанной с этой фигурой подвижной центроида по неподвижной (рис. 91).



Рис. 91.

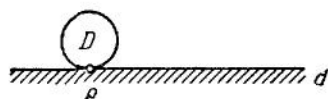


Рис. 92.

Траектория какой-либо точки M фигуры по отношению к неподвижной центроиде является *рулеттой* (рис. 93). Рулеттой вообще называется траектория какой-либо точки плоскости, неизменно связанной с плоской фигурой, катящейся без скольжения по неподвижной кривой, называемой *базой*. Например, при качении одной окружности по другой рулетками будут укороченные и растянутые эпи- или гипоциклоиды.

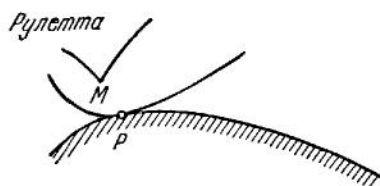


Рис. 93.

При решении некоторых кинематических задач можно пользоваться принципом *обратимости* движения, т. е. считать за основную, неподвижную, плоскость — подвижную, а за подвижную — ту, которая раньше считалась неподвижной. При таком обращении движения, очевидно, подвижная и неподвижная центроиды поменяются ролями. Это бывает удобно при решении задач на нахождение центроид.

Пример. Рассмотрим движение отрезка прямой, концы которого движутся по сторонам прямого угла, так называемое *карданово* движение (рис. 94). Ясно, что скорости концов отрезка AB будут направлены по сторонам прямого угла ACB .

Поэтому мгновенным центром вращения будет точка P пересечения перпендикуляров к этим сторонам, проведенных из точек A и B . При движении мгновенный центр P будет оставаться на постоянном расстоянии от точки C , так как для любого положения отрезка AB всегда $PC = AB = \text{const}$; следовательно, неподвижной центроидой будет окружность, описанная из C , как из центра, радиусом CP . Чтобы найти подвижную центроиду, воспользуемся принципом обратимости и, считая отрезок AB неподвижным, найдем неподвижную центроиду для движения прямого угла,

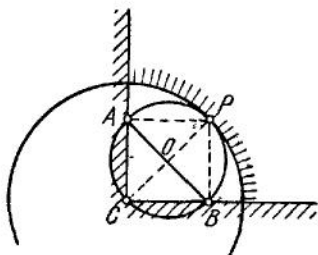


Рис. 94.

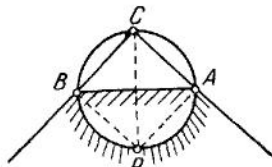


Рис. 95.

скользящего своими сторонами по концам отрезка AB (рис. 95). Мгновенный центр P , очевидно, опишет в этом движении окружность, имеющую диаметром отрезок AB , так как во все время движения $PA \perp PB$; эта окружность, служащая для обращенного движения неподвижной центроидой, для необращенного движения явится искомой подвижной центроидой (окружность с центром в C для обращенного движения будет, очевидно, подвижной центроидой).

Таким образом, карданово движение можно осуществить качением окружности, диаметр которой равен длине движущегося отрезка, по внутренней стороне окружности с диаметром, равным удвоенной длине отрезка.

5. Скорости точек плоской фигуры. Пусть плоская фигура движется по отношению к основной системе отсчета $\Omega\xi\eta$ (рис. 96), в которой положения полюса A и произвольной точки M определяются соответственно радиусами-векторами ρ_A и ρ_M . Тогда в любой момент времени между векторами ρ_A , ρ_M и $r = \overline{AM}$ имеет место соотношение $\rho_M = \rho_A + r$. Дифференцируя обе части этого равенства по времени, будем иметь:

$$\frac{d\rho_M}{dt} = \frac{d\rho_A}{dt} + \frac{dr}{dt}.$$

Но так как $AM = \text{const}$, то вектор r изменяется при движении фигуры только по направлению. Следовательно, для него справедлива формула (22) § 8, т. е. $\frac{dr}{dt} = \omega \times r$. Кроме того, $\frac{d\rho_M}{dt} = v_M$, а $\frac{d\rho_A}{dt} = v_A$, и мы получаем:

$$v_M = v_A + \omega \times r \quad \text{или} \quad v_M = v_A + v_{MA}. \quad (4)$$

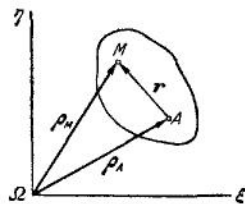


Рис. 96.

Таким образом, в соответствии с теоремой о сложении скоростей, скорость любой точки M плоской фигуры складывается из: 1) скорости v_A произвольно выбранного полюса A , общей для всех точек фигуры; это скорость поступательной части движения фигуры; и

2) скорости $v_{MA} = \omega \times r$, происходящей вследствие вращения фигуры вокруг полюса A (рис. 97). Вектор v_{MA} направлен перпендикулярно к MA в сторону вращения фигуры, а по модулю $v_{MA} = \omega \cdot AM$.

Полученный результат позволяет найти скорость любой точки фигуры, если известны скорость какой-нибудь одной ее точки A и угловая скорость фигуры ω . Другие способы определения скоростей точек плоской фигуры вытекают из рассматриваемых ниже теорем.

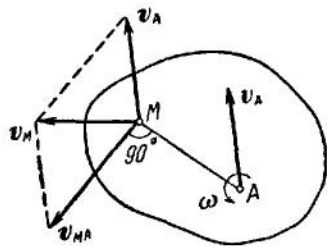


Рис. 97.

Теорема I. Если известны скорость какой-либо точки фигуры и направление скорости другой ее точки, то можно определить скорость любой точки плоскости этой фигуры с помощью мгновенного центра вращения.

Пусть даны скорость точки A и направление скорости точки B . По данным направлениям скоростей в точках A и B (рис. 98) строим мгновенный центр вращения P . Тогда из равенства

$$v_A = \omega \cdot PA$$

находим мгновенную угловую скорость ω вращения фигуры

$$\omega = \frac{v_A}{PA}. \quad (5)$$

Отсюда скорость v_M произвольной точки M фигуры в этот момент будет:

$$v_M = \omega \cdot PM = v_A \cdot \frac{PM}{PA}, \quad (6)$$

а направление v_M перпендикулярно к \overline{PM} .

Равенство (6) показывает, что в каждый данный момент времени скорости всех точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям от мгновенного центра вращения.

Если направления заданных скоростей v_A и v_B будут между собой параллельны, то доказанная теорема теряет силу. При этом может иметь место один из следующих случаев.

а) $v_A \parallel v_B$, но точки A и B не лежат на общем перпендикуляре к v_A (рис. 99). В этом случае, как видно из рисунка, мгновенный центр P лежит в бесконечности и равенство (5) дает $\omega = 0$.

Тогда из формулы (4) следует, что скорость любой точки фигуры $v_M = v_A$, т. е. имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей.

б) $v_A \parallel v_B$, а точки A и B лежат на общем перпендикуляре к AB (рис. 100). В этом случае перпендикуляры AP и BP к векторам v_A и v_B сливаются и для определения положения точки P надо дополнительно знать модули обеих скоростей. Тогда, согласно формуле (6), будет:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB},$$

и точка P найдется как пересечение прямой, соединяющей концы векторов, изображающих скорости v_A и v_B , с прямой AB .

Следовательно, в этом случае для нахождения скорости любой точки фигуры надо знать модули и направления скоростей обеих точек A и B .

Если, в частности, будет $v_A = v_B$, то опять имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей и для любой точки фигуры $v = v_A$.

В заключение отметим, что если плоское движение фигуры осуществляется путем качения ее без скольжения по некоторой неподвижной линии (как, например, на рис. 92), то контур фигуры и эта линия будут соответственно подвижной и неподвижной центроидами и, следовательно, точка их касания будет мгновенным центром вращения. Для определения скорости любой точки фигуры надо в этом случае знать только скорость какой-нибудь одной из ее точек.

Во всех случаях, когда мгновенный центр P найден, угловая скорость фигуры или скорость любой ее точки вычисляются по формулам (5) и (6).

Теорема II. *Проекция скоростей концов неизменяемого отрезка на его направление равны между собой.* Пусть v_A и v_B суть скорости концов отрезка AB (рис. 101). Восставив из точек A и B перпендикуляры к соответствующим скоростям, найдем мгновенный центр вращения P . Если мгновенная угловая скорость отрезка AB равна ω , то скорости точек A и B

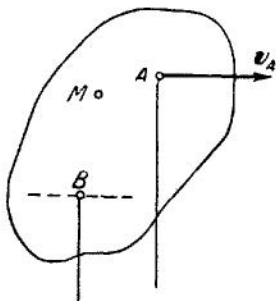


Рис. 99.

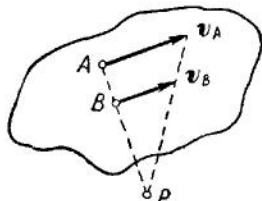


Рис. 100.

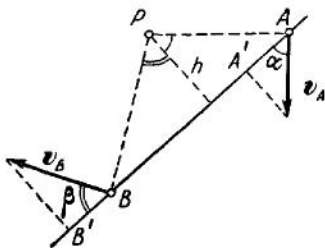


Рис. 101.

будут:

$$v_A = \omega \cdot PA, \quad v_B = \omega \cdot PB,$$

а их проекции на отрезок AB

$$AA' = (v_A)_{AB} = v_A \cos \alpha = \omega \cdot PA \cdot \cos \alpha = \omega h,$$

$$BB' = (v_B)_{AB} = v_B \cos \beta = \omega \cdot PB \cdot \cos \beta = \omega h,$$

где h есть длина перпендикуляра, опущенного из P на направление отрезка AB . Следовательно,

$$(v_A)_{AB} = (v_B)_{AB}, \quad (7)$$

что и требовалось доказать.

6. Примеры. 1. При свободном падении середина C стержня AB длиной $2l$ движется вертикально вниз с постоянным ускорением g , а сам стержень вращается вокруг центра C с постоянной угловой скоростью ω , двигаясь в вертикальной плоскости (рис. 102). В начальный момент стержень горизонтален. Найти скорости его концов A и B в любой момент времени t .

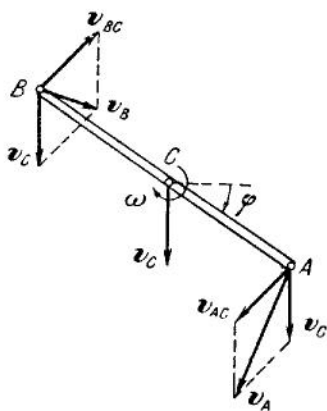


Рис. 102.

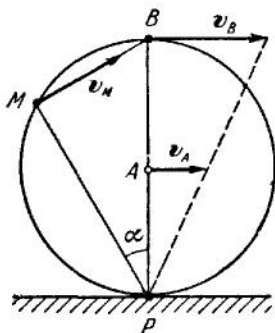


Рис. 103

По формуле (4) $v_A = v_C + v_{AC}$, где $v_C = gt$ (вектор v_C вертикален), а $v_{AC} = \omega l$, причем $v_{AC} \perp CA$. Угол между v_C и v_{AC} равен углу поворота стержня $\varphi = \omega t$. Следовательно,

$$v_A = \sqrt{g^2 t^2 + \omega^2 l^2 + 2gt\omega l \cos \omega t}.$$

Аналогично определяется скорость точки B .

↓ 2. Определить угловую скорость и скорости точек обода колеса радиуса R , катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, зная скорость v_A центра A колеса (рис. 103).

Будем положение любой точки M на обode определять углом $MPA = \alpha$. Так как колесо катится без скольжения, то точка касания P является в данный момент мгновенным центром вращения. Пользуясь результатами, выте-

какими из теоремы I, находим:

$$\omega = \frac{v_A}{PA}, \quad \frac{v_M}{PM} = \frac{v_A}{PA}.$$

Но $PM = PB \cdot \cos \alpha = 2 \cdot PA \cdot \cos \alpha$ и окончательно

$$\omega = \frac{v_a}{R}, \quad v_M = 2v_A \cos \alpha. \quad (a)$$

При этом $v_M \perp PM$, т. е. направление скорости любой точки обода в данный момент времени проходит через конец B вертикального диаметра. Наибольшую скорость $v_B = 2v_C$ имеет точка B .

Расчет по формуле (4) оказался бы в этом случае значительно сложнее, в чем предоставляем убедиться читателю (для определения ω при этом расчете надо использовать то условие, что $v_P = 0$); теоремой II мы здесь сразу воспользоваться не можем, так как не знаем направления v_M ; однако, установив, что $v_M \perp PM$, легко получить результат (a) и по теореме II.

3. Методы кинематики часто применяются к изучению движения механизмов, т. е. систем попарно соединенных между собой тел (звеньев), каждое из которых имеет определенное движение по отношению к другим. Когда все звенья движутся в параллельных плоскостях, механизм называется плоским. Рассмотрим два плоских механизма: а) четырехзвездник $ABCD$ (рис. 104), состоящий из шарнирно соединенных стержней, в котором звено AD

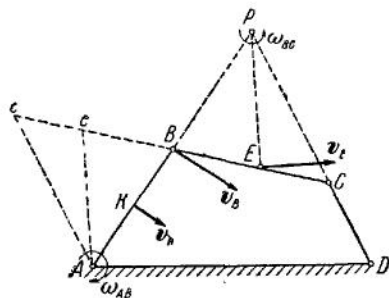


Рис. 104.

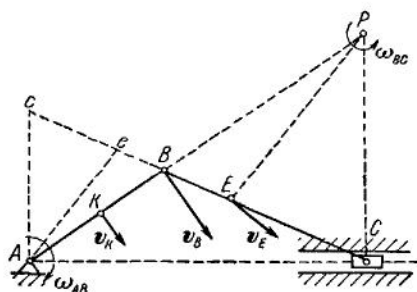


Рис. 105.

неподвижно, и б) кривошипно-шатунный механизм (рис. 105), состоящий из кривошипа AB , шатуна BC и ползуна C (шатун соединен с кривошипом и ползуном шарнирами). Механизмы имеют одну степень свободы. Покажем, что, зная скорость какой-нибудь точки K такого механизма, можно найти скорость любой другой его точки E .

Пусть нам известна скорость v_K какой-либо точки K звена AB . Тогда нам будет известна и угловая скорость ω_{AB} звена AB , так как $\omega_{AB} = v_K / AK$. С другой стороны, зная ω_{AB} , мы можем найти скорость v_B точки B , принадлежащей одновременно звену BC , а именно $v_B = \omega_{AB} \cdot AB$ и $v_B \perp AB$. Одновременно нам известно направление скорости v_C другой точки C

звена BC : в случае а) $v_C \perp CD$, так как точка C принадлежит одновременно звену CD , а в случае б) v_C параллельна направляющим, так как точка C принадлежит одновременно ползуну.

Восставляя в точках B и C перпендикуляры к v_B и v_C , найдем в месте их пересечения мгновенный центр вращения P звена BC . Тогда по формулам (5) и (6)

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{PB}; \quad v_E = PE \frac{v_B}{PB} = \frac{AB \cdot PE}{PB} \omega_{AB}$$

Если провести отрезок $Ae \parallel PE$, то из подобия треугольников ABe и PBE имеем:

$$\frac{PE}{PB} = \frac{Ae}{AB},$$

и скорость v_B выразится через ω_{AB} в виде

$$v_E = \omega_{AB} \cdot Ae.$$

Аналогично найдем, что $v_C = \omega_{AB} \cdot Ac$, где $Ac \parallel PC$, и т. д. Таким образом, скорости различных точек звена BC пропорциональны соответствующим отрезкам, проведенным из точки A параллельно мгновенным радиусам вращения этих точек.

Заметим, что все доказанные выше теоремы справедливы для данного твердого тела, а в случае механизма — для каждого данного звена механизма в отдельности. Поэтому если P является мгновенным центром вращения звена BC , то для любой точки этого звена $v_E = \omega_{BC} \cdot PE$, но, например, для точки K такое соотношение не имеет места ($v_K \neq \omega_{BC} \cdot PK$), так

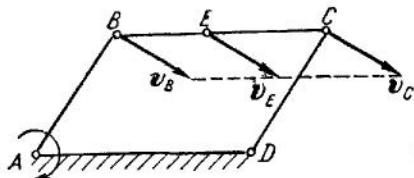


Рис. 106.

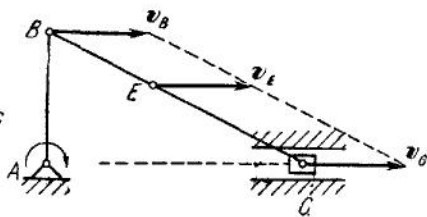


Рис. 107.

как точка K принадлежит другому звену (звену AB), имеющему центр вращения в точке A , и $v_K = \omega_{AB} \cdot AK$. Отметим интересный частный случай. Если в четырехзвеннике $ABCD$ будет $AB = DC$ и $AD = BC$, то он образует шарнирный параллелограмм (рис. 106). При этом в любой момент времени $v_B \parallel v_C$, а следовательно, $v_B = v_C$. Звено BC движется в этом случае поступательно.

Для кривошипно-шатунного механизма подобный случай имеет место в момент, когда $\angle CAB = 90^\circ$ (рис. 107), но, в отличие от шарнирного параллелограмма, скорости всех точек звена BC будут равны друг другу только в данный момент времени, т. е. здесь имеет место мгновенное поступательное распределение скоростей.

4. Рассмотрим еще пример механизма, состоящего из трех стержней длиной $OA = 2r$, $BC = l$, $DC = r$ и двух шестерен радиуса r (рис. 108). Шестерня 1, ось которой насажена на конец A стержня OA , обкатывается

по неподвижной шестерне 2. Стержень BC прикреплен в точках B и C к шестерне 1 и стержню DC шарнирами. Оси вращения O и D стержней OA и DC , лежащие на одной горизонтали, неподвижны. Найдем угловые скорости ω_1 шестерни 1 и ω_{BC} стержня BC в момент, когда стержни OA и BC горизонтальны, а стержень DC вертикален, считая угловую скорость ω_{OA} стержня OA в этот момент известной.

Для определения угловой скорости тела надо знать скорость какой-нибудь его точки и расстояние этой точки от центра вращения. По данным задачи $v_A = \omega_{OA} \cdot 2r$. Мгновенный центр вращения шестерни 1, катящейся без скольжения по шестерне 2, находится в точке их касания P_1 . Следовательно, $v_B \perp P_1B$. С другой стороны, скорость $v_A \perp AP_1$, а $v_C \perp DC$. Отсюда по теореме II находим, что $v_B \cos 45^\circ = v_A$ и $v_B \cos 45^\circ = v_C$. Таким образом, $v_C = v_A = \omega_{OA} \cdot 2r$.

Зная направления v_B и v_C , строим мгновенный центр вращения P_2 стержня BC . При этом, как видно из рисунка, $P_2C = l$. Окончательно находим:

$$\omega_{BC} = \frac{v_C}{P_2C} = \frac{2r}{l} \omega_{OA}, \quad \omega_1 = \frac{v_A}{P_1A} = 2\omega_{OA}.$$

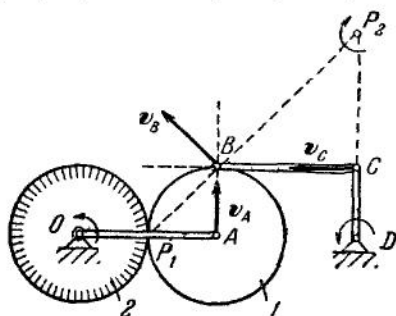


Рис. 108.

Заметим, что было бы ошибочно искать какой-то центр вращения, восставляя перпендикуляры к скоростям v_A и v_C , так как точки A и C принадлежат разным телам.

В этом примере, как и в предыдущих, механизм имел одну степень свободы, т. е. движение механизма определялось движением одного вращательно (или поступательно) перемещающего звена. Если в рассмотренном механизме шестерня 2 будет вращаться вокруг оси O (независимо от стержня OA), то механизм будет иметь две степени свободы. Движение такого механизма определяется заданием вращательного (или поступательного) движения двух звеньев. Пусть в данный момент будут известны угловые скорости ω_2 шестерни 2 и ω_{OA} стержня OA , вращающихся независимо друг от друга в одну и ту же сторону (рис. 109; стержни BC и CD на нем не показаны). Найдем в этот момент угловую скорость ω_1 шестерни 1.

По условиям задачи для шестерни 1 легко определяются модули и направления скоростей двух ее точек: $v_K = \omega_2 r$ (K — точка касания шестерен) и $v_A = \omega_{OA} \cdot 2r$; обе скорости параллельны. Тогда мгновенный центр вращения P_1 шестерни 1 находится построением, аналогичным показанному на рис. 100 (в этом случае мгновенный центр уже не будет в точке K , так как шестерня 2 вращается). По формуле (5) имеем:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{P_1A} = \frac{v_K}{P_1K} = \frac{v_A - v_K}{P_1A - P_1K}.$$

Следовательно, $\omega_1 = 2\omega_{OA} - \omega_2$.

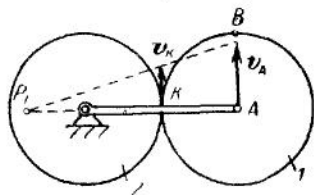


Рис 109

7. **Графическое построение скоростей.** Изложенные в п. 5 теоремы дают возможность простого графического построения скоростей любых точек плоской фигуры (или связанной с ней подвижной плоскости) по скоростям двух точек. Начнем с построения скоростей точек отрезка.

а) Пусть скорости точек A и B направлены перпендикулярно отрезку AB (рис. 110). Тогда, как мы знаем, для определения скорости любой точки

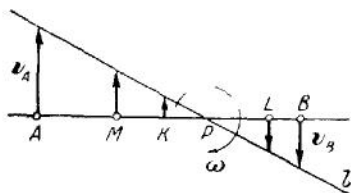


Рис. 110.

(рис. 111). Разложим v_A на составляющие v_{A1} , перпендикулярную к AB , и v_{A2} , направленную вдоль AB . По теореме II должно быть $v_{B2} = v_{A2}$. Поэтому, отложив от точки B вектор $v_{B2} = v_{A2}$ и восставив из его конца перпендикуляр к AB до пересечения с линией Bb , найдем вектор v_B , а затем и его составляющую v_{B1} . Скорость любой точки M на прямой AB можно построить как геометрическую сумму составляющей v_{M2} , направленной вдоль AB и одинаковой для всех точек прямой ($v_{M2} = v_{A2}$), и составляющей v_{M1} , перпендикулярной к AB . При этом концы векторов v_M

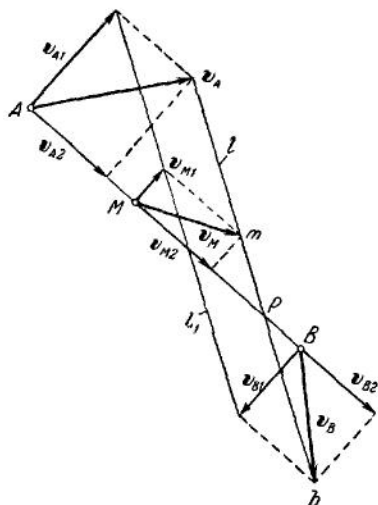


Рис. 111.

фигуры надо знать величины v_A и v_B . При этом мгновенный центр вращения P строится так, как показано на рис. 100. Скорости всех точек отрезка AB будут также к нему перпендикулярны, а концы их лежат на прямой l , поскольку для произвольной точки M скорость $v_M = \omega \cdot PM$.

б) Если скорость v_A не перпендикулярна к отрезку AB , то для определения скорости любой точки надо знать вектор v_A и направление Bb скорости v_B . Скорость любой точки M на прямой AB можно построить как геометрическую сумму составляющей v_{M2} , направленной вдоль AB и одинаковой для всех точек прямой ($v_{M2} = v_{A2}$), и составляющей v_{M1} , перпендикулярной к AB . При этом концы векторов v_M

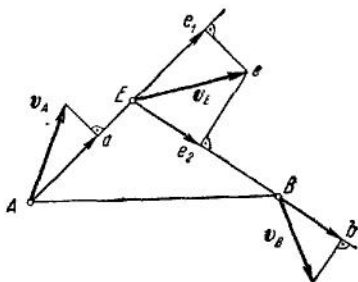


Рис. 112.

всех точек отрезка лежат, очевидно, на линии l_1 , соединяющей концы v_{A1} и v_{B1} . Так как скорость любой точки M получается от сложения v_{M1} с одним и тем же для всех точек вектором v_{M2} , то концы всех векторов v_M расположатся на прямой l , получающейся из l_1 параллельным смещением. Окончательно построение будет следующим. Зная v_A и построив v_B , проводим через их концы прямую l . Для нахождения v_M

откладываем от точки M вектор $v_{M2} = v_{A2}$ и из его конца восстанавливаем перпендикуляр к AB до пересечения с линией l в точке m . Тогда $\overline{Mm} = v_M$.

Скорость любой точки E фигуры, не лежащей на отрезке AB , определяется в обоих случаях следующим построением. Зная v_A и найдя (или зная) v_B , соединяем точку E с точками A и B (рис. 112). Откладываем от точки E вектор $\overline{Ee_1} = \overline{Aa}$ и вектор $\overline{Ee_2} = \overline{Bb}$, где \overline{Aa} и \overline{Bb} — соответственно ортогональные составляющие v_A по направлению AE и v_B по направлению BE . Восставив из e_1 перпендикуляр к AE , а из e_2 перпендикуляр к BE , найдем точку их пересечения e . Тогда $\overline{Ee} = v_E$. Справедливость этого построения следует из теоремы II.

8. План скоростей. Для графического определения скоростей точек плоской фигуры удобно пользоваться планом скоростей. Пусть даны скорость v_A точки A и направление Bb скорости точки B (рис. 113). Отложим от произвольной точки O в выбранном масштабе вектор $\overline{Oa} = v_A$ (рис. 114)

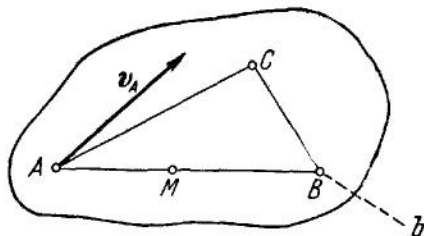


Рис. 113.

и проведем луч Ob , параллельный Bb . По формуле (4) должно быть $v_B = v_A + v_{BA}$, где $v_{BA} \perp AB$. Следовательно, если из точки a провести прямую ab , направленную перпендикулярно к AB , до ее пересечения с линией Ob ,

то вектор \overline{Ob} даст в том же масштабе скорость v_B , а вектор \overline{ab} будет равен v_{BA} . Для нахождения скорости любой точки C фигуры, не лежащей на AB , надо, очевидно, провести из точки a прямую ac , направленную перпендикулярно к AC , а из точки b — прямую bc , направленную перпендикулярно BC , до их взаимного пересечения в точке c . Тогда на основании той же формулы (4) заключаем, что $v_C = \overline{Oc}$; при этом $\overline{ac} = v_{CA}$, $\overline{bc} = v_{CB}$. Построенная на рис. 114 фигура и называется планом скоростей.

Как известно, $ab = v_{BA} = \omega \cdot AB$, $ac = v_{CA} = \omega \cdot AC$, $bc = v_{CB} = \omega \cdot BC$; следовательно,

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC} = \dots = \omega. \quad (8)$$

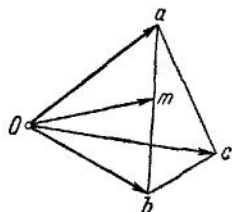


Рис. 114.

Таким образом, отрезки, соединяющие концы векторов скоростей на плане скоростей, по направлению перпендикулярны отрезкам, соединяющим соответствующие точки фигуры, а по модулю пропорциональны этим отрезкам.

Отсюда следует, что скорость любой точки M , лежащей на отрезке AB , найдется, если разделить отрезок ab в таком же отношении, в каком точка M делит отрезок AB ($\frac{am}{mb} = \frac{AM}{MB}$); тогда $\overline{Om} = v_M$. Угловая скорость фигуры, если известен план скоростей, определяется из равенства (8) с учетом масштабных коэффициентов.

План скоростей механизма строится как совокупность планов скоростей всех его звеньев, причем все векторы скоростей откладываются от одного общего центра.

Пример. Построим план скоростей механизма, изображенного на рис. 115, считая скорость v_A известной; шарнир C находится в середине AB .

Начинаем построение со звена AB (шатун), для которого известны скорость v_A и направление скорости v_B . Откладываем от произвольного центра O в выбранном масштабе вектор $\overline{Oa} = v_A$. Проведем линию Ob , параллельную

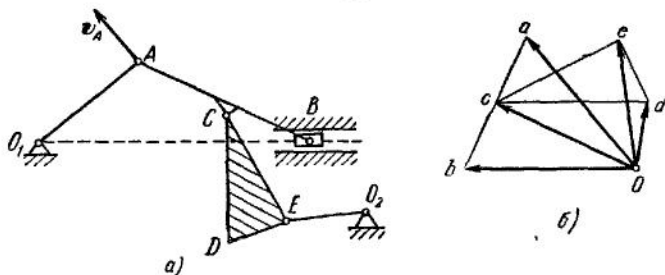


Рис. 115.

направляющим (т. е. v_B), и линию ab , перпендикулярную к AB , находим $v_B = \overline{Ob}$. Деля затем отрезок ab пополам (так как $AC = CB$), получаем вектор $v_C = \overline{Oc}$.

Теперь, зная v_C и направление скорости точки E ($v_E \perp O_2E$), строим план скоростей звена CDE . Проводя линию $Oe \perp O_2E$ и линию $ce \perp CE$, находим вектор $\overline{Oe} = v_E$; после этого проводим $cd \perp CD$ и $ed \perp ED$ и находим вектор $\overline{Od} = v_D$. Угловые скорости звеньев AB и CDE определяются из равенств

$$\omega_{AB} = \frac{ab}{AB}, \quad \omega_{CDE} = \frac{DE}{de}.$$

9. Ускорения точек плоской фигуры. Скорость любой точки M плоской фигуры, согласно формуле (4), будет:

$$v_M = v_A + (\omega \times r), \quad (9)$$

где $r = \overline{AM}$ — радиус-вектор, проведенный из полюса A в точку M (см. рис. 96). Дифференцируя обе части этого равенства по времени, получим:

$$\frac{dv_M}{dt} = \frac{dv_A}{dt} + \left(\frac{d\omega}{dt} \times r \right) + \left(\omega \times \frac{dr}{dt} \right). \quad (10)$$

Величина $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ есть вектор углового ускорения фигуры, направленный (как и ω) перпендикулярно к плоскости фигуры. Кроме того, согласно формуле (22) § 8, $\frac{dr}{dt} = \omega \times r$. Тогда, учитывая, что $\omega \perp r$ и $\omega \cdot r = 0$, будем иметь:

$$\omega \times \frac{dr}{dt} = \omega \times (\omega \times r) = \omega (\omega \cdot r) - r (\omega \cdot \omega) = -\omega^2 r.$$

В результате равенство (10) даст:

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_A + (\varepsilon \times r) - \omega^2 r. \quad (11)$$

Введем обозначения

$$\varepsilon \times r = \boldsymbol{w}_{MA}^{\text{вп}}, \quad -\omega^2 r = \boldsymbol{w}_{MA}^{\text{нс}}. \quad (12)$$

Векторы $\boldsymbol{w}_{MA}^{\text{вп}}$ и $\boldsymbol{w}_{MA}^{\text{нс}}$ представляют соответственно те вращательное (касательное) и центростремительное (нормальное) ускорения, которые имела бы точка M , если фигура совершала бы только вращение вокруг полюса A . Окончательно находим:

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{MA}^{\text{вп}} + \boldsymbol{w}_{MA}^{\text{нс}} \quad (13)$$

или

$$\boldsymbol{w}_M = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{w}_{MA}, \quad (14)$$

где $\boldsymbol{w}_{MA} = \boldsymbol{w}_{MA}^{\text{вп}} + \boldsymbol{w}_{MA}^{\text{нс}}$. Таким образом, ускорение любой точки плоской фигуры складывается геометрически из ускорения полюса и ускорения, которое точка получает при вращении фигуры вокруг полюса. Так как $\varepsilon \perp r$ и $r = AM$, то численно [ср. с формулой (25) § 8]

$$\begin{aligned} w_{MA}^{\text{вп}} &= AM \cdot \varepsilon, & w_{MA}^{\text{нс}} &= AM \cdot \omega^2, \\ w_{MA} &= AM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \quad (15)$$

Угол μ , который вектор \boldsymbol{w}_{MA} образует с радиусом MA , определяется из равенства

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{w_{MA}^{\text{вп}}}{w_{MA}^{\text{нс}}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \quad (16)$$

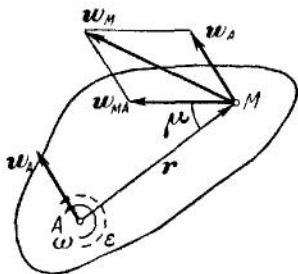


Рис. 116.

Полученные результаты позволяют построить вектор \boldsymbol{w}_M так, как это показано на рис. 116.

10. Примеры. При решении задач обычно бывает проще пользоваться равенством (13). При этом следует иметь в виду, что вектор $\boldsymbol{w}_{MA}^{\text{вп}}$ направлен перпендикулярно к \overline{AM} в сторону вращения фигуры, когда оно ускоренное, и против вращения — когда замедленное (рис. 117); вектор $\boldsymbol{w}_{MA}^{\text{нс}}$ всегда направлен вдоль MA к полюсу A .

1. Центр C колеса радиуса R , катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу, имеет в данный момент времени скорость v_C и ускорение w_C .

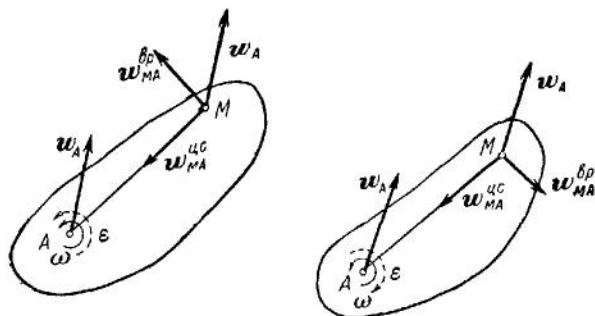


Рис. 117.

Найдем ускорения точек обода колеса. Будем положение точки M на обода определять углом φ (рис. 118). Для вычисления w_M по формуле (13) найдем сначала ω и ε фигуры. Так как точка касания P является мгновенным центром вращения, то

$$\omega = \frac{v_C}{PC} = \frac{v_C}{R}. \quad (a)$$

Поскольку здесь в любой момент времени $PC = R = \text{const}$, то, дифференцируя обе части равенства, получим:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_C}{dt} = \frac{w_{C\tau}}{R} = \frac{w_C}{R}. \quad (b)$$

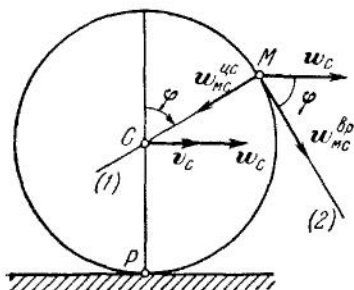


Рис. 118.

В данном случае $w_{C\tau} = w_C$, так как точка C движется прямолинейно. Направления ω и ε определяются по направлениям v_C и w_C . Зная ω и ε и учитывая, что $CM = R$, находим по формулам (15)

$$w_{MC}^{dp} = \varepsilon R = w_C, \quad w_{MC}^{nc} = \omega^2 R = \frac{v_C^2}{R}. \quad (в)$$

Теперь изображаем в точке M векторы w_C , w_{MC}^{dp} и w_{MC}^{nc} , из которых, согласно (13), складывается ускорение w_M , и вычисляем проекции w_M на оси: (1), направленную вдоль MC , и (2), перпендикулярную к MC . Получаем:

$$w_{M1} = \frac{v_C^2}{R} - w_C \sin \varphi, \quad w_{M2} = w_C (1 + \cos \varphi). \quad (г)$$

Интересно отметить, что для мгновенного центра вращения P ($\varphi = 180^\circ$) будет $w_{P2} = 0$, $w_{P1} = \frac{v_C^2}{R}$. Следовательно, ускорение мгновенного центра w_P

направлено по общей нормали PC к колесу и рельсу, т. е. к центроидам, и не зависит от ускорения полюса C (см. п. 13).

Примененным при решении задачи способом определения ϵ можно пользоваться лишь тогда, когда расстояние от мгновенного центра вращения до полюса (в нашем случае PC) постоянно.

2. Показать, что ускорение любой точки плоской фигуры можно определить, зная скорость и ускорение какой-нибудь одной точки фигуры и траекторию другой ее точки.

Пусть даны векторы v_A и w_A скорости и ускорения точки A и траектория точки B (рис. 119). Следовательно, известны v_A , w_A , углы α , β и φ , радиус кривизны ρ_B траектории точки B (так как дана траектория) и расстояние AB .

Скорость v_B направлена по касательной $B\tau$ к заданной траектории. Восстанавливая перпендикуляры к v_A и v_B в точках A и B , находим мгновенный центр P вращения фигуры и определяем ее угловую скорость

$$\omega = \frac{v_A}{PA}. \quad (a)$$

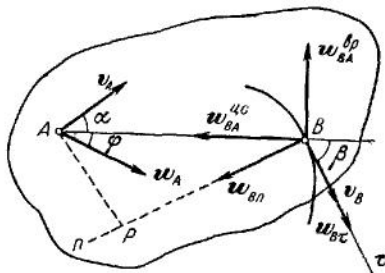


Рис. 119.

Расстояние PA найдется из $\triangle ABP$ по теореме синусов. Заметим, что здесь не удастся найти ϵ дифференцированием выражения (а), так как расстояние PA со временем изменяется и закон этого изменения неизвестен. Поэтому воспользуемся другим методом решения.

Согласно равенству (13), имеем $w_B = w_A + w_{BA}^{BP} + w_{BA}^{BC}$. С другой стороны, должно быть $w_B = w_{B\tau} + w_{Bn}$. Следовательно,

$$w_{B\tau} + w_{Bn} = w_A + w_{BA}^{BP} + w_{BA}^{BC}. \quad (б)$$

В этом равенстве нам известны величины

$$w_A, \quad w_{BA}^{BC} = BA \cdot \omega^2 \quad \text{и} \quad w_{Bn} = \frac{v_B^2}{\rho_B},$$

так как значение v_B можно определить или из равенств $v_B = \omega \cdot PB$, или по теореме II, которая дает $v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha$.

Следовательно, проектируя обе части равенства (б) на направление BP , перпендикулярное неизвестному вектору $w_{B\tau}$, мы получим уравнение

$$w_{Bn} = -w_A \sin(\beta - \varphi) - w_{BA}^{BP} \cos \beta + w_{BA}^{BC} \sin \beta,$$

из которого найдется w_{BA}^{BP} ; если величина w_{BA}^{BP} получится отрицательной, то это будет означать, что вектор w_{BA}^{BP} имеет направление, противоположное показанному на рисунке. Зная w_{BA}^{BP} , находим

$$\epsilon = \frac{w_{BA}^{BP}}{AB}. \quad (в)$$

Теперь величины ω и ε определены и, зная w_A , можно вычислить ускорение любой точки фигуры. Если спроектировать обе части равенства (6) на ось BA , перпендикулярную w_{BA}^{pp} , то мы найдем величину $w_{B\tau}$ и по составляющим $w_{B\tau}$ и w_{Bn} сразу определим ускорение точки B .

Из полученного результата следует, например, что для нахождения ускорения любой точки звена BC механизмов, изображенных на рис. 104 и 105, надо знать скорость и ускорение точки B , так как траектория точки C известна.

11. Мгновенный центр ускорений. При непоступательном движении плоской фигуры в ее плоскости на фигуре (или на связанной с ней подвижной плоскости) в каждый момент времени имеется точка, ускорение которой в этот момент равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений. Для доказательства сделаем следующее построение. Пусть нам известны ускорение w_A точки A , а также угловая скорость ω и угловое ускорение ε фигуры (рис. 120).

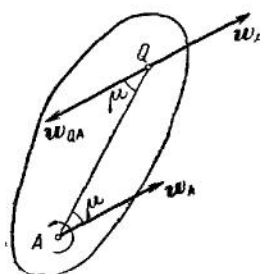


Рис. 120.

Вычислим величину μ из равенства $\operatorname{tg} \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$;

проведем под углом μ к вектору w_A полупрямую, которая должна быть отклонена от w_A в сторону вращения фигуры, если это вращение ускоренное, и против вращения, если оно замедленное. Отложим вдоль этой прямой отрезок AQ , равный

$$AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (17)$$

Точка Q и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, по формулам (14) и (15) $w_Q = w_A + w_{QA}$, где $w_{QA} = AQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A$. Кроме того, вектор w_{QA} должен составлять с прямой QA угол μ ; следовательно, этот вектор параллелен w_A и направлен в противоположную сторону, т. е. $w_{QA} = -w_A$. Поэтому $w_Q = w_A + w_{QA} = 0$.

Приведенное доказательство дает одновременно правило построения мгновенного центра ускорений.

Если точку Q принять в данный момент за полюс, то, так как $w_Q = 0$, будем, согласно формулам (14) и (15), иметь:

$$w_M = w_{MQ} \quad \text{и} \quad w_M = MQ \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (18)$$

Таким образом, ускорения всех точек фигуры пропорциональны в данный момент их расстояниям до мгновенного центра Q :

$$\frac{w_M}{MQ} = \frac{w_A}{AQ} = \frac{w_B}{BQ} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Кроме того, углы, образуемые векторами ускорений с отрезками, соединяющими соответствующие точки и центр Q , одинаковы и равны μ (рис. 121). Следовательно, ускорения всех точек фигуры распределены в данный момент так, как если бы она вращалась вокруг центра Q , как вокруг неподвижного.

Следует подчеркнуть, что мгновенный центр вращения P и мгновенный центр ускорений Q — это точки разные. Для точки фигуры, совпадающей с центром P , $v_P = 0$, но $\omega_P \neq 0$. Для точки же, совпадающей с центром Q , $\omega_Q = 0$, но $v_Q \neq 0$. Справедливость этих утверждений доказана ниже, в п. 13.

Если фигура совершает чисто вращательное движение, то центры P и Q совпадают с неподвижным центром вращения фигуры.

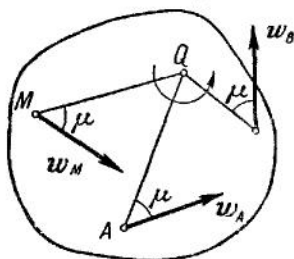


Рис 121

Пример. Рассмотрим колесо радиуса R , катящееся без скольжения по прямолинейному рельсу (рис. 122). Допустим сначала, что скорость v_A его центра A , движущегося прямолинейно, постоянна. Тогда $\omega_A = 0$ и точка A является мгновенным центром ускорений. Так как при этом мгновенный центр вращения находится в точке касания P , то мы сразу убеждаемся, что эти центры не совпадают. Далее имеем:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{R} = \text{const}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

$$\text{tg } \mu = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = 0, \quad \mu = 0.$$

Тогда, согласно формуле (18), для любой точки M обода колеса

$$w_M = \omega^2 \cdot AM = \frac{v_A^2}{R}.$$

Поскольку $\mu = 0$, вектор w_A направлен вдоль MA , т. е. ускорения всех точек колеса направлены к его центру A .

Расчет с помощью мгновенного центра ускорений оказывается в этом случае очень простым. Отметим в заключение, что w_M не является нормальным ускорением точки M , так как мгновенный центр вращения колеса находится не в A , а в точке касания P . Поэтому нормаль к траектории точки M направлена вдоль MP , а касательная — вдоль MB и $w_{Mn} = w_M \cos \alpha$, а $w_{Mt} = w_M \sin \alpha$.

Рассмотрим теперь случай, когда центр колеса движется неравномерно. Допустим для упрощения расчета, что $R = 1$ м и что в некоторый момент времени $v_A = 1$ м/сек, $\omega_A = 1$ м/сек², причем оба вектора направлены

в одну сторону (рис. 123). Тогда в этот момент $\omega = \frac{v_A}{R} = 1$ сек⁻¹, $\varepsilon = \frac{w_A}{R} = 1$ сек⁻², $\text{tg } \mu = 1$, $\mu = 45^\circ$.

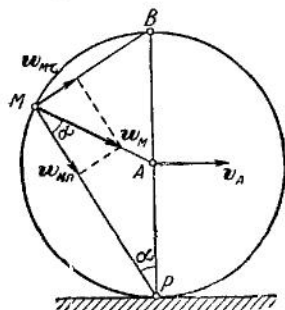


Рис. 122.

Кроме того, по формуле (17)

$$AQ = \frac{\omega_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} m.$$

Следовательно, в этот момент времени мгновенный центр ускорения лежит на середине гипотенузы PB равнобедренного прямоугольного треугольника PAB . Все точки, лежащие в вершинах этого треугольника, имеют одинаковые по модулю ускорения, направленные так, как показано на рисунке. Ускорение любой другой точки M колеса найдется из пропорции

$$\frac{\omega_M}{QM} = \frac{\omega_A}{QA}.$$

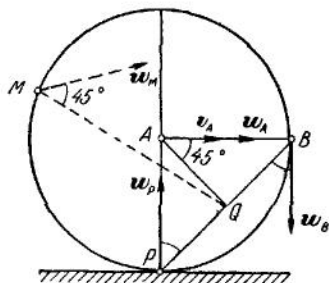


Рис. 123.

Заметим, что вычисление расстояния QM для произвольной точки M оказывается довольно громоздким, особенно при произвольных значениях v_A и ω_A . Поэтому обычно ускорения точек плоской фигуры в подобных случаях вычисляют или по формуле (13) (см. п. 10), или же графически (п. 12).

12. План ускорений. Графически ускорения точек плоской фигуры можно определять путем построения так называемого плана ускорений. Пусть нам известны скорость v_A и ускорение ω_A какой-нибудь точки A фигуры (рис. 124, векторы на нем изображены без соблюдения масштаба) и траектория другой ее точки B (см. пример 2 в п. 10); тем самым известны направления касательной $B\tau$ и нормали Bn к траектории в точке B и радиус кривизны ρ_B траектории в этой точке. Покажем, что по этим данным можно построить графически ускорение любой точки фигуры.

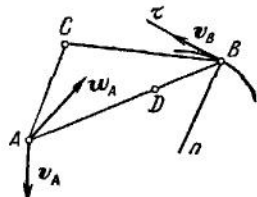


Рис. 124.

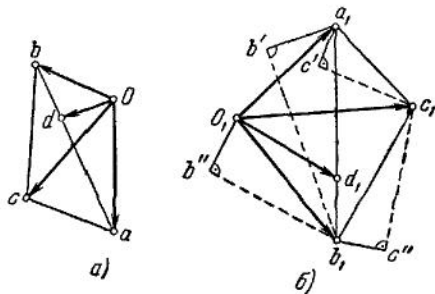


Рис. 125.

Для этого сначала, зная v_A и направление v_B (вдоль $B\tau$), строим для данной фигуры план скоростей (рис. 125, а); построение ведется так, как указано в п. 8. Теперь строим план ускорений, откладывая векторы ускорений всех точек (в выбранном масштабе) от общего центра O_1 и обозначая, по аналогии с планом скоростей, $\omega_A = \overline{O_1 a_1}$, $\omega_B = \overline{O_1 b_1}$ и т. д. Начнем с определения ω_B . Для этого исходим из равенства (13)

$$\omega_B = \omega_A + \omega_{BA}^{ic} + \omega_{BA}^{bp}, \quad (19)$$

а также из того, что ω_B можно представить как сумму его нормальной и касательной составляющих

$$\omega_B = \omega_{Bn} + \omega_{B\tau}. \quad (20)$$

Имея план скоростей, вычисляем угловую скорость фигуры

$$\omega = \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \dots \quad (21)$$

и величину $v_B = Ob$. По этим данным находим:

$$\omega_{BA}^{nc} = \omega^2 \cdot AB = \frac{(ab)^2}{AB}, \quad \omega_{Bn} = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(Ob)^2}{\rho_B}. \quad (22)$$

Теперь строим графически равенство (19). Для этого откладываем в выбранном масштабе от некоторого центра O_1 (рис. 125, б) вектор $\overline{O_1 a_1} = \omega_A$, а от его конца — вектор $\overline{a_1 b'} = \omega_{BA}^{nc}$, модуль которого вычисляется по формуле (22), а направление совпадает с направлением \overline{BA} . Так как $\omega_{BA}^{nc} \perp \omega_{BA}^{nc}$, то, восставив из точки b' перпендикуляр к $\overline{a_1 b'}$, заключаем, что конец b_1 вектора $\overline{O_1 b_1} = \omega_B$ должен лежать где-то на этом перпендикуляре, поскольку, согласно (19), должно быть $\overline{O_1 a_1} + \overline{a_1 b'} + \overline{b' b_1} = \overline{O_1 b_1}$.

С другой стороны, откладывая от центра O_1 вектор $\overline{O_1 b''} = \omega_{Bn}$, модуль которого тоже вычисляется по формуле (22), а направление совпадает с Bn , и восставив из точки b'' перпендикуляр к $\overline{O_1 b''}$, заключаем на основании равенства (20), что конец b_1 вектора $\overline{O_1 b_1} = \omega_B$ должен одновременно лежать и на этом перпендикуляре, так как, согласно (20), должно быть $\overline{O_1 b''} + \overline{b'' b_1} = \overline{O_1 b_1}$. Таким образом, пересечение проведенных перпендикуляров к $\overline{a_1 b'}$ и $\overline{O_1 b''}$ дает точку b_1 — конец вектора ω_B . Соединяя точки O_1 и b_1 , находим графически вектор $\overline{O_1 b_1} = \omega_B$.

Из равенства (19) следует, что $b' b_1 = \omega_{BA}^{np}$, где, согласно (15), $\omega_{BA}^{np} = AB \cdot \varepsilon$. Отсюда можно определить величину углового ускорения фигуры¹⁾

$$\varepsilon = \frac{b' b_1}{AB}. \quad (23)$$

Одновременно, соединяя на рис. 125, б точки a_1 и b_1 вектором $\overline{a_1 b_1}$, получаем $\overline{O_1 b_1} = \overline{O_1 a_1} + \overline{a_1 b_1}$ или $\omega_B = \omega_A + \overline{a_1 b_1}$. Сравнивая этот результат с равенствами (14) и (15), заключаем, что $\overline{a_1 b_1} = \omega_{BA}$ и

$$a_1 b_1 = AB \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}. \quad (24)$$

Такое же соотношение имеет место для любых отрезков, соединяющих концы векторов ускорений точек фигуры на рис. 125, б. Следовательно, отрезки, обозначенные одинаковыми буквами, большими на рис. 124 и малыми с индексом 1 на рис. 125, б, будут пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_1 b_1}{AB} = \frac{b_1 c_1}{BC} = \frac{c_1 d_1}{CD} = \dots = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}, \quad (25)$$

¹⁾ При всех расчетах по формулам (23) — (25) должен, конечно, учитываться масштабный коэффициент.

а треугольники, образованные соответствующими отрезками, будут подобны. При этом, так как каждый из векторов $\overline{a_1 b_1} = \omega_{BA}$, $\overline{b_1 c_1} = \omega_{CB}$, ... образует соответственно с \overline{BA} , \overline{CB} , ... один и тот же угол μ , то отрезки $a_1 b_1$, $b_1 c_1$, ... (или треугольники $a_1 b_1 c_1$, ...) повернуты относительно отрезков AB , BC , ... (или треугольников ABC , ...) на угол $\pi - \mu$. Этим можно пользоваться при построении плана ускорений, а также для проверки правильности полученных результатов.

После того как вектор $\overline{O_1 b_1} = \omega_B$ найден, ускорение любой другой точки фигуры строится следующим образом.

а) Если точка D лежит на отрезке AB (рис. 124), то ADB — прямая; следовательно, и точки a_1 , d_1 , b_1 на рис. 125, б тоже лежат на одной прямой. С другой стороны, согласно (25), должно быть:

$$\frac{a_1 d_1}{d_1 b_1} = \frac{AD}{DB}. \quad (26)$$

Поэтому, деля отрезок $a_1 b_1$ в данном отношении, мы найдем точку d_1 и определим вектор $\overline{O_1 d_1} = \omega_D$.

б) Если точка C не лежит на отрезке AB (рис. 124), то, считая сначала полюсом точку A , а затем точку B , будем иметь:

$$\omega_C = \omega_A + \omega_{CA}^{uc} + \omega_{CA}^{bp}, \quad \omega_C = \omega_B + \omega_{CB}^{uc} + \omega_{CB}^{bp}$$

Пользуясь планом скоростей, вычисляем [см. первую из формул (22)]:

$$\omega_{CA}^{uc} = \omega^2 \cdot CA = \frac{(ca)^2}{CA}, \quad \omega_{CB}^{uc} = \omega^2 \cdot CB = \frac{(cb)^2}{CB}.$$

Теперь откладываем от точки a_1 вектор $\overline{a_1 c'} = \omega_{CA}^{uc}$, направление которого совпадает с CA на рис. 124, и восстанавливаем из c' перпендикуляр к $\overline{a_1 c'}$; затем от точки b_1 откладываем вектор $\overline{b_1 c''} = \omega_{CB}^{uc}$, направление которого совпадает с \overline{CB} , и восстанавливаем из точки c'' перпендикуляр к $\overline{b_1 c''}$. Пересечение этих перпендикуляров дает точку c_1 ; следовательно, $\overline{O_1 c_1} = \omega_C$. Другим путем вектор $\overline{O_1 c_1} = \omega_C$ можно найти, построив на отрезке $a_1 b_1$ треугольник $a_1 b_1 c_1$, подобный $\triangle ABC$ на рис. 124 и повернутый относительно него на угол $\pi - \mu$ (или же таким путем проверяется правильность предыдущего построения).

Полученная на рис. 125, б фигура и является планом ускорений.

План ускорений механизма строится как совокупность планов ускорений всех его звеньев, причем все векторы ускорений откладываются от общего центра O_1 .

Пример. Построим план ускорений для механизма, изображенного на рис. 126, а, где $AC = CB$ (план скоростей этого механизма построен на рис. 115, б). Допустим, что звено $O'A$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 . Тогда ускорение точки A звена AB будет $\omega_A = \omega_0^2 \cdot O'A$, причем вектор ω_A направлен вдоль $O'A$. Кроме того, известна траектория точки B этого звена — отрезок прямой $O'B$. Следовательно, можно построить план ускорений звена AB . Откладываем от центра O_1 в выбранном масштабе вектор $\overline{O_1 a_1} = \omega_A$ (рис. 126, б). Затем вычисляем

$$\omega_{BA}^{uc} = \omega^2 \cdot AB = \frac{(ab)^2}{AB},$$

беря значение ab с плана скоростей; откладываем от a_1 вектор $\overline{a_1b'} = \omega_{BA}^{12}$ ($\overline{a_1b'} \uparrow \uparrow \overline{BA}$) и в точке b' восстанавливаем перпендикуляр к $\overline{a_1b'}$. Так как точка B движется прямолинейно, то в этом случае мы сразу знаем направление ω_B

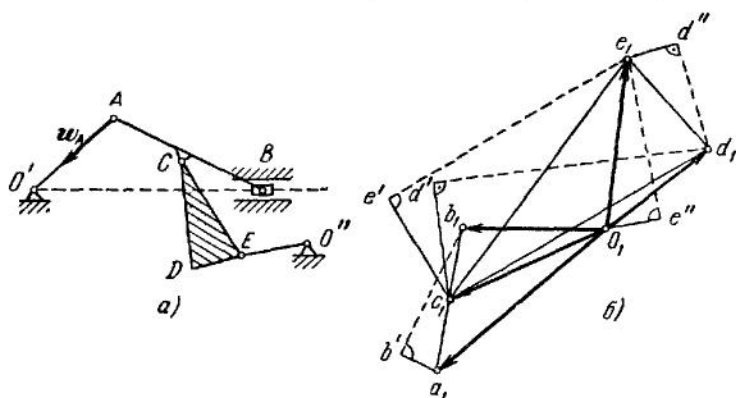


Рис. 126

(вдоль прямой $O'B$). Поэтому, проводя из O_1 прямую, параллельную $O'B$, до ее пересечения с перпендикуляром к $\overline{a_1b'}$, находим точку b_1 , а следовательно, и вектор $\overline{O_1b_1} = \omega_B$. Наконец, деля отрезок a_1b_1 пополам, находим точку c_1 и ускорение $\omega_C = \overline{O_1c_1}$.

Теперь, зная ускорение точки C и траекторию точки E (окружность радиуса $O''E$), строим от того же центра O_1 план ускорений звена CDE . При этом ускорения точек E и D определяются в точности так же, как ускорения точек B и C на рис. 125. Окончательный результат показан на рис. 126, б.

13. Некоторые свойства мгновенного центра вращения и мгновенного центра ускорений. До сих пор, поскольку это не вызывало недоразумений, мы обозначали одним и тем же символом P и мгновенный центр вращения и ту точку фигуры, которая в данный момент совпадает с этим центром, т. е. мгновенный центр скоростей (это же относится и к символу Q). В этом пункте мы условимся обозначения P и Q относить только к соответствующим точкам движущейся фигуры, а положения тех же центров на неподвижной плоскости обозначать через π и κ .

Чтобы пояснить разницу в обозначениях, заметим, что геометрическое место точек π на неподвижной плоскости образует неподвижную центриду, а геометрическое место положений точки P на той же плоскости дает траекторию этой точки — рулетку (см. рис. 127). При этом очевидно, что в момент,

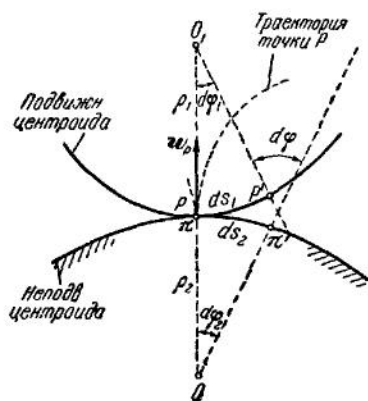


Рис. 127.

когда точки P и π совпадают, касательная к траектории точки P направлена по нормали к центроидам (так как подвижная центроида катится по неподвижной без скольжения, то вдоль центроиды точка P переместиться не может).

а) Скорость перемещения мгновенного центра вращения. Пусть плоскопараллельное движение задано качением без скольжения подвижной центроиды по неподвижной, причем для каждого момента времени известна угловая скорость ω фигуры (рис. 127). Найдем скорость v_π перемещения мгновенного центра вращения π вдоль центроиды¹⁾. При качении подвижной центроиды по неподвижной точка касания (P , π), являющаяся в данный момент мгновенным центром, перейдет на этих центроидах соответственно в новые положения P' и π' ; так как качение происходит без скольжения, то

$$\overline{PP'} = \overline{\pi\pi'}$$

или

$$ds_1 = ds_2 = ds.$$

Угол поворота плоскости, связанной с подвижной центроидой, равен $d\varphi$, так как после поворота нормаль $P'O_1$ будет продолжением $O\pi'$. Из рисунка видно, что

$$d\varphi = d\varphi_1 + d\varphi_2,$$

где $d\varphi_1$ и $d\varphi_2$ суть углы между соседними нормальными соответствующих центроид. Обозначая через ρ_1 и ρ_2 радиусы кривизн центроид, будем иметь:

$$ds_1 = \rho_1 d\varphi_1, \quad ds_2 = \rho_2 d\varphi_2.$$

Следовательно,

$$d\varphi = \frac{ds_1}{\rho_1} + \frac{ds_2}{\rho_2} = ds \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Разделив левую и правую части полученного равенства на dt , найдем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)$$

или

$$\omega = v_\pi \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Отсюда получаем:

$$v_\pi = \omega \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} = \frac{\omega}{k_1 + k_2}, \quad (27)$$

где k — кривизна. Легко видеть, что если центроиды будут расположены, как показано на рис. 128, то скорость v_π перемещения мгновенного центра будет:

$$v_\pi = \omega \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\omega}{k_2 - k_1}. \quad (28)$$

б) Ускорение точки фигуры, совпадающей с мгновенным центром вращения. Для этой точки P , являющейся в данный

¹⁾ Эту скорость не следует смешивать со скоростью v_P точки P плоской фигуры, которая в данный момент равна нулю ($v_P = 0$).

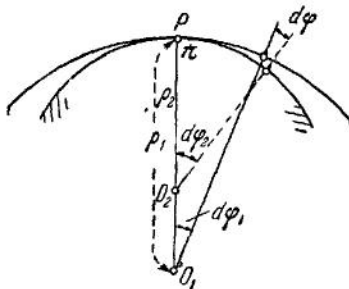


Рис. 128.

момент времени мгновенным центром скоростей, будет $v_P = 0$. Следовательно, равно нулю и ее нормальное ускорение и вектор ускорения w_P направлен по касательной к траектории точки P , т. е. вдоль общей нормали PO_1 к центроидам (см. рис. 127). Для определения модуля w_P заметим, что $v_P = 0$ в данный момент t , а в момент $t + \Delta t$, когда мгновенный центр вращения переместится в положение π' , эта скорость будет равна $(\omega + \Delta\omega) \cdot \Delta s$, где $\Delta s = P\pi' = \pi\pi'$. Тогда

$$w_P = w_{P\tau} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\omega + \Delta\omega) \Delta s}{\Delta t} = \omega \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \omega v_\pi, \quad (29)$$

где v_π — скорость перемещения мгновенного центра вращения вдоль центроиды.

Пользуясь равенствами (27) и (28), находим окончательно:

$$w_P = \omega^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2} = \frac{\omega^2}{k_2 \pm k_1}, \quad (30)$$

где нижний знак соответствует расположению центроид, показанному на рис. 128. Как видим, ускорение точки P зависит только от угловой скорости фигуры и не зависит от ее углового ускорения (см. п. 10, пример 1).

в) Скорость точки фигуры, совпадающей с мгновенным центром ускорений. Пусть в данный момент времени с мгновенным центром вращения совпадает точка P фигуры, а мгновенный центр ускорений находится в точке Q (рис. 129). Тогда $v_Q = \omega \cdot PQ$. Но, с другой стороны, согласно формуле (18), должно быть $w_P = QP \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$. Отсюда следует, что

$$v_Q = \frac{\omega w_P}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad (31)$$

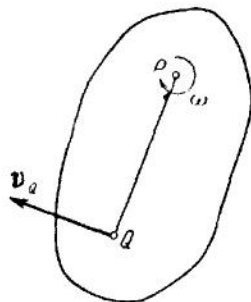


Рис. 129.

или, если учесть равенство (30),

$$v_Q = \frac{\omega^3}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 \pm \rho_2} = \frac{\omega^3}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} (k_2 \pm k_1). \quad (31')$$

Полученные результаты подтверждают сделанное в п. 11 замечание о том, что в данный момент для точки фигуры, совпадающей с мгновенным центром вращения (т. е. для мгновенного центра скоростей), $v_P = 0$, а $w_P \neq 0$; для точки же, являющейся мгновенным центром ускорений, $w_Q = 0$, а $v_Q \neq 0$.

14. Аналитическое рассмотрение движения плоской фигуры в ее плоскости. Пусть плоская фигура движется по отношению к основной (неподвижной) системе осей $\Omega\xi\eta$ (рис. 130). Примем точку A за полюс и свяжем с фигурой подвижную систему осей Ax . Тогда положение фигуры в любой момент времени будет определено, если будут известны координаты ξ_A , η_A полюса A и угол φ между осями Ox и $\Omega\xi$. Чтобы знать движение фигуры, надо знать зависимости

$$\xi_A = f_1(t), \quad \eta_A = f_2(t) \text{ и } \varphi = f_3(t). \quad (32)$$

Уравнения (32), определяющие закон движения плоской фигуры в ее плоскости, называются уравнениями плоскопараллельного движения. Покажем, как, зная уравнения (32), можно чисто аналитическим путем найти все кинематические характеристики движения точек плоской фигуры.

Обозначим через ρ_A и ρ радиусы-векторы, определяющие положение полюса A и произвольной точки M фигуры относительно неподвижных осей $\Omega\xi\eta$, а через r — радиус-вектор, определяющий положение той же точки M в подвижных осях Axy . Все эти векторы при движении фигуры будут функциями времени

$$\rho_A = \rho_A(t), \quad \rho = \rho(t), \quad r = r(t) \quad (33)$$

и будут в каждый момент времени связаны соотношением

$$\rho = \rho_A + r. \quad (34)$$

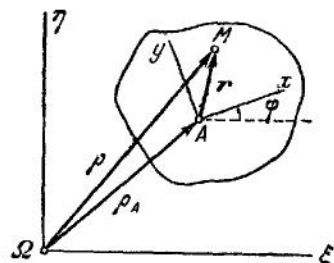


Рис. 130.

Обозначим через ξ , η координаты точки M в осях $\Omega\xi\eta$, а через x , y — координаты той же точки в осях Oxy (x и y — величины постоянные, но разные для разных точек фигуры). Тогда, проектируя обе части равенства (34) на оси $\Omega\xi$ и $\Omega\eta$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_A + x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ \eta &= \eta_A + x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Уравнения (35) определяют закон движения точки M относительно осей $\Omega\xi\eta$. Время в эти уравнения входит через ξ_A , η_A и φ , заданные равенствами (32). Одновременно (35) дают уравнение траектории точки M в параметрической форме; уравнение траектории в виде $\Phi(\xi, \eta) = 0$ можно найти, исключив из (35) время t . Наконец, дифференцируя равенства (35) по времени, можно определить аналитически скорость и ускорение любой точки M фигуры.

Мы получим выражения для проекции скорости v_M и ускорения ω_M на оси координат несколько иным путем. Из формулы (4) имеем:

$$v_M = v_A + (\omega \times r), \quad (36)$$

или, согласно равенству (34),

$$v_M = v_A + \omega \times (\rho - \rho_A) = \frac{d\rho_A}{dt} + \omega \times (\rho - \rho_A). \quad (37)$$

Вводя единичные векторы неподвижных осей ξ^0, η^0, ζ^0 , представим (37) в виде

$$\mathbf{v}_M = \frac{d\rho_A}{dt} + \begin{vmatrix} \xi^0 & \eta^0 & \zeta^0 \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi - \xi_A & \eta - \eta_A & 0 \end{vmatrix}, \quad (37')$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ — алгебраическая величина угловой скорости фигуры. Тогда проекции скорости \mathbf{v}_M на неподвижные оси ξ и η будут:

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_A}{dt} - \omega(\eta - \eta_A), \\ v_\eta &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta_A}{dt} + \omega(\xi - \xi_A). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Теперь, вводя единичные векторы подвижных осей x^0, y^0, z^0 , представим (36) в виде

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \begin{vmatrix} x^0 & y^0 & z^0 \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \quad (39)$$

и найдем проекции \mathbf{v}_M на подвижные оси x и y

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{Ax} - \omega y, \\ v_y &= v_{Ay} + \omega x. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Входящие сюда величины v_{Ax} и v_{Ay} могут быть найдены путем проектирования на оси Ox и Oy обеих частей равенства

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\xi_A}{dt} \xi^0 + \frac{d\eta_A}{dt} \eta^0,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} v_{Ax} &= \frac{d\xi_A}{dt} \cos \varphi + \frac{d\eta_A}{dt} \sin \varphi, \\ v_{Ay} &= -\frac{d\xi_A}{dt} \sin \varphi + \frac{d\eta_A}{dt} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Координаты мгновенного центра вращения P найдем, если приравняем нулю скорость \mathbf{v}_M или выражения ее проекций (38) и (40). Тогда в неподвижной системе координат получим:

$$\frac{d\xi_A}{dt} - \omega(\eta_P - \eta_A) = 0, \quad \frac{d\eta_A}{dt} + \omega(\xi_P - \xi_A) = 0,$$

где ξ_P и η_P — координаты мгновенного центра P . Отсюда

$$\xi_P = \xi_A - \frac{1}{\omega} \frac{d\eta_A}{dt}, \quad \eta_P = \eta_A + \frac{1}{\omega} \frac{d\xi_A}{dt}. \quad (42)$$

В подвижной же системе будем иметь:

$$v_{Ax} - \omega y_P = 0, \quad v_{Ay} + \omega x_P = 0,$$

где x_P и y_P — координаты центра P . Отсюда

$$x_P = -\frac{v_{Ay}}{\omega}, \quad y_P = \frac{v_{Ax}}{\omega}. \quad (43)$$

Все входящие в полученные равенства координаты ξ_P , η_P , x_P и y_P являются функциями времени, причем вид их зависимости от времени определяется равенствами (32) и (41).

Очевидно, уравнения (42) и (43) представляют собой одновременно параметрические уравнения неподвижной и подвижной центроид. Исключая из них время t , можно получить соответственно уравнения неподвижной и подвижной центроид в виде

$$\varphi(\xi_P, \eta_P) = 0 \quad \text{и} \quad f(x_P, y_P) = 0. \quad (44)$$

Ускорение \boldsymbol{w}_M точки M получим из формулы (11) или непосредственно дифференцируя по времени \boldsymbol{v}_M в равенстве (36):

$$\boldsymbol{w}_M = \frac{d\boldsymbol{v}_M}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{w}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} - \omega^2 \boldsymbol{r}, \quad (45)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ — угловое ускорение фигуры.

Представив равенство (45) в виде

$$\boldsymbol{w}_M = \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2 \boldsymbol{\rho}_A}{dt^2} + \boldsymbol{\varepsilon} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A) - \omega^2 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A), \quad (46)$$

найдем проекции \boldsymbol{w}_M на оси ξ , η

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{d^2 \xi_A}{dt^2} - \varepsilon (\eta - \eta_A) - \omega^2 (\xi - \xi_A), \\ w_\eta &= \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{d^2 \eta_A}{dt^2} + \varepsilon (\xi - \xi_A) - \omega^2 (\eta - \eta_A). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Проекции \boldsymbol{w}_M на оси x и y найдем непосредственно из равенства (45)

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w_{Ax} - \varepsilon y - \omega^2 x, \\ w_y &= w_{Ay} + \varepsilon x - \omega^2 y. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

При этом w_{Ax} и w_{Ay} вычисляются по формулам, которые получаются аналогично формулам (41),

$$\left. \begin{aligned} w_{Ax} &= \frac{d^2 \xi_A}{dt^2} \cos \varphi + \frac{d^2 \eta_A}{dt^2} \sin \varphi, \\ w_{Ay} &= -\frac{d^2 \xi_A}{dt^2} \sin \varphi + \frac{d^2 \eta_A}{dt^2} \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Координаты мгновенного центра ускорений Q найдем, приравняв нулю ускорение ω_M или выражения его проекций (47) и (48). Тогда для определения координат ξ_Q, η_Q в неподвижной системе осей получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi_A}{dt^2} - \varepsilon(\eta_Q - \eta_A) - \omega^2(\xi_Q - \xi_A) &= 0, \\ \frac{d^2\eta_A}{dt^2} + \varepsilon(\xi_Q - \xi_A) - \omega^2(\eta_Q - \eta_A) &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} \xi_Q &= \xi_A - \frac{\frac{d^2\eta_A}{dt^2} \varepsilon - \frac{d^2\xi_A}{dt^2} \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ \eta_Q &= \eta_A + \frac{\frac{d^2\xi_A}{dt^2} \varepsilon + \frac{d^2\eta_A}{dt^2} \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Соответственно координаты x_Q, y_Q мгновенного центра ускорений в подвижной системе осей найдутся из уравнений

$$\begin{aligned} \omega_{Ax} - \varepsilon y_Q - \omega^2 x_Q &= 0, \\ \omega_{Ay} + \varepsilon x_Q - \omega^2 y_Q &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x_Q &= \frac{-\omega_{Ay} \varepsilon + \omega_{Ax} \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ y_Q &= \frac{\omega_{Ax} \varepsilon + \omega_{Ay} \omega^2}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

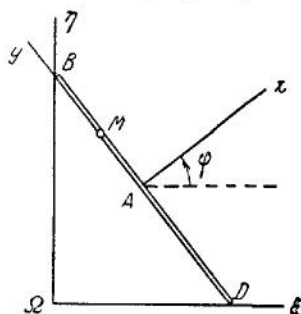


Рис. 131.

Пример. Рассмотрим в качестве примера карданово движение (см. пример в п. 4), т. е. движение отрезка BD , скользящего своими концами по сторонам прямого угла (рис. 131). Пусть $BD = 2a$. Возьмем в качестве полюса середину A отрезка и направим оси $\Omega\xi\eta$ и Axy так, как показано на рисунке. Допустим, что при движении отрезка угол φ растет пропорционально времени: $\varphi = \omega t$. Тогда $\xi_A = a \sin \varphi$, $\eta_A = a \cos \varphi$ и уравнения движения (32) будут:

$$\xi_A = a \sin \omega t, \quad \eta_A = a \cos \omega t, \quad \varphi = \omega t. \quad (a)$$

Для любой точки M отрезка BD координата $x = 0$ и уравнения (35), описывающие движение этой точки, примут вид

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_A - y \sin \varphi = (a - y) \sin \omega t, \\ \eta &= \eta_A + y \cos \varphi = (a + y) \cos \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Теперь с помощью полученных выше формул можно найти все характеристики движения. Определим сначала уравнение траектории точки M и уравнения центроида. Исключая из равенств (6) время t , найдем:

$$\frac{\xi^2}{(a-y)^2} + \frac{\eta^2}{(a+y)^2} = 1.$$

Следовательно, траекторией любой точки $M(0, y)$ отрезка BD является эллипс. Далее по формулам (42) будем окончательно иметь:

$$\xi_P = 2a \sin \omega t, \quad \eta_P = 2a \cos \omega t. \quad (в)$$

Исключая отсюда время t , получим $\xi_P^2 + \eta_P^2 = 4a^2$. Следовательно, неподвижная центроида есть окружность радиуса $2a$ с центром в начале координат Ω .

Теперь по формулам (41) находим:

$$v_{Ax} = a\omega \cos 2\omega t, \quad v_{Ay} = -a\omega \sin 2\omega t \quad (г)$$

и, подставляя эти значения в равенства (43), определим:

$$x_P = a \sin 2\omega t, \quad y_P = a \cos 2\omega t. \quad (д)$$

Исключая отсюда время t , получим $x_P^2 + y_P^2 = a^2$. Следовательно, подвижная центроида есть окружность радиуса a с центром в полюсе A .

Полученные результаты, в чем нетрудно убедиться, останутся справедливыми при любом законе вращения $\varphi(t)$. Однако вид этого закона скажется на значениях скоростей и ускорений точек отрезка.

Найдем еще положение мгновенного центра ускорений Q . По формулам (50), учитывая, что в рассматриваемом случае $\varepsilon = 0$, получим $\xi_Q = 0$, $\eta_Q = 0$. Следовательно, когда φ изменяется по закону $\varphi = \omega t$, мгновенный центр ускорений находится все время в начале координат Ω . Ускорение любой точки M будет равно $\omega_M = \Omega M \cdot \omega^2$ и направлено к центру Ω .

§ 10. Движение твердого тела около неподвижной точки

1. Теорема Эйлера — Даламбера. Рассмотрим теперь движение абсолютно твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Докажем, что в этом случае имеет место теорема Эйлера — Даламбера: *Всякое перемещение твердого тела около неподвижной точки можно получить одним только поворотом тела вокруг определенной оси, проходящей через эту точку и называемой осью конечного вращения.* Доказывается эта теорема аналогично теореме II на стр. 102. Как известно, положение твердого тела в пространстве определяется положением любых трех его точек, не лежащих на одной прямой (§ 7, п. 1). Если точка O тела неподвижна, то его положение определится положением любых двух других точек, не лежащих на одной прямой с точкой O . Опишем из неподвижной точки O тела, как из центра, сферу произвольного радиуса и на этой сфере возьмем две точки A и B (рис. 132); тогда положение тела можно определить положением дуги AB большого круга рассматриваемой сферы.

Пусть тело переместилось так, что дуга AB заняла положение A_1B_1 ; тогда, соединив точки A и A_1 , B и B_1 дугами большого круга и восстановив из середины этих дуг C и D сферические перпендикуляры (т. е. проведя через точки C и D дуги больших кругов, пересекающих ортогонально дуги AA_1 и BB_1), получим в пересечении их на сфере точку O_1 , которая будет равноудалена от точек A и A_1 , B и B_1 . При этом сферические треугольники ABO_1 и $A_1B_1O_1$ будут равны. Повернув тело вокруг оси OO_1 на $\angle AO_1A_1 = \angle BO_1B_1$, мы совместим дугу AB с дугой A_1B_1 . Следовательно, перемещение тела из положения, определяемого дугой AB , в положение, определяемое дугой A_1B_1 , действительно получается одним только поворотом вокруг оси OO_1 .

2. Геометрическая картина движения. Подвижный и неподвижный аксоиды. Движение твердого тела около неподвижной точки можно рассматривать как непрерывную последовательность элементарных перемещений. Согласно доказанной теореме, всякое такое элементарное перемещение можно осуществить одним только поворотом на бесконечно малый угол вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку и называемой *мгновенной осью вращения*. Таким образом, движение твердого тела около неподвижной точки можно рассматривать как непрерывную последовательность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку.

Геометрическое место мгновенных осей вращения при движении тела образует в пространстве, связанном с неподвижной системой отсчета, конус, называемый *неподвижным аксоидом* (от слова axis — ось). Кроме того, мгновенная ось вращения при движении тела изменяет свое положение в самом теле (точнее, в пространстве, связанном с телом). Эта коническая поверхность, образуемая семейством мгновенных осей вращения в пространстве, связанном с движущимся телом, называется *подвижным аксоидом*.

Подвижный и неподвижный аксоиды имеют общую вершину в точке O , и в каждый данный момент времени мгновенная ось вращения будет служить общей образующей для подвижного и неподвижного аксоидов. Таким образом, подвижный аксоид при движении тела будет катиться без скольжения по неподвижному аксоиду.

Как видим, получающаяся в этом случае картина движения тела совершенно аналогична картине, данной Пуансо для плоскопараллельного движения (см. § 9), только роль мгновенного центра вращения здесь играет мгновенная ось, а роль центроида — аксоиды.

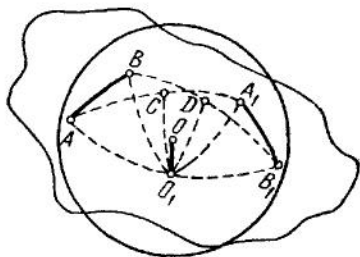


Рис. 132

Плоскопараллельное движение твердого тела можно рассматривать как движение около неподвижной бесконечно удаленной точки; тогда аксоиды из конусов превращаются в цилиндры, пересечения которых с основной плоскостью дадут центроиды. Заметим, что теорема Эйлера — Даламбера в этом случае переходит в теорему II для плоскопараллельного движения (стр. 102).

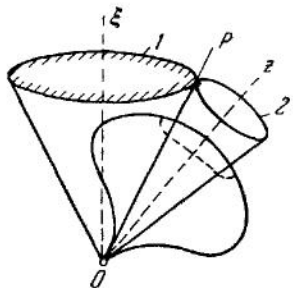


Рис. 133.

Примером может служить волчок с неподвижной точкой O (рис. 133), совершающий так называемую регулярную прецессию (волчок вращается вокруг своей оси Oz , а эта ось обращается в свою очередь вокруг вертикали $O\xi$ так, что $\angle zO\xi = \text{const}$). При этом движении мгновенная ось вращения волчка OP , лежащая между осями z и ξ , описывает относительно неподвижного пространства неподвижный конус 1, а в самом теле — подвижный конус 2; при движении волчка около точки O подвижный конус (аксоид) будет катиться без скольжения по неподвижному.

3. Мгновенная угловая скорость и мгновенное угловое ускорение тела. Угловая скорость ω , с которой происходит элементарный поворот тела вокруг мгновенной оси вращения, называется мгновенной угловой скоростью или угловой скоростью тела в данный момент времени.

Вектор ω направлен вдоль мгновенной оси вращения и может быть приложен в любой ее точке, в частности в точке O , общей для всех мгновенных осей. При движении тела вектор ω в общем случае изменяется со временем и по модулю и по направлению, т. е. $\omega = \omega(t)$. Производная от ω по времени определяет вектор

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad (1)$$

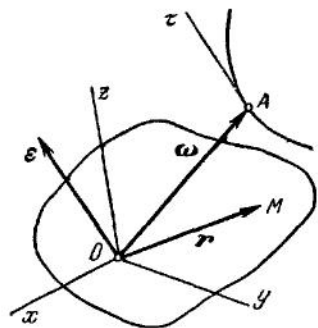


Рис. 134.

называемый мгновенным угловым ускорением или угловым ускорением тела в данный момент времени. Направление вектора ε совпадает с направлением касательной At к годографу вектора ω (рис. 134). Вектор ε будем также изображать отложенным от центра O .

4. Скорости точек тела, движущегося около неподвижной точки. По аналогии с плоскопараллельным движением заключаем, что распределение скоростей всех точек твердого тела будет в данный момент времени таким же, как если бы мгновенная ось враще-

ния была неподвижной. Следовательно, скорость любой точки тела в данный момент времени определяется векторной формулой Эйлера:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad (2)$$

где $\mathbf{r} = \overline{OM}$ — радиус-вектор, проведенный из центра O в точку M тела; $p = \omega_x$, $q = \omega_y$, $r = \omega_z$ — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на какую-нибудь систему прямоугольных осей $Oxyz$, проведенных из точки O (см. рис. 134); x, y, z — координаты точки M в этой системе осей. Из векторного равенства (2) получаем:

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx. \quad (3)$$

Это — так называемые формулы Эйлера, определяющие проекции скорости любой точки $M(x, y, z)$ тела, имеющего неподвижную точку O . Вид этих формул не зависит от того, считаем мы оси $Oxyz$ неподвижными или же связанными с телом и вращающимися вместе с ним, т. е. эти формулы ковариантны по отношению к переходу от неподвижной к подвижной системе осей. Формулы (24) в § 8 являются их частным случаем.

Б. Ускорение точек тела, движущегося около неподвижной точки. Теорема Ривальса. Найдем ускорение точки M твердого тела, движущегося около неподвижной точки O . Дифференцируя по времени обе части равенства (2), получим:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (4)$$

Но здесь $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, а $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}$. Поэтому

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (5)$$

Раскрывая второй член правой части, как тройное векторное произведение, получим $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - r\boldsymbol{\omega}^2$ и, следовательно,

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - r\boldsymbol{\omega}^2. \quad (6)$$

Здесь вообще $\boldsymbol{\omega}$ не перпендикулярно к \mathbf{r} , как это было в случае плоскопараллельного движения, и $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} \neq 0$.

В проекциях на оси координат $Oxyz$ (подвижные или неподвижные) равенство (6) дает:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + p(px + qy + rz) - \omega^2 x, \\ w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + q(px + qy + rz) - \omega^2 y, \\ w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + r(px + qy + rz) - \omega^2 z. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если оси $Oxyz$ неподвижные, то $\varepsilon_x = \dot{p}$, $\varepsilon_y = \dot{q}$, $\varepsilon_z = \dot{r}$.

Выражению (6) можно придать иной вид. Заменяя ω через $\omega\omega^0$ и вынося ω^2 за скобки, имеем:

$$\omega \times (\omega \times r) = \omega^2 \{ \omega^0 (\omega^0 \cdot r) - r \}.$$

Но $\omega^0 \cdot r = r_\omega$ есть проекция вектора r на направление ω (рис. 135), поэтому

$$\omega \times (\omega \times r) = \omega^2 \{ r_\omega \omega^0 - r \} = \omega^2 h,$$

где h — вектор, равный разности векторов $r_\omega \omega^0$ и r .

Окончательное выражение ускорения, принадлежащее Ривальсу, будет:

$$\omega = \varepsilon \times r + \omega^2 h. \quad (8)$$

Вектор $\omega^2 h$, направленный к мгновенной оси вращения, называется *осеостремительным* компонентом ускорения (по аналогии с выражением $R\omega^2$ — центростремительного компонента при круговом движении точки). Что касается вектора $\varepsilon \times r$, то он направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы r и ε , т. е. так, как было бы направлено касательное ускорение точки M , если тело вращалось бы вокруг оси, совпадающей с ε . Вектор $\varepsilon \times r$ называют еще *вращательным* компонентом ускорения.

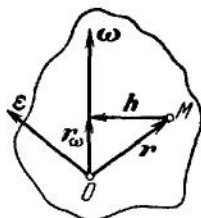


Рис. 135

6. Уравнение мгновенной оси вращения.

Уравнение мгновенной оси вращения найдем, исходя из того соображения, что скорости точек твердого тела, лежащих на мгновенной оси, в данный момент времени равны нулю. Возьмем две системы координат, имеющих общее начало в неподвижной точке O : одну неподвижную (основную) $O\xi\eta\zeta$, а другую, $Oxuz$, подвижную, неизменно скрепленную с телом. Пусть проекции вектора ω на неподвижные и подвижные оси будут соответственно p_1, q_1, r_1 и p, q, r , а проекции радиус-вектора r любой точки M тела на те же оси (т. е. координаты этой точки) — ξ, η, ζ и x, y, z .

Заметим, что проекции мгновенной угловой скорости ω будут функциями времени; что же касается вектора r , то его проекции на подвижные оси, т. е. координаты x, y, z какой-нибудь точки тела, будут постоянны, так как оси $Oxuz$ неизменно связаны с телом, проекции же ξ, η, ζ на неподвижные оси зависят от времени.

Для точек, лежащих на мгновенной оси ω , будет $v = 0$ или по формуле Эйлера

$$\omega \times r = 0. \quad (9)$$

Проектируя равенство (9) на подвижные и неподвижные оси или пользуясь непосредственно формулами (3), получим соответственно:

$$qz - ry = 0, \quad rx - pz = 0, \quad py - qx = 0 \quad (10)$$

и

$$q_1\xi - r_1\eta = 0, \quad r_1\xi - p_1\xi = 0, \quad p_1\eta - q_1\xi = 0. \quad (11)$$

Таким образом, координаты точек мгновенной оси удовлетворяют уравнениям (10) в подвижной и уравнениям (11) в неподвижной системе осей.

Из равенств (10) получаем уравнение мгновенной оси вращения для подвижной системы

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}, \quad (12)$$

а из равенств (11) — для неподвижной

$$\frac{\xi}{p_1} = \frac{\eta}{q_1} = \frac{\xi}{r_1}. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (12) и (13) время, от которого зависят проекции p, q, r и p_1, q_1, r_1 , получим уравнения подвижного и неподвижного аксоидов. Из (12) имеем:

$$\frac{x}{z} = \frac{p}{r}, \quad \frac{y}{z} = \frac{q}{r}, \quad (14)$$

причем правые части суть функции времени. Исключая из этих равенств время, получим:

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

т. е. уравнение конуса, который будет подвижным аксоидом. Таким же образом получим уравнения неподвижного аксоида.

Пример. Круглый конус, высота которого равна h , а угол при вершине — 2α , катится по горизонтальной плоскости без скольжения так, что его вершина O неподвижна, а центр основания C движется с постоянной по модулю скоростью v_C (на рис. 136 показано осевое сечение конуса вертикальной плоскостью). Найдем скорость и ускорение точки B конуса, занимающей в данный момент наивысшее положение.

При качении без скольжения скорости всех точек образующей OA равны в данный момент нулю, следовательно, OA является мгновенной осью вращения. Поверхность конуса будет подвижным аксоидом, а горизонтальная плоскость — неподвижным.

Так как скорости точек тела пропорциональны их расстояниям от мгновенной оси вращения, то

$$\frac{v_B}{BB_1} = \frac{v_C}{CC_1} \quad \text{и} \quad v_B = 2v_C \quad (v_B \parallel v_C). \quad (a)$$

Для определения ω_B надо найти ω и v . Вектор ω направлен вдоль OA (если точка C движется к нам), а по модулю

$$\omega = \frac{v_C}{CC_1} = \frac{v_C}{h \sin \alpha}. \quad (б)$$

Поскольку $\omega = \text{const}$, то вектор ω изменяется только по направлению, вращаясь вокруг вертикали Oz с некоторой угловой скоростью ω_1 (при движении точки C на нас вектор ω_1 направлен вниз). Тогда, согласно формуле (22) на стр. 98,

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \omega_1 \times \omega, \quad (в)$$

причем вектор ε направлен перпендикулярно к плоскости zOA (к нам). Замечая, что $\omega_1 \perp \omega$ и по модулю

$$\omega_1 = \frac{v_C}{OC_1} = \frac{v_C}{h \cos \alpha}, \quad (г)$$

будем иметь:

$$\varepsilon = \omega_1 \omega = \frac{2v_C^2}{h^2 \sin 2\alpha}. \quad (д)$$

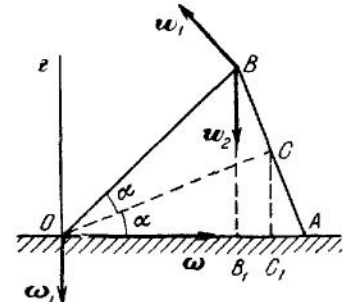


Рис. 136.

После этого находим по теореме Ривальса, что $w = w_1 + w_2$, где вектор $w_1 = \varepsilon \times \overline{OB}$ направлен перпендикулярно к OB , а вектор $w_2 = \omega^2 \cdot \overline{BB_1}$ перпендикулярен к OA . По модулю

$$w_1 = \varepsilon \cdot OB = \frac{2v_C^2}{h \sin 2\alpha \cos \alpha}, \quad w_2 = \omega^2 \cdot CC_1 = \frac{2v_C^2}{h \sin \alpha}. \quad (е)$$

Оба вектора лежат в плоскости сечения OAB и угол между ними равен $180^\circ - 2\alpha$; следовательно,

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 \cos 2\alpha}. \quad (ж)$$

Наиболее общим случаем движения твердого тела по отношению к данной системе отсчета является произвольное движение свободного тела. Это движение будет рассмотрено в § 12 после изучения сложного движения твердого тела.

§ 11. Сложное движение твердого тела

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердое тело, движущееся относительно системы отсчета $Oxyz$, которая в свою очередь перемещается по отношению к неподвижной системе $\Omega\xi\eta\zeta$. Пусть $v_1^{(M)}$ есть скорость точки M тела в его движении относительно осей $Oxyz$ (относительная скорость), а $v_2^{(M)}$ — скорость той неизменно связанной с системой $Oxyz$ точки пространства, в которой в данный момент находится точка M (переносная скорость). Допустим, что относительное движение тела и переносное движение, т. е. движение системы $Oxyz$

по отношению к системе $\Omega\xi\eta\zeta$, известны; тогда скорости $\mathfrak{v}_1^{(M)}$ и $\mathfrak{v}_2^{(M)}$ будут известны для всех точек тела в каждый данный момент времени. Скорость точки M в сложном движении (абсолютная скорость) по теореме о сложении скоростей будет:

$$\mathfrak{v}^{(M)} = \mathfrak{v}_1^{(M)} + \mathfrak{v}_2^{(M)}. \quad (1)$$

Настоящий параграф посвящен решению следующей задачи: в каждый данный момент времени при различных частных предположениях о характере относительного и переносного движений найти вид того результирующего сложного движения, которому соответствует распределение абсолютных скоростей точек тела в этот момент. Таким образом, здесь будет идти речь о сложении *мгновенных* (бесконечно малых) перемещений тела. Так как распределение скоростей точек твердого тела в данный момент зависит от его поступательной и угловой скорости в этот момент, то рассматриваемую задачу можно еще назвать задачей о сложении мгновенных поступательных и угловых скоростей тела¹⁾. Заметим, что если мы имели бы в виду сложение не мгновенных, а конечных перемещений тела, то соответствующие теоремы получили бы в общем случае совершенно иную формулировку.

Из равенства (1) вытекает, что слагаемые движения коммутативны в том смысле, что мгновенное распределение скоростей результирующего движения не изменится, если относительное и переносное движения поменять ролями.

Все изложенное распространяется на случай n движений, когда тело движется относительно системы $O_1x_1y_1z_1$, система $O_1x_1y_1z_1$ — относительно системы $O_2x_2y_2z_2$ и т. д. и, наконец, система $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$ — относительно основной системы $\Omega\xi\eta\zeta$.

2. **Сложение поступательных скоростей.** Когда все составные движения являются поступательными, то, в отличие от всех последующих случаев, теорема о сложении скоростей формулируется и доказывается одинаково как для мгновенных, так и для конечных перемещений. Пусть твердое тело движется поступательно со скоростью \mathfrak{v}_1 относительно системы $Oxyz$, которая в свою очередь движется поступательно со скоростью \mathfrak{v}_2 относительно неподвижной системы $\Omega\xi\eta\zeta$. Тогда абсолютная скорость каждой точки тела есть сумма относительной скорости, которая для всех точек равна \mathfrak{v}_1 , и переносной скорости, которая в этом случае для любой точки

¹⁾ В дальнейшем, говоря для краткости о сложении, например, двух мгновенных угловых скоростей или мгновенной угловой и поступательной скорости, мы всегда подразумеваем, что одну из этих скоростей имеет тело по отношению к подвижной системе отсчета, а другую — подвижная система отсчета по отношению к основной. То же относится к случаю сложения трех и более скоростей.

равна v_2 . Поэтому абсолютные скорости всех точек тела выражаются одним и тем же вектором

$$v = v_1 + v_2. \quad (2)$$

Следовательно, результирующее движение тела будет тоже поступательным со скоростью $v = v_1 + v_2$.

Если тело участвует одновременно в n поступательных движениях со скоростями v_1, v_2, \dots, v_n , то легко показать, что результирующее движение будет также поступательным со скоростью

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i. \quad (2')$$

3' Сложение мгновенных угловых скоростей. Пусть твердое тело совершает мгновенное вращение относительно системы $Oxuz$, которая в свою очередь совершает также мгновенное вращение по отношению к неподвижной системе $\Omega\xi\eta\zeta$. Таким образом, слагаемые движения представляют собой мгновенные вращения с некоторыми угловыми скоростями ω_1 и ω_2 . Рассмотрим сначала те частные случаи, когда мгновенные оси вращения, а следовательно, и векторы ω_1, ω_2 пересекаются или параллельны.

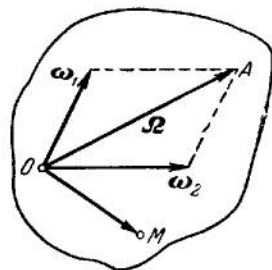


Рис. 137.

1) *Мгновенные угловые скорости не пересекаются в одной точке.* Отнесем векторы ω_1, ω_2 к точке O пересечения мгновенных осей (рис. 137) и построим на них параллелограмм. Скорость конца A диагонали параллелограмма будет:

$$v_A = \omega_1 \times \overline{OA} + \omega_2 \times \overline{OA}.$$

Модули обоих слагаемых одинаковы, так как они численно равны удвоенным площадям равных треугольников, на которые параллелограмм разделяется диагональю; по направлению же, как легко видеть, оба слагаемых прямо противоположны. Поэтому скорость точки A , так же как и скорость O , равна нулю, и прямая OA есть мгновенная ось вращения в результирующем движении.

Если обозначить направленную вдоль OA мгновенную угловую скорость через Ω , то скорость какой-нибудь точки M тела должна быть:

$$v_M = \Omega \times \overline{OM}; \quad (3)$$

с другой стороны, по формуле (1)

$$v_M = \omega_1 \times \overline{OM} + \omega_2 \times \overline{OM} = (\omega_1 + \omega_2) \times \overline{OM}. \quad (3')$$

Так как равенства (3) и (3') имеют место при любом \overline{OM} , то отсюда следует, что

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2. \quad (4)$$

Следовательно, результирующее движение будет мгновенным вращением вокруг оси, проходящей через точку O , с мгновенной угловой скоростью $\Omega = \omega_1 + \omega_2$.

Этот результат легко обобщается: если твердое тело одновременно участвует в любом числе мгновенных вращений с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ вокруг осей, пересекающихся в одной точке O , то результирующее движение будет также мгновенным вращением с угловой скоростью

$$\Omega = \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \quad (5)$$

вокруг оси, проходящей через O .

Пример. Если волчок вращается вокруг своей оси Oz с угловой скоростью ω_1 , а сама ось Oz обращается вокруг вертикальной оси $O\xi$ с угловой скоростью ω_2 (рис. 138), то эти движения, складываясь, дают мгновенное вращение с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг оси $O\eta$, направленной по диагонали параллелограмма, построенного на векторах ω_1 и ω_2 (оси z и ξ здесь также являются мгновенными, так как ось Oz меняет все время свое направление по отношению к системе $O\xi\eta\zeta$, а ось $O\xi$ — по отношению к самому движущемуся телу). Совершаемое в этом случае волчком движение называется регулярной прецессией; при этом мгновенные оси Oz и $O\eta$ описывают вокруг вертикали два круговых конуса.

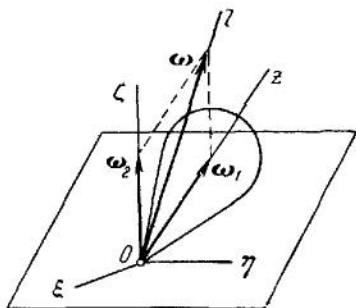
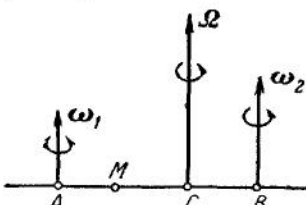


Рис. 138

Обычно наряду с обращением вокруг вертикали ось волчка совершает еще весьма малые и частые колебания около своего среднего положения (нутация). При этом волчок будет иметь еще одну угловую скорость ω_3 , направленную в каждый момент перпендикулярно к плоскости $zO\xi$, а его результирующая мгновенная угловая скорость $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ будет направлена по диагонали параллелепипеда, построенного на векторах $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.

2) *Мгновенные угловые скорости параллельны и направлены в одну и ту же сторону* (рис. 139). Очевидно, что в этом случае движение тела будет плоскопараллельным и скорости точек, расположенных на какой-либо прямой, параллельной мгновенным осям, будут в данный момент одинаковы; поэтому достаточно рассмотреть скорости точек, расположенных в какой-нибудь плоскости, перпендикулярной к ω_1 и ω_2 . Пусть эта плоскость пересекает плоскость осей (совпадающую с плоскостью рис. 139) по прямой AB . Скорости, которые любая точка M , лежащая на отрезке AB , получает

от мгновенных вращений с угловыми скоростями ω_1 , ω_2 , будут, очевидно, противоположны по направлению; по модулю же эти скорости равны соответственно $\omega_1 \cdot AM$ и $\omega_2 \cdot BM$. Поэтому одна из этих точек, а именно точка C , для которой выполняется равенство



$$\omega_1 \cdot AC = \omega_2 \cdot BC$$

или

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (6)$$

имеет скорость, равную нулю. То же самое имеет место и для всех точек, лежащих на прямой, проходящей через C и параллельной осям; эта прямая есть поэтому мгновенная ось вращения в результирующем движении.

Для определения мгновенной угловой скорости Ω результирующего движения удобно рассмотреть скорость одной из точек A или B . Например, для точки B мы имеем:

$$v_B = \omega_1 \cdot AB + \omega_2 \cdot 0 = \omega_1 \cdot AB,$$

а с другой стороны,

$$v_B = \Omega \cdot CB;$$

отсюда $\Omega \cdot CB = \omega_1 \cdot AB$ и, следовательно,

$$\Omega = \omega_1 \frac{AB}{CB} = \omega_1 \frac{AC + CB}{CB} = \omega_1 \left(\frac{AC}{CB} + 1 \right),$$

или, на основании (6),

$$\Omega = \omega_1 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + 1 \right) = \omega_1 + \omega_2. \quad (7)$$

Итак, результирующее движение будет мгновенным вращением с угловой скоростью $\Omega = \omega_1 + \omega_2$. Мгновенная угловая скорость Ω расположена в плоскости мгновенных угловых скоростей ω_1 , ω_2 слагаемых движений, параллельна им, направлена в ту же сторону и делит расстояние между ними внутренним образом на части, обратно пропорциональные модулям ω_1 , ω_2 .

3) Мгновенные угловые скорости антипараллельны, т. е. векторы ω_1 , ω_2 параллельны, но направлены в противоположные стороны (рис. 140). Так же как в предыдущем случае, построим плоскость, перпендикулярную к обоим мгновенным осям, и прямую AB , по которой эта плоскость пересекается с плоскостью осей.

Пусть $\omega_1 \neq \omega_2$, и положим для определенности $\omega_1 > \omega_2$. Для любой точки M , лежащей на продолжении отрезка AB за большей мгновенной угловой скоростью ω_1 , скорости, происходящие от мгновенных вращений с угловыми скоростями ω_1 , ω_2 , противо-

положны по направлению, а по модулю равны $\omega_1 \cdot MA$ и $\omega_2 \cdot MB$. Тогда одна из этих точек, а именно точка C , для которой

$$\omega_1 \cdot CA = \omega_2 \cdot CB$$

или

$$\frac{CA}{CB} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (8)$$

имеет скорость, равную нулю. Следовательно, прямая, параллельная ω_1 , ω_2 и проходящая через C , есть мгновенная ось вращения для результирующего движения. Если Ω есть мгновенная угловая скорость этого движения, то для точки B имеем:

$$v_B = \omega_1 \cdot AB = \Omega \cdot CB.$$

Отсюда

$$\Omega = \omega_1 \frac{AB}{CB} = \omega_1 \frac{CB - CA}{CB} = \omega_1 \left(1 - \frac{CA}{CB}\right),$$

или, на основании (8),

$$\Omega = \omega_1 \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = \omega_1 - \omega_2. \quad (9)$$

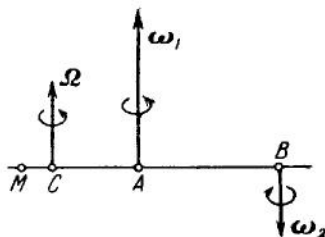


Рис. 140.

Итак, в случае, когда $\omega_1 \neq \omega_2$, результирующее движение есть мгновенное вращение с угловой скоростью, численно равной $\Omega = \omega_1 - \omega_2$; мгновенная угловая скорость Ω расположена в плоскости мгновенных угловых скоростей ω_1 , ω_2 слагаемых движений, параллельна им, направлена в сторону большей и делит расстояние между ними внешним образом на части, обратно пропорциональные модулям ω_1 , ω_2 .

4. Пара вращений. Совокупность двух мгновенных вращений вокруг параллельных осей с одинаковыми по модулю и противоположными по направлению угловыми скоростями образует пару мгновенных вращений или, как говорят для краткости, *пару вращений*. Угловые скорости ω_1 и ω_2 этих вращений, удовлетворяющие соотношениям

$$\omega_1 = -\omega_2, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad (10)$$

составляют пару мгновенных угловых скоростей (рис. 141).

Формулы (9) и (8) показывают, что в случае антипараллельных угловых скоростей в пределе при $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ результирующая угловая скорость стремится к нулю, а мгновенная ось результирующего движения уходит вместе с точкой C в бесконечность, так как в пределе

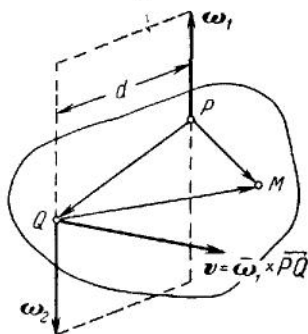


Рис. 141.

$AC \rightarrow BC$. Отсюда можно заключить, что результирующее движение не является вращательным.

Покажем, что пара вращений дает мгновенное поступательное движение или, иначе, что пара мгновенных угловых скоростей эквивалентна поступательной скорости. Действительно, обозначая через P и Q какие-нибудь две точки, взятые на мгновенных осях вращения, будем для любой точки M тела иметь (см. рис. 141):

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \omega_1 \times \overline{PM} + \omega_2 \times \overline{QM} = \omega_1 \times \overline{PM} - \omega_1 \times \overline{QM} = \\ &= \omega_1 \times (\overline{PM} - \overline{QM}) = \omega_1 \times \overline{PQ}. \end{aligned}$$

Итак, скорости всех точек тела в данный момент равны друг другу. Следовательно, пара мгновенных угловых скоростей действительно эквивалентна поступательной скорости

$$\mathbf{v} = \omega_1 \times \overline{PQ}. \quad (11)$$

Из (11) видно, что скорость \mathbf{v} результирующего поступательного движения перпендикулярна к плоскости пары ω_1, ω_2 и направлена так, что наблюдатель, глядящий с конца \mathbf{v} , видит векторы пары указывающими на вращение против хода стрелки часов. Расстояние d между мгновенными угловыми скоростями ω_1, ω_2 называется *плечом пары*. Модуль v численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах ω_1, ω_2 , т. е.

$$v = \omega d. \quad (12)$$

Вектор \mathbf{v} , определяемый равенством (11), называется *моментом пары*; так как он может быть приложен в любой точке тела, то это вектор свободный. Следовательно, пара мгновенных угловых скоростей эквивалентна мгновенной поступательной скорости, равной моменту этой пары.

Наоборот, всякая поступательная скорость \mathbf{v} может быть представлена в виде пары мгновенных угловых скоростей, плоскость которой перпендикулярна к \mathbf{v} , а плечо d и модули мгновенных угловых скоростей $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ удовлетворяют равенству (12).

Укажем еще на следующий результат. Если тело имеет в данный момент мгновенное вращение с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку A (рис. 142), то состояние движения не изменится, если в любой точке B приложить два вектора $\omega' = \omega$ и $-\omega' = -\omega$. Но векторы ω и $-\omega'$ образуют пару, эквивалентную поступательной скорости $\mathbf{v} = \omega \times \overline{AB}$. Следовательно, мгновенное вращение тела с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку A , эквивалентно мгновенному вращению с такой же угловой

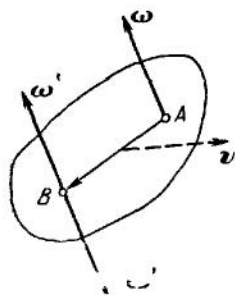


Рис 142.

скоростью $\omega' = \omega$ вокруг параллельной оси, проходящей через любую точку B , и поступательной скорости $v = \omega \times \overline{AB}$.

Пример. Движение велосипедной педали CD складывается из ее относительного вращения вокруг оси B , укрепленной на кривошипе AB , и переносного вращения кривошипа вокруг оси A (рис. 143). Угловые скорости ω_1 и ω_2 этих вращений по направлению противоположны, а по модулю одинаковы, так как в любой момент времени угол поворота φ_1 педали относительно кривошипа равен углу поворота φ_2 кривошипа. Таким образом, эти два вращения образуют пару, и в результате движение педали будет поступательным со скоростью $v = \omega_2 \cdot AB$.

Пример показывает, что пара вращений может быть эквивалентна не только мгновенному, но и перманентному поступательному движению.

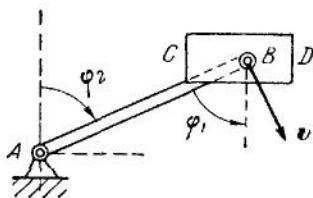


Рис. 143

5. Сложение мгновенных угловой и поступательной скоростей¹⁾. Пусть теперь твердое тело совершает относительно системы $Oxyz$ мгновенное вращение с угловой скоростью ω , а сама эта система совершает по отношению к неподвижной $\Omega\xi\eta\zeta$ поступательное движение со скоростью v (или наоборот, что в силу коммутативности мгновенных движений несущественно). Рассмотрим возможные частные случаи.

1) *Поступательная скорость перпендикулярна к мгновенной оси вращения* Aa (рис. 144). Заменим в этом случае мгновенную поступательную скорость v парой угловых скоростей $(\omega', -\omega')$, беря $\omega' = \omega$ (где ω — заданная угловая скорость) и располагая пару так, как показано на рисунке; при этом, согласно (12), плечо пары $d = v/\omega$. Тогда мгновенные вращения вокруг одной и той же оси с угловыми скоростями ω и $-\omega' = -\omega$ взаимно уничтожаются и останется только мгновенное вращение вокруг мгновенной оси Bb с угловой скоростью $\omega' = \omega$.

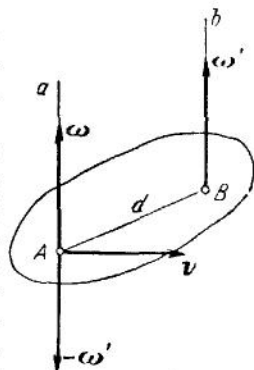


Рис. 144

Итак, при сложении мгновенного вращательного движения с угловой скоростью ω и поступательного движения со скоростью v , направленной перпендикулярно к ω , результирующее движение будет мгновенным вращением с такой же (по модулю и направлению) угловой скоростью ω , но вокруг мгновенной оси, смещенной в плоскости, перпендикулярной к вектору v , на величину $d = v/\omega$.

¹⁾ Во всех рассматриваемых ниже случаях поступательное движение может быть как мгновенным, так и стационарным.

Частный пример такого случая сложения движений дает плоскопараллельное движение твердого тела или движение плоской фигуры в ее плоскости, которое складывается из поступательного движения вместе с полюсом и вращательного движения вокруг полюса и эквивалентно в каждый момент времени мгновенному вращению с той же угловой скоростью вокруг мгновенного центра вращения.

2) *Поступательная скорость параллельна оси вращения.* В этом случае результирующее движение тела будет или перманентным, или мгновенным винтовым движением.

а) *Винтовое движение (перманентное).* Пусть движение тела складывается из равномерного вращения с угловой скоростью ω вокруг оси постоянного направления и равномерного прямолинейного поступательного движения со скоростью v , параллельной ω . Результирующее движение тела в этом случае называется перманентным винтовым или просто *винтовым движением*, а ось вращения — *осью винта*.

Любая точка M тела остается во время движения на поверхности круглого цилиндра, описывая винтовую линию (рис. 145, а). Если разрезать цилиндр по той образующей, на которой точка M находилась в момент $t = t_0$, и развернуть его поверхность на плоскость (рис. 145, б), то в течение первого оборота положение точки M на развертке будет определяться координатами

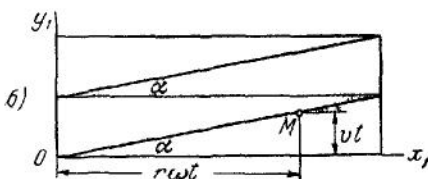
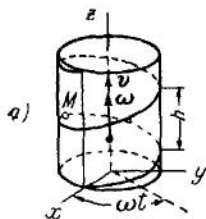


Рис. 145.

$$x_1 = r\omega t, \quad y_1 = vt,$$

где r есть расстояние точки от оси винта. Отсюда вытекает, что траектория точки M на развертке будет прямой линией, наклоненной к оси Ox под углом $\alpha = \arctg\left(\frac{v}{r\omega}\right)$.

Если в данный момент точка M находится на некоторой образующей, то через промежуток времени

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (13)$$

она вновь пересечет эту образующую, переместившись вдоль нее на расстояние

$$h = vT = \frac{2\pi v}{\omega}. \quad (14)$$

Расстояние h называется *шагом винта* и не зависит от r . Величину

$$p = \frac{v}{\omega} \quad (15)$$

называют *параметром винта*. Отметим, что для винта имеют место следующие соотношения:

$$h = 2\pi p, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{r} = \frac{h}{2\pi r}. \quad (16)$$

Скорость точки M по модулю равна

$$u = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}, \quad (17)$$

а направление ее составляет угол α с плоскостью, перпендикулярной к оси винта. Ускорение точки M направлено к оси винта (перпендикулярно к этой оси), а его модуль равен

$$w = r\omega^2. \quad (18)$$

б) Мгновенное винтовое движение. Если движение тела складывается из мгновенного вращения с угловой скоростью ω и поступательного движения со скоростью v , параллельной мгновенной угловой скорости ω , то результирующее движение представляет собою *мгновенное винтовое движение*, а ось этого винта называется *мгновенной винтовой осью*. Как и мгновенная ось вращения, мгновенная винтовая ось меняет с течением времени свое положение в пространстве и в самом движущемся теле. Параметр мгновенного винтового движения равен v/ω и будет вообще тоже величиною переменной.

3) *Поступательная скорость образует произвольный угол α с мгновенной осью вращения Aa* (рис. 146). Разложим поступательную скорость v на составляющие v' , v'' , направленные соответственно по заданной мгновенной угловой скорости ω и по перпендикуляру к ней. Очевидно, что

$$v' = v \cos \alpha, \quad v'' = v \sin \alpha.$$

Сложение мгновенной угловой скорости ω и перпендикулярной к ней поступательной скорости v'' дает, согласно случаю 1), вращение с угловой скоростью $\omega' = \omega$ вокруг новой мгновенной оси Bb , лежащей в плоскости, перпендикулярной к v'' ; при этом расстояние между осями Aa и Bb будет равно

$$d = \frac{v''}{\omega} = \frac{v}{\omega} \sin \alpha.$$

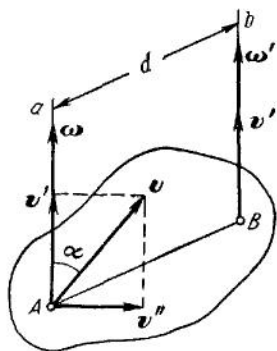


Рис. 146.

В результате тело будет иметь мгновенную угловую скорость $\omega' = \omega$, направленную вдоль оси Bb , и параллельную ей поступательную скорость v' , которые, слагаясь, дают мгновенное винтовое движение с параметром

$$p = \frac{v'}{\omega} = \frac{v}{\omega} \cos \alpha.$$

Итак, результирующее движение будет в рассмотренном случае мгновенным винтовым движением вокруг оси Bb , параллельной ω и отстоящей от оси Aa на расстоянии d .

§ 6. Приведение системы скользящих векторов. Главный вектор и главный момент. Наиболее общим случаем сложного движения твердого тела будет тот, когда тело одновременно участвует в k мгновенных вращениях с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ и m мгновенных поступательных движениях со скоростями v_1, v_2, \dots, v_m . Но каждую поступательную скорость можно представить как пару мгновенных угловых скоростей; следовательно, рассматриваемый общий случай сводится к сложению одних только мгновенных угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$.

Так как угловая скорость есть вектор скользящий, то этот вопрос представляет собой в свою очередь частный случай более общей задачи о приведении системы скользящих векторов к простейшим элементам. Рассмотрим эту задачу, понимая в дальнейшем под ω любой скользящий вектор.

Лемма. Всякий скользящий вектор ω , приложенный в точке A , можно, не изменяя его действия, перенести в любую точку B ,

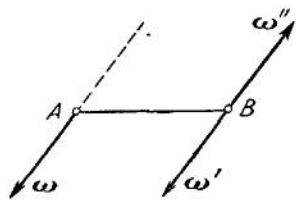


Рис. 147.

прибавив при этом пару с моментом, равным моменту приложенного в точке A вектора ω относительно точки B . Действительно, пусть в точке A приложен вектор ω (рис. 147). Приложим в точке B два взаимно противоположных вектора $\omega' = \omega$ и $\omega'' = -\omega$. Эти векторы в сумме дают нуль и, следовательно, не изменяют действия вектора ω .

Но полученную систему трех векторов $\omega, \omega', \omega''$ можно рассматривать как вектор $\omega' = \omega$, приложенный в точке B , и пару (ω, ω'') , момент которой будет:

$$\text{мом}(\omega, \omega'') = \overline{BA} \times \omega = \text{мом}_B \omega. \tag{19}$$

Тем самым лемма доказана.

Рассмотрим теперь систему скользящих векторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, расположенных как угодно в пространстве. Будем переносить эти векторы в произвольно выбранную точку O , прибавляя при этом, согласно только что доказанной лемме, соответствующие пары. Этот

процесс называется приведением системы скользящих векторов к данному центру O ; точка O носит название *центра приведения*. Переноса какой-либо вектор ω_i , приложенный в точке A_i , в центр O , мы получим вектор $\omega'_i = \omega_i$, приложенный в точке O , и пару, момент которой, согласно (19), будет равен

$$\text{мом}_O \omega_i = r_i \times \omega_i,$$

где $r_i = \overline{OA_i}$ (рис. 148). Этот момент, как свободный вектор, мы можем приложить в той же точке O . Таким образом, после перенесения в центр O всех векторов ω_i мы получим в точке O две системы векторов: систему векторов ω'_i и систему векторов $r_i \times \omega_i$.

Складывая векторы ω'_i и учитывая, что $\omega'_i = \omega_i$, получим вектор

$$\Omega = \sum_i \omega_i, \quad (20)$$

называемый *главным вектором* данной системы скользящих векторов. Складывая же векторы $r_i \times \omega_i$, получим вектор

$$v = \sum_i (r_i \times \omega_i), \quad (21)$$

называемый *главным моментом* данной системы скользящих векторов. Итак, в результате приведения системы скользящих векторов к центру O , мы получаем следующие элементы приведения: один скользящий вектор, равный главному вектору системы Ω , и один свободный вектор, равный главному моменту v системы относительно центра O (рис. 149). При этом главный вектор Ω равен сумме всех векторов системы, а главный момент v равен сумме моментов всех векторов системы относительно центра O [формулы (20) и (21)].

✓ 7. **Изменение центра приведения. Инварианты системы скользящих векторов.** Приведем теперь рассматриваемую систему скользящих векторов $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ к другому центру O' (рис. 150). Тогда, согласно равенствам (20) и (21), получим следующие элементы приведения:

$$\Omega' = \sum_i \omega_i \quad \text{и} \quad v' = \sum_i (r'_i \times \omega_i),$$

где $r'_i = \overline{O'A_i}$. Очевидно, что

$$\Omega' = \Omega, \quad (22)$$

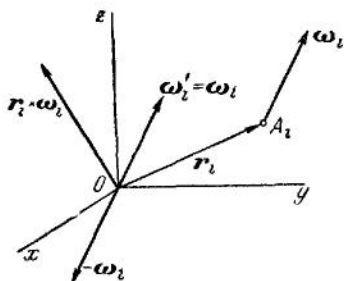


Рис. 148.

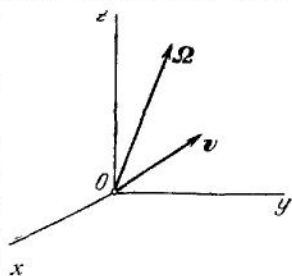


Рис. 149.

т. е. что главный вектор не изменяется при изменении центра приведения; поэтому главный вектор является инвариантом системы скользящих векторов относительно перемены центра приведения.

Главный момент системы

$$\mathbf{v}' = \sum_i (\mathbf{r}'_i \times \boldsymbol{\omega}_i)$$

зависит от выбора центра приведения. В самом деле, так как $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \overline{O'O} = \mathbf{r}_i + \overline{O'O}$ (см. рис. 150), то

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \sum_i [(\mathbf{r}_i + \overline{O'O}) \times \boldsymbol{\omega}_i] = \\ &= \sum_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) + \overline{O'O} \times \sum_i \boldsymbol{\omega}_i; \end{aligned}$$

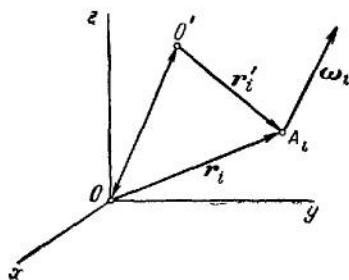


Рис. 150.

но, согласно (21) и (20), $\sum_i (\mathbf{r}_i \times \boldsymbol{\omega}_i) = \mathbf{v}$, $\sum_i \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\Omega}$, следовательно,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \overline{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (23)$$

т. е. главный момент изменяется при изменении центра приведения на величину $\overline{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}$, которая представляет собой, очевидно, момент главного вектора $\boldsymbol{\Omega}$, приложенного в точке O , относительно нового центра приведения O' .

Покажем, что вторым инвариантом системы скользящих векторов будет скалярное произведение главного вектора на главный момент,

т. е. величина

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} = v\Omega \cos(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}). \quad (24)$$

Действительно, на основании (22) и (23) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\Omega}' &= (\mathbf{v} + \overline{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = \\ &= \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega} + (\overline{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Omega}. \end{aligned}$$

Но так как смешанное произведение $(\overline{O'O} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, то величина

$$\mathbf{v}' \cdot \boldsymbol{\Omega}' = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

не зависит от выбора центра приведения и поэтому будет инвариантна по отношению к изменению последнего.

Вследствие инвариантности $\boldsymbol{\Omega}$ за второй инвариант системы, как видно из (24), можно принимать величину

$$v \cos(\mathbf{v}, \boldsymbol{\Omega}), \quad (25)$$

т. е. проекцию главного момента на направление главного вектора (рис. 151). Так как для любого центра приведения величина (25)

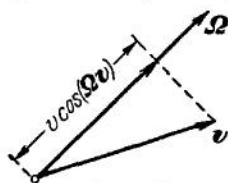


Рис. 151.

остается неизменной, то, очевидно, главный момент системы имеет наименьшее значение в том случае, когда его направление совпадает с направлением главного вектора.

8. Винт. Центральная ось. Пусть данная система скользящих векторов ω_i приведена к центру O и для нее найдены Ω и \mathfrak{v} (рис. 152). Предположим далее, что найден такой центр приведения O^* , для которого главный момент \mathfrak{v}^* будет наименьшим и, следовательно, будет направлен по главному вектору $\Omega' = \Omega$. Тогда вся система векторов при приведении к центру O^* заменится скользящим вектором, равным Ω , и парой с моментом \mathfrak{v}^* , направленным вдоль Ω . Такая совокупность скользящего вектора Ω и пары с моментом \mathfrak{v}^* , параллельным Ω , называется *винтом*. Проходящая через точку O^* прямая, вдоль которой в этом случае направлен вектор Ω , называется *центральной осью* системы скользящих векторов. Очевидно, что все точки центральной оси будут обладать тем же свойством, что и точка O^* .

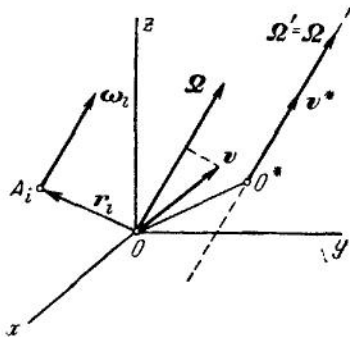


Рис. 152.

Найдем уравнение центральной оси. Это уравнение мы получим, написав условие коллинеарности векторов Ω и \mathfrak{v}^* , т. е. полагая:

$$\frac{\mathfrak{v}^*}{\Omega} = p, \quad (26)$$

где p есть постоянный скаляр, называемый параметром винта. Так как, согласно (23), $\mathfrak{v}^* = \mathfrak{v} + \overline{O^*O} \times \Omega$ (см. рис. 152), то уравнение центральной оси в векторной форме будет:

$$\frac{\mathfrak{v} - \overline{OO^*} \times \Omega}{\Omega} = p. \quad (27)$$

Вводя проекции векторов

$$\mathfrak{v} (\mathfrak{v}_x, \mathfrak{v}_y, \mathfrak{v}_z), \quad \overline{OO^*} (x^*, y^*, z^*), \quad \Omega (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z),$$

найдем из (27) уравнение центральной оси в осях $Oxuz$ прямоугольной декартовой системы координат

$$\frac{\mathfrak{v}_x - (y^*\Omega_z - z^*\Omega_y)}{\Omega_x} = \frac{\mathfrak{v}_y - (z^*\Omega_x - x^*\Omega_z)}{\Omega_y} = \frac{\mathfrak{v}_z - (x^*\Omega_y - y^*\Omega_x)}{\Omega_z}, \quad (28)$$

где x^* , y^* , z^* — текущие координаты оси. Из уравнений (27) или (28) ясно, что центральная ось параллельна вектору Ω .

9. Общий случай сложения мгновенных движений тела. Как было указано в начале п. 6, в наиболее общем случае сложного движения тела определенное результирующее движение сводится к сложению мгновенных вращений вокруг произвольно расположенных осей. Пусть твердое тело участвует одновременно в n таких мгновенных вращениях с угловыми скоростями $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. Приводя систему скользящих векторов ω_i к какому-либо центру O (рис. 153),

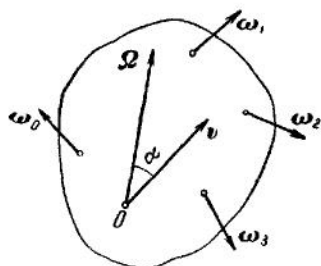


Рис. 153.

мы заменим их одной результирующей мгновенной угловой скоростью Ω , равной главному вектору этой системы,

$$\Omega = \sum \omega_i$$

и одной поступательной скоростью v , равной главному моменту этой системы,

$$v = \sum_i (r_i \times \omega_i) = \sum_i \text{мом}_O \omega_i.$$

Складывая затем поступательную скорость v с мгновенной угловой скоростью Ω , получим (см. п. 5, рис. 146) мгновенное винтовое движение (*мгновенный винт*) с параметром (см. рис. 153)

$$p = \frac{v \cos \alpha}{\Omega};$$

ось этого винта будет, очевидно, центральной осью системы векторов ω_i .

Таким образом, самый общий случай сложного движения тела приводится к мгновенному винтовому движению около некоторой мгновенной винтовой оси. Поэтому винтовое движение есть самый общий вид движения твердого тела.

Непрерывное движение тела будет слагаться из серии мгновенных винтовых движений вокруг мгновенных винтовых осей, которые будут изменять свое направление в пространстве и в самом теле, образуя соответственно *неподвижный* и *подвижный винтовые аксоиды*. Эти аксоиды будут неразвертывающимися линейчатыми поверхностями, которые при движении твердого тела, касаясь друг друга по образующей, будут катиться одна по другой со скольжением вдоль мгновенной винтовой оси; поэтому иногда эту ось называют *мгновенной осью вращения и скольжения* (см. еще § 12, п. 1).

Если параметр мгновенного винта p равен нулю (т. е. если поступательная скорость по оси вращения есть нуль), то мгновенная винтовая ось обращается в мгновенную ось вращения, а результирующее движение тела будет мгновенным вращением.

§ 12. Движение свободного твердого тела

1. Теорема Шаля для движения свободного твердого тела.

В предыдущем параграфе рассматривалось сложное движение тела, слагавшееся из движения по отношению к одной системе отсчета, которая в свою очередь перемещалась по отношению к другой и т. д., при этом каждое из составных движений было мгновенным вращательным или поступательным движением. Результирующее движение в самом общем случае оказалось мгновенным винтовым.

Сейчас мы рассмотрим самый общий случай движения твердого тела по отношению к *одной* фиксированной (основной) системе отсчета. Таким движением является движение свободного твердого тела. Это движение, оказывается, тоже будет слагаться из серии мгновенных винтовых движений. К такому выводу приводит теорема Шаля, которая по отношению к свободному телу играет ту же роль, что и теорема Эйлера — Даламбера по отношению к твердому телу, имеющему неподвижную точку (§ 10, п. 1), и которая нами уже была рассмотрена для случая плоскопараллельного движения (§ 9, п. 2).

Теорема Шаля состоит в следующем: *всякое перемещение свободного твердого тела из одного положения в другое может быть получено посредством поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс.*

Пусть мы имеем твердое тело, положение которого по отношению к системе отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$ определяется тремя точками A, B, C (рис. 154, а), и пусть это тело переместилось так, что точки $A,$

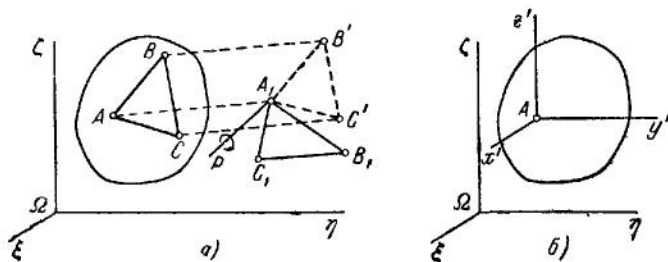


Рис. 154.

B, C заняли положения A_1, B_1, C_1 . Нам нужно показать, что тело может быть переведено из первого положения во второе посредством поступательного перемещения и поворота. Для этого переместим сначала тело поступательно так, чтобы точка A (полюс) совпала с точкой A_1 , тогда треугольник ABC займет положение $A_1B'C'$, причем $A_1B' \parallel AB, B'C' \parallel BC, C'A_1 \parallel CA$. Остается совместить

точки B' с B_1 и C' с C_1 . Но это мы можем сделать, согласно теореме Эйлера — Даламбера, посредством поворота тела вокруг некоторой оси A_1P , проходящей через точку A_1 . Итак, любое перемещение свободного твердого тела может быть действительно осуществлено путем поступательного перемещения и вращения.

При этом, как видно из рисунка, поступательная часть перемещения зависит от выбора полюса (при полюсе A это перемещение определяется вектором $\overline{AA_1}$, а при полюсе B — вектором $\overline{BB_1} \neq \overline{AA_1}$ и т. д.); вращательная же часть перемещения, как и в случае плоскопараллельного движения, от выбора полюса не зависит.

Проведем через полюс A координатные оси $Axuz$, которые будут перемещаться вместе с полюсом поступательно (рис. 154, б). Тогда теорема Шаля, по существу, утверждает, что любое перемещение свободного тела по отношению к осям $\Omega\xi\eta\zeta$ складывается из вращательного перемещения вокруг точки A по отношению к осям $Ax'y'z'$ и поступательного перемещения вместе с осями $Ax'y'z'$ по отношению к осям $\Omega\xi\eta\zeta$. В § 11 было показано, что в случае мгновенных перемещений такие два движения, слагаясь, дают мгновенное винтовое движение. Можно доказать, что аналогичный результат имеет место и для конечных перемещений. Поэтому теорема Шаля допускает еще следующую формулировку: *всякое перемещение свободного твердого тела может быть осуществлено одним винтовым движением около некоторой винтовой оси, называемой осью конечного винтового перемещения.*

Полученные результаты позволяют представить картину движения свободного твердого тела как непрерывную последовательность элементарных перемещений одним из следующих двух способов. Из первой формулировки теоремы Шаля вытекает, что движение свободного твердого тела можно рассматривать как слагающееся из поступательного движения, определяемого движением произвольно выбранного полюса, и из вращательного движения вокруг этого полюса, как вокруг неподвижной точки. В свою очередь движение вокруг неподвижной точки представляет собой непрерывную последовательность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку.

По второй из этих формулировок всякое элементарное перемещение тела представляет собой мгновенное винтовое движение вокруг соответствующей мгновенной винтовой оси. Поэтому движение свободного твердого тела можно еще представить как непрерывную последовательность мгновенных винтовых движений. Геометрические места мгновенных винтовых осей в пространстве, связанном с неподвижной системой отсчета, и в самом движущемся теле образуют две линейчатые поверхности, называемые соответственно *неподвижным* и *подвижным винтовыми аксоидами*; так как две соседние (бесконечно близкие) мгновенные винтовые оси не могут

пересекаться, то эти поверхности будут неразвертывающимися. При движении тела подвижный винтовой аксоид катится по неподвижному, имея с ним в каждый данный момент времени общую образующую, являющуюся для этого момента мгновенной винтовой осью, и одновременно проскальзывает вдоль этой образующей. Такое качение с продольным скольжением и дает последовательность мгновенных винтовых движений. Отсюда следует, что геометрическую картину движения свободного тела в общем случае можно получить, если жестко связать это тело с подвижным винтовым аксоидом и катить этот аксоид со скольжением вдоль образующих по соответствующему неподвижному аксоиду.

Примером такого качения со скольжением может служить движение однополостного гиперболоида по другому такому же неподвижному гиперболоиду при условии, что эти гиперболоиды во все время движения касаются друг друга по образующей, которая и будет мгновенной винтовой осью (рис. 155).

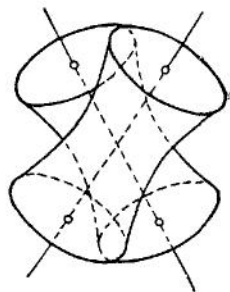


Рис. 155.

В соответствующих частных случаях аксоиды могут быть коническими поверхностями (при движении тела около неподвижной точки) или цилиндрическими (при плоскопараллельном движении). В этих случаях качение аксоидов происходит без скольжения.

2. Скорости точек свободного твердого тела. Рассмотрим свободное твердое тело, которое движется относительно основной (неподвижной) системы отсчета $\Omega\xi\eta\zeta$. Возьмем подвижную систему координат $Axyz$ с началом в произвольной точке A , неизменно связанную с твердым телом. Обозначим радиус-вектор точки A через $\rho_A(\xi_A, \eta_A, \zeta_A)$, радиус-вектор любой точки M тела относительно неподвижной системы через $\rho(\xi, \eta, \zeta)$, а относительно подвижной—через $r(x, y, z)$ (рис. 156).

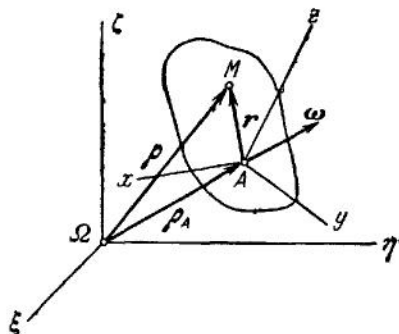


Рис. 156.

Согласно теореме Шаля, движение тела мы можем рассматривать составленным из поступательного движения вместе с полюсом A и движения тела около точки A как неподвижной. Поэтому скорость какой-либо точки M тела будет равна сумме двух скоростей: 1) скорости от поступательного движения, равной скорости $v_A = d\rho_A/dt$ точки A , и 2) скорости от движения около точки A как неподвижной,

которая, согласно формуле (2) § 10, равна $\omega \times r$, где ω — мгновенная угловая скорость тела. Следовательно,

$$v = v_A + \omega \times r = \frac{d\rho_A}{dt} + \omega \times r. \quad (1)$$

Другим путем это равенство можно еще получить так, как это сделано в § 9, п. 5.

Если принять во внимание, что $r = \rho - \rho_A$, то формулу (1) можно еще представить в виде

$$v = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_A}{dt} + \omega \times (\rho - \rho_A). \quad (2)$$

Обозначим проекции мгновенной угловой скорости ω на подвижные и неподвижные оси соответственно через p, q, r и p_1, q_1, r_1 . Тогда, проектируя обе части равенства (2) на оси системы $\Omega\xi\eta\zeta$, получим проекции скорости точки M на неподвижные оси:

$$\left. \begin{aligned} v_\xi &= \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi_A}{dt} + q_1(\zeta - \zeta_A) - r_1(\eta - \eta_A), \\ v_\eta &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta_A}{dt} + r_1(\xi - \xi_A) - p_1(\zeta - \zeta_A), \\ v_\zeta &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta_A}{dt} + p_1(\eta - \eta_A) - q_1(\xi - \xi_A). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Проектируя же на оси системы $Oxyz$ обе части равенства (1), найдем проекции скорости точки M на подвижные оси:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{Ax} + qz - ry, \\ v_y &= v_{Ay} + rx - pz, \\ v_z &= v_{Az} + py - qx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Входящие сюда величины v_{Ax}, v_{Ay}, v_{Az} (проекции вектора v_A на оси x, y, z) могут быть вычислены по формулам:

$$\left. \begin{aligned} v_{Ax} &= \frac{d\xi_A}{dt} (11) + \frac{d\eta_A}{dt} (12) + \frac{d\zeta_A}{dt} (13), \\ v_{Ay} &= \frac{d\xi_A}{dt} (21) + \frac{d\eta_A}{dt} (22) + \frac{d\zeta_A}{dt} (23), \\ v_{Az} &= \frac{d\xi_A}{dt} (31) + \frac{d\eta_A}{dt} (32) + \frac{d\zeta_A}{dt} (33), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где (ik) ($i, k = 1, 2, 3$) суть косинусы углов между осями подвижного и неподвижного трехгранников, определяемые таблицей на стр. 93.

3. Ускорения точек свободного твердого тела. Скорость любой точки M свободного твердого тела определяется формулой (1)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}_A}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по t и учитывая, что $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, получим (см. § 10, п. 5):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{p}_A}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (6)$$

или

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_A + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \omega^2 \mathbf{r}. \quad (7)$$

Проектируя обе части равенства (7) на оси подвижного трехгранника $Axyz$, получим проекции ускорения на подвижные оси¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w_{Ax} + \frac{dq}{dt} z - \frac{dr}{dt} y + (px + qy + rz) p - \omega^2 x, \\ w_y &= w_{Ay} + \frac{dr}{dt} x - \frac{dp}{dt} z + (px + qy + rz) q - \omega^2 y, \\ w_z &= w_{Az} + \frac{dp}{dt} y - \frac{dq}{dt} x + (px + qy + rz) r - \omega^2 z, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где w_{Ax} , w_{Ay} , w_{Az} — проекции вектора \mathbf{w}_A на оси x , y , z . Положив в формуле (7) $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A$, получим выражение ускорения точки M в виде

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}_A}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A) + \boldsymbol{\omega} [\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A)] - \omega^2 (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_A). \quad (9)$$

Проектируя обе части этого равенства на оси неподвижного трехгранника $\Omega\xi\eta\zeta$, найдем проекции ускорения на неподвижные оси:

$$\left. \begin{aligned} w_\xi &= \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2\xi_A}{dt^2} + \frac{dq_1}{dt} (\zeta - \zeta_A) - \frac{dr_1}{dt} (\eta - \eta_A) + \\ &\quad + [p_1 (\xi - \xi_A) + q_1 (\eta - \eta_A) + r_1 (\zeta - \zeta_A)] p_1 - \omega^2 (\xi - \xi_A), \\ w_\eta &= \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d^2\eta_A}{dt^2} + \frac{dr_1}{dt} (\xi - \xi_A) - \frac{dp_1}{dt} (\zeta - \zeta_A) + \\ &\quad + [p_1 (\xi - \xi_A) + q_1 (\eta - \eta_A) + r_1 (\zeta - \zeta_A)] q_1 - \omega^2 (\eta - \eta_A), \\ w_\zeta &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \frac{d^2\zeta_A}{dt^2} + \frac{dp_1}{dt} (\eta - \eta_A) - \frac{dq_1}{dt} (\xi - \xi_A) + \\ &\quad + [p_1 (\xi - \xi_A) + q_1 (\eta - \eta_A) + r_1 (\zeta - \zeta_A)] r_1 - \omega^2 (\zeta - \zeta_A). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

¹⁾ Справедливость равенств $\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_x = \frac{dp}{dt}$ и т. д. обоснована в сноске на стр. 161.

4. Уравнение мгновенной винтовой оси. Уравнение мгновенной винтовой оси получим, исходя из того, что эта ось есть геометрическое место точек, направление скоростей которых в данный момент совпадает с направлением вектора ω . В векторной форме условие коллинеарности v и ω будет:

$$v = \tilde{p}\omega, \quad (11)$$

где \tilde{p} — скалярная величина, представляющая собой параметр мгновенного винта. Умножая числитель и знаменатель левой части предыдущего уравнения скалярно на ω , получим для \tilde{p} выражение

$$\tilde{p} = \frac{v \cdot \omega}{\omega^2} = \frac{v \cos(\omega, v)}{\omega},$$

где $v \cos(\omega, v)$ представляет собой, очевидно, составляющую скорости, параллельную ω . Проектируя обе части равенства (11) на неподвижные оси и принимая во внимание формулы (3), получим уравнение мгновенной винтовой оси в неподвижных осях координат:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d\xi_A}{dt} + q_1(\xi - \xi_A) - r_1(\eta - \eta_A)}{p_1} &= \frac{\frac{d\eta_A}{dt} + r_1(\xi - \xi_A) - p_1(\xi - \xi_A)}{q_1} = \\ &= \frac{\frac{d\xi_A}{dt} + p_1(\eta - \eta_A) - q_1(\xi - \xi_A)}{r_1} = \tilde{p}. \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнение мгновенной винтовой оси относительно подвижных осей найдется аналогичным путем с помощью равенств (4) в виде

$$\frac{v_{Ax} + qz - ry}{p} = \frac{v_{Ay} + rx - pz}{q} = \frac{v_{Az} + py - qx}{r} = \tilde{p}. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (12) и (13) время, входящее через проекции векторов ρ_A (или v_A) и ω , получим соответственно уравнения неподвижного и подвижного аксоидов.

§ 13. Сложное движение точки

1. Основные понятия. Пусть точка движется относительно некоторой подвижной системы отсчета $Oxuz$, которая в свою очередь перемещается по отношению к основной (неподвижной) системе $\Omega\xi\eta\zeta$. Тогда движение, скорость и ускорение точки, рассматриваемые по отношению к системе $Oxuz$, называются относительными, а по отношению к системе $\Omega\xi\eta\zeta$ — абсолютными (см. § 6, п. 15). Разумеется, что термин «абсолютный» есть лишь способ выражения, обозначающий, что соответствующие величины отнесены к системе $\Omega\xi\eta\zeta$, являющейся основной (в этом же условном смысле основную систему называют неподвижной).

Движение подвижной системы $Oxyz$ по отношению к неподвижной $O\xi\eta\zeta$ является для движущейся точки переносным движением, а скорость и ускорение той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, в которой в данный момент находится движущаяся точка, называются переносными. Иным образом переносную скорость и переносное ускорение можно в каждый момент времени представить себе как ту скорость и то ускорение, которые движущаяся точка имела бы в данный момент, если она начиная с этого момента оказалась бы жестко связанной с подвижной системой (т. е. не совершала относительного движения).

Для решения ряда задач механики необходимо установить зависимости между скоростями и ускорениями точки по отношению к подвижной и неподвижной системам отсчета. Для скоростей эта зависимость уже была найдена геометрически (§ 6, п. 15) и имеет вид

$$v_a = v_r + v_e. \quad (1)$$

Соответствующую зависимость для ускорений получим, используя понятие об относительной производной вектора.

2. Полная и относительная производные от вектора. Пусть подвижная $Oxyz$ и неподвижная $O\xi\eta\zeta$ системы отсчета имеют общее начало O , и пусть ω — мгновенная угловая скорость подвижной системы $Oxyz$ по отношению к неподвижной (рис. 157). Рассмотрим точку M , совершающую движение, которое не зависит от движения триэдра $Oxyz$. Ее радиус-вектор $r = \overline{OM}$ будет, очевидно, с течением времени изменяться в каждой из систем отсчета по разным законам. Тогда за некоторый промежуток времени Δt вектор r получит по отношению к осям $O\xi\eta\zeta$ и $Oxyz$ разные приращения, которые мы соответственно обозначим через Δr и $\tilde{\Delta}r$.

Пределы отношений Δr и $\tilde{\Delta}r$ к Δt при $\Delta t \rightarrow 0$ дадут соответственно производные

$$\frac{dr}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{d}r}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\Delta}r}{\Delta t}. \quad (2)$$

Производную $\frac{dr}{dt}$ будем называть «абсолютной» или «полной», а производную $\frac{\tilde{d}r}{dt}$ — «относительной» или «локальной». Найдем зависимость между этими производными. С этой целью обратимся к их

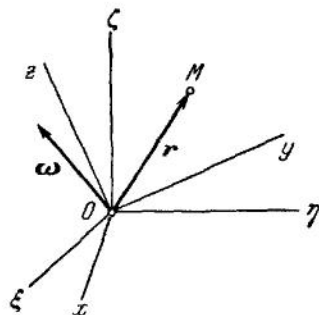


Рис. 157.

кинематическому смыслу. Из определений относительной \mathbf{v}_r и абсолютной \mathbf{v}_a скоростей следует, что

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_r, \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_a. \quad (3)$$

Но, согласно (1), $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e$, где переносная скорость \mathbf{v}_e есть скорость той неизменно связанной с триэдром $Oxyz$ точки пространства, в которой в данный момент находится точка M . Тогда по формуле Эйлера $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ и равенство (1) дает:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (4)$$

Так как всякий вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, заданный как непрерывная и дифференцируемая функция времени, можно рассматривать как радиус-вектор некоторой точки (конца этого вектора), то полная и локальная производные любого вектора $\mathbf{a}(t)$ будут связаны тем же соотношением

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (5)$$

Если воспользоваться проекциями, то локальная производная любого вектора \mathbf{a} относительно системы $Oxyz$ может быть определена как вектор, проекции которого на оси этой системы равны производным от проекции вектора \mathbf{a} на те же оси.

Дадим другое доказательство справедливости формулы (5). Пусть, как всегда, \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} суть единичные координатные векторы подвижного триэдра $Oxyz$; тогда

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}.$$

Дифференцируя по времени, получим:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k} \right) + \left(a_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \right). \quad (6)$$

Первые три члена справа дают локальную производную

$$\frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt}, \quad (7)$$

так как они представляют собой производную вектора \mathbf{a} при условии, что \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} постоянны. Производные единичных векторов суть скорости их концов, т. е. скорости точек неизменяемой системы, которой является триэдр $Oxyz$. Следовательно, по формуле Эйлера

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}. \quad (8)$$

Равенства (8) называют еще формулами Пуассона. Тогда из выражения (6) находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{a}}{dt} &= \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + a_x \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} + a_y \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} + a_z \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \\ &= \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (5')$$

Заметим, что формула (5) сохраняет свой вид и в том случае, когда трехгранник $Oxyz$, кроме вращения вокруг точки O , совершает еще и поступательное движение, т. е. перемещается как свободное твердое тело. В самом деле, от поступательного перемещения триэдра $Oxyz$ единичные векторы его осей \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} не изменяются, следовательно, формулы Пуассона (8) сохраняют свой вид и равенство (6) опять приводит к соотношению (5).

Рассмотрим частные случаи.

1) Если система $Oxyz$ неподвижна, то

$$\boldsymbol{\omega} = 0, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad 1). \quad (9)$$

2) Если вектор \mathbf{a} неподвижен по отношению к основной системе $\Omega\xi\eta\zeta$, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (10)$$

3) Если вектор \mathbf{a} неизменно связан с триэдром $Oxyz$, то

$$\frac{\tilde{d}\mathbf{a}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (11)$$

т. е., как и должно быть, скорость конца \mathbf{a} определяется в этом случае как скорость точки твердого тела, скрепленного с триэдром $Oxyz$.

К случаю второму относится вычисление относительных производных от единичных координатных векторов ξ^0 , η^0 , ζ^0 неподвижной системы $O\xi\eta\zeta$. По формуле (10) получим:

$$\frac{\tilde{d}\xi^0}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \xi^0, \quad \frac{d\eta^0}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \eta^0, \quad \frac{d\zeta^0}{dt} = -\boldsymbol{\omega} \times \zeta^0. \quad (12)$$

1) Равенство (9) имеет еще, очевидно, место в случае, когда $\mathbf{a} \parallel \boldsymbol{\omega}$. В частности, для самого вектора $\boldsymbol{\omega}$ по этой причине будет $\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ и, следовательно, $\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_x = \left(\frac{\tilde{d}\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)_x = \frac{dp}{dt}$ и т. д. Этот результат и использован при выводе формул (8) в § 12.

С помощью равенств (12) можно определить производные от косинусов углов между осями подвижного и неподвижного триэдров, которые заданы табличкой на стр. 93. По этой табличке проекции ξ^0 на оси $Oxuz$ равны (11), (21), (31); если p, q, r суть проекции ω на те же оси, то

$$\frac{d\xi^0}{dt} = -\omega \times \xi^0 = - \begin{vmatrix} i & j & k \\ p & q & r \\ (11) & (21) & (31) \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Разлагая по осям системы $Oxuz$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d(11)}{dt} &= (\dot{1}1) = -[q(31) - r(21)], \\ \frac{d(21)}{dt} &= (\dot{2}1) = -[r(11) - p(31)], \\ \frac{d(31)}{dt} &= (\dot{3}1) = -[p(21) - q(11)]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Из двух других равенств (12) аналогичным путем находятся формулы для производных остальных шести косинусов.

√ 3. Теорема о сложении ускорений. Пусть подвижная система $Oxuz$ движется относительно неподвижной $\Omega\xi\eta\zeta$ как свободное твердое тело. Обозначим скорость и ускорение начала (полюса) O по отношению к осям $\Omega\xi\eta\zeta$ через v_0 и w_0 , а мгновенную угловую скорость и угловое ускорение самого трехгранника $Oxuz$ по отношению к тем же осям $\Omega\xi\eta\zeta$ через ω и ε (рис. 158). Рассмотрим точку M , совершающую движение, которое вообще не зависит от движения системы $Oxuz$. Обозначим через ρ и r ее абсолютный и относительный радиусы-векторы, а через ρ_0 радиус-вектор точки O . Тогда в любой момент времени

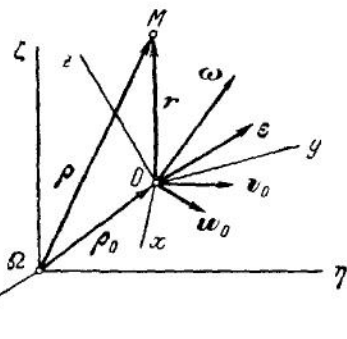


Рис. 158.

$$\rho = \rho_0 + r. \quad (15)$$

Возьмем от обеих частей этого равенства полную производную по времени. Учитывая формулы (5) и (3), будем иметь:

$$v_a = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho_0}{dt} + \frac{dr}{dt} = v_0 + \frac{\tilde{d}r}{dt} + \omega \times r = v_0 + \omega \times r + v_r. \quad (16)$$

Но по формуле (1) § 12 $v_0 + \omega \times r$ есть скорость той неизменно связанной с системой $Oxuz$ точки, в которой в данный момент на-

ходится точка M , следовательно, по определению это — переносная скорость, т. е.

$$\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_e. \quad (17)$$

В результате из (16) находим:

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e. \quad (18)$$

Таким образом, мы другим путем доказали теорему о сложении скоростей.

Беря теперь производные от обеих частей равенства (18), будем иметь:

$$\mathbf{w}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_e}{dt},$$

или, после замены \mathbf{v}_e его значением из (17),

$$\mathbf{w}_a = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_r}{dt}.$$

Применяя здесь формулу (5) к \mathbf{r} и \mathbf{v}_r , получим:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \right) + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r.$$

В этом выражении

$$\frac{d\mathbf{v}_O}{dt} = \boldsymbol{\omega}_O, \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \frac{\tilde{d}\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_r,$$

и его можно представить в виде

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\omega}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r$$

или, после приведения,

$$\mathbf{w} = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} + \boldsymbol{\omega}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r). \quad (19)$$

Рассмотрим, что представляют собой слагаемые, входящие в правую часть равенства (19). Величина

$$\boldsymbol{\omega}_r = \frac{\tilde{d}\mathbf{v}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (20)$$

есть по определению *относительное* ускорение (как локальная производная от относительной скорости по времени). Иным путем в этом можно убедиться, положив в (19) $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, $\boldsymbol{\omega}_O = 0$, т. е. считая оси $Oxuz$ неподвижными. Тогда полное ускорение точки M должно совпасть с относительным и мы придем к равенству (20).

Величина

$$\boldsymbol{\omega}_\varepsilon = \boldsymbol{\omega}_O + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (21)$$

есть переносное ускорение, так как, согласно формуле (6) § 12, она равна ускорению той неизменно связанной с системой $Oxuz$ точки, в которой в данный момент находится точка M . Иным путем это можно получить, положив в (19) $v_r = 0$, $w_r = 0$, т. е. считая, что точка M неизменно связана с системой $Oxuz$. Тогда ее полное ускорение совпадает с переносным и мы получим равенство (21).

Величина

$$w_c = 2\omega \times v_r, \quad (22)$$

которая не входит ни в относительное, ни в переносное ускорения, называется *поворотным* или *кориолисовым* ускорением.

В результате получаем следующую теорему о сложении ускорений или теорему Кориолиса: *абсолютное ускорение точки при сложном движении равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений*

$$w_a = w_r + w_e + w_c. \quad (23)$$

Если переносное движение (движение подвижной системы $Oxuz$) является *поступательным*, то $w_c = 0$, так как $\omega = 0$, и мы имеем:

$$w_a = w_r + w_e. \quad (24)$$

Следовательно, при поступательном переносном движении абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений.

Кориолисово ускорение появляется только тогда, когда подвижные оси при своем движении вращаются (отсюда термин «поворотное» ускорение). Как видно из хода доказательства, вектор w_c является суммой двух векторов $\omega \times v_r$. Один из них учитывает изменение вектора относительной скорости v_r при непоступательном переносном движении, а другой — изменение переносной скорости v_e при относительном перемещении точки (при изменении вектора r в относительном движении).

Если подвижная система отсчета движется поступательно, равномерно и прямолинейно, то $w_o = 0$, $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$ и, как видно из (21) и (22), $w_e = 0$ и $w_c = 0$, т. е. в этом случае относительное и абсолютное ускорения совпадают.

Отметим еще, что кориолисово ускорение может обращаться в нуль в данный момент времени, если в этот момент $\omega = 0$, или $v_r = 0$, или же $v_r \parallel \omega$.

В тех случаях, когда $w_c \neq 0$, его модуль, согласно (22), вычисляется по формуле

$$w_c = 2\omega v_r \sin(\widehat{\omega, v_r}), \quad (25)$$

а направление определяется как направление векторного произведения $\omega \times r$. Направление w_e можно еще найти, спроектировав вектор v_r на плоскость Π , перпендикулярную к ω , и повернув эту проекцию на 90° в сторону переносного вращения, что видно из рис. 159. Такой способ особенно удобен в случае плоского движения, когда v_r уже лежит в плоскости, перпендикулярной к ω .

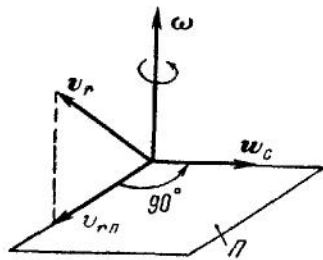


Рис. 159.

4. Примеры. При решении задач следует иметь в виду, что относительная скорость v_r и относительное ускорение w_r вычисляются обычными методами кинематики точки; при этом подвижная система отсчета рассматривается как основная (неподвижная). Переносная скорость v_e и переносное ускорение w_e вычисляются как скорость и ускорение той точки подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка. Поскольку подвижная система движется как абсолютно твердое тело, то вычисление v_e и w_e производится по формулам кинематики твердого тела. Наконец, кориолисово ускорение вычисляется по формулам (22) или (25).

1. Шар радиуса R (рис. 160, а) вращается вокруг оси OA по закону $\varphi = \varphi(t)$. Вдоль меридиана AB из полюса A движется точка M по закону

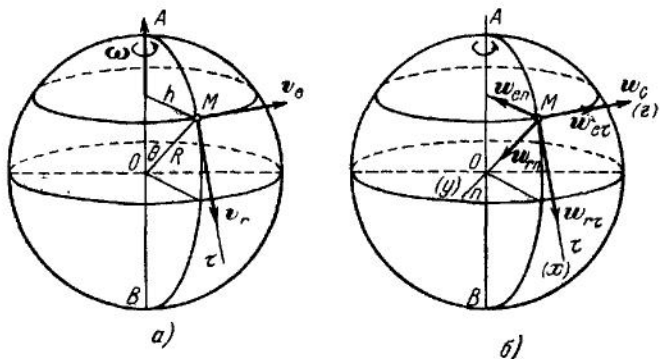


Рис. 160.

$s = s(t)$. Найдем абсолютные скорость и ускорение точки в произвольный момент времени t .

Абсолютная скорость точки M вычисляется по формуле (18). В данном случае численно $v_r = \dot{s}$, а направлен вектор v_r по касательной $M\tau$ к относительной траектории AB в сторону, определяемую знаком \dot{s} . Переносная скорость v_e равна скорости той точки поверхности шара, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M ; следовательно, $v_e = h\omega = h\dot{\varphi}$, где h — расстояние от точки M до оси вращения в рассматриваемый момент

времени, т. е. (см. рис. 160)

$$h = R \sin \theta = R \sin \left(\frac{s}{R} \right). \quad (a)$$

Направлен вектор v_e перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось z и точку M в сторону, определяемую знаком φ . Строя на векторах v_r и v_e параллелограмм, находим $v_a = v_r + v_e$. По модулю

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos(\widehat{v_r v_e})}.$$

В данном частном случае $v_r \perp v_e$ и последнее слагаемое под знаком радикала обращается в нуль.

Абсолютное ускорение точки M находим по формуле (23). При этом относительное ускорение вычисляем как сумму его касательной и нормальной составляющих: $w_r = w_{r\tau} + w_{rn}$, где составляющие $w_{r\tau}$ и w_{rn} направлены соответственно по касательной $M\tau$ и главной нормали Mn к траектории AB (рис. 160, б) и численно равны

$$w_{r\tau} = \frac{dv_r}{dt} = \ddot{s}, \quad w_{rn} = \frac{v_r^2}{\rho_r} = \frac{\dot{s}^2}{R}; \quad (б)$$

здесь ρ_r — радиус кривизны относительной траектории AB в той ее точке, где в данный момент находится точка M (в данном случае всюду $\rho_r = R$).

Переносное ускорение вычисляем как ускорение той точки поверхности шара, в которой в данный момент находится точка M . Следовательно, $w_e = w_{e\tau} + w_{en}$, где численно

$$w_{e\tau} = h\dot{\varepsilon} = h\ddot{\varphi}, \quad w_{en} = h\omega^2 = h\dot{\varphi}^2. \quad (в)$$

а h — расстояние точки M от оси вращения, определяемое равенством (а). Направлены векторы $w_{e\tau}$ и w_{en} соответственно по касательной и нормали к окружности, которую описывает точка поверхности шара, совпадающая в данный момент с движущейся точкой M . Величина кориолисова ускорения вычисляется по формуле (25)

$$w_c = 2\omega v_r \sin(\omega v_r) = 2\dot{\varphi} \dot{s} \cos \frac{s}{R}. \quad (г)$$

Направление w_c находится как направление векторного произведения $\omega \times v_r$. При показанных на рис. 145, а направлениях v_r и ω вектор w_c направлен так же, как вектор v_e .

Окончательно получаем:

$$w_a = w_{r\tau} + w_{rn} + w_{e\tau} + w_{en} + w_c \quad (д)$$

Чтобы найти модуль w_a , проводим через точку M какие-нибудь координатные оси $Mxuz$ (например, $M\tau nb$) и вычисляем проекции всех стоящих в правой части равенства (д) векторов на эти оси. Тогда

$$w_{ax} = \sum w_{ix}, \quad w_{ay} = \sum w_{iy}, \quad w_{az} = \sum w_{iz}$$

и

$$w_a = \sqrt{w_{ax}^2 + w_{ay}^2 + w_{az}^2}.$$

2. Вычислим с помощью теоремы Кориолиса ускорение точки, совершающей плоское движение, если это движение задано (в полярных координатах) уравнениями (см. § 6, п. 12)

$$r = r(t) \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi(t).$$

Будем рассматривать движение точки M как сложное, считая движение вдоль радиуса OM относительным, а вращение самого радиуса переносным (рис. 161). Тогда будет:

$$w_r = \ddot{r}, \quad w_{e\tau} = r \cdot \varepsilon = r\ddot{\varphi}, \quad w_{en} = r\omega^2 = r\dot{\varphi}^2, \quad (a)$$

$$w_c = 2\omega v_r = 2\dot{\varphi}r$$

и

$$w = w_r + w_{e\tau} + w_{en} + w_c \quad (б)$$

Так как движение является плоским, то направление w_c сразу находится поворотом вектора v_r на 90° в сторону переносного вращения, т. е. в данном случае против хода часовой стрелки (рисунок соответствует случаю, когда $\dot{r} > 0$, $\dot{\varphi} > 0$); направления остальных векторов показаны в предположении, что $\ddot{r} > 0$ и $\ddot{\varphi} > 0$. Проектируя обе части равенства (б) на радиус-вектор \overline{OM} и перпендикулярное к нему направление MP , найдем радиальную и тангенциальную проекции ускорения

$$w_{\text{рад}} = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_{\text{тр}} = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (в)$$

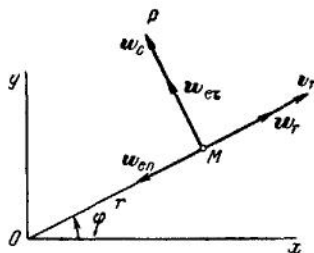


Рис. 161.

РАЗДЕЛ II

СТАТИКА

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ (ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ) СТАТИКА

§ 14. Введение в кинетику

1. Сила и масса. В то время как в кинематике движение тел изучают с геометрической точки зрения, рассматривая изменение их положения относительно определенной системы отсчета и принимая во внимание время, в течение которого это изменение происходит, вторая часть механики — кинетика — посвящена изучению движения материальных тел в зависимости от факторов, обуславливающих характер или закон рассматриваемого движения. Эти факторы зависят как от тел, окружающих данное тело, так и от свойств самого тела.

Влияние окружающих тел заключается в том, что они взаимодействуют с данным телом, изменяя его движение (или вызывая деформации тела). Это взаимодействие может происходить как путем непосредственного соприкосновения, так и на расстоянии (с точки зрения классической механики Галилея — Ньютона); его эффект зависит от свойств взаимодействующих тел и от их расположения в пространстве. Величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел, называется в механике *силой*.

Кроме внешних воздействий, т. е. сил, движение любого материального тела определяется еще его *инертностью*, или инерцией, являющейся одним из основных свойств материи. Это свойство проявляется в способности тела сохранять свое движение при отсутствии сил и изменять его под действием сил не сразу, а постепенно, тем медленнее, чем больше вещества (материи) содержится в теле. Таким образом, чем больше вещества заключено в теле, тем больше его инерция. Величина, являющаяся мерой инерции тела, называется *массой* этого тела.

Сила и масса представляют собой основные понятия кинетики; поэтому величины, зависящие от силы или массы, носят название *кинетических* величин, тогда как величины, зависящие от расстояния, проходимого телом в пространстве, и от времени, называются *кинематическими*.

Понятие о силе, так же как и понятие о механическом движении, возникает из наблюдений и опыта; но существенное различие этих понятий состоит в том, что понятие о механическом движении вполне поддается математической интерпретации, тогда как понятие о силе нуждается в дальнейшей абстракции.

Когда мы говорим о силе человека или животного, то мы обыкновенно оцениваем силу с точки зрения производимого ею эффекта, который выражается в возникновении движения из состояния покоя или в изменении происходящего движения, причем масштабом для этой оценки служит субъективное чувство мускульного напряжения, которое производит тот же самый эффект. Это представление мы переносим на неживые вещи. Например, ощущая давление тела на руку, в которой мы его держим, мы говорим также о давлении, испытываемом от этого тела столом, на котором оно лежит, или о нагяжении нити, на которой подвешено это тело, причем полагаем, что как стол, так и нить действуют на тело с некоторой силой, которая удерживает его от падения на Землю совершенно таким же образом, как и наша рука, в которой мы его держим. Продолжая эту абстракцию далее, мы, в конце концов, приходим к понятию о силе в универсальном смысле этого слова.

Точно так же понятие о массе тела является результатом абстракции и расширения представления о «количестве вещества, заключающегося в теле». В повседневной жизни о количестве вещества судят по весу тела. Но вес тела, как известно, меняется в зависимости от широты места и высоты над уровнем моря, а количество вещества в теле от этих факторов зависеть не может, так как оно должно зависеть *только* от свойств самого тела; поэтому вес нельзя принять в качестве меры количества вещества. С другой стороны, известно, что отношение веса тела к ускорению его свободного падения в безвоздушном пространстве (вблизи поверхности Земли) есть величина постоянная для данного тела и не зависит от места наблюдения, т. е. если вес тела обозначим через P , а ускорение свободного падения обозначим g , то для данного тела

$$\frac{P}{g} = m = \text{const.} \quad (1)$$

Величина m , зависящая только от свойств самого тела, называется *весомой массой* тела и, очевидно, может быть принята за меру количества вещества, содержащегося в теле. Ясно, что весомая масса m в одном и том же месте пропорциональна весу тела.

Далее, из опыта известно, что различные силы сообщают одному и тому же телу ускорения, пропорциональные силам. (Говоря здесь об «ускорении тела», мы считаем размеры этого тела столь малыми, что различием в движениях его частиц можно пренебречь.) Поэтому, если под действием силы тяжести P тело движется с ускорением g ,

то при действии на это тело какой-нибудь другой силы F оно получит такое ускорение w , что

$$\frac{w}{g} = \frac{F}{P}. \quad (2)$$

Отсюда имеем:

$$F = \frac{P}{g} w. \quad (3)$$

Полагая здесь, как и в равенстве (1), $\frac{P}{g} = m$, находим:

$$F = mw. \quad (4)$$

Чем больше величина m , входящая в равенство (4), тем меньше ускорение w получает тело под действием одной и той же силы F , т. е. тем медленнее под действием данной силы изменяется скорость движения тела. Таким образом, эта величина m служит мерой инерции тела и поэтому называется *инертной массой* тела.

Многочисленными опытами установлено, что весовая масса и инертная масса тела совпадают. Это весьма важное и, на первый взгляд, очевидное положение носит название «принципа эквивалентности» и является одним из основных положений общей теории относительности А. Эйнштейна, из которой вытекает созданная им теория тяготения.

Из предыдущего следует, что масса, будучи мерой количества вещества тела, служит в то же время мерой его инерции; следовательно, материальность и инерция проявляются в механике как свойства эквивалентные.

2. Аксиомы, или основные законы, механики. Основные понятия кинетики — сила и масса — вводятся в механику путем соответствующих определений, а соотношения между ними устанавливаются системой аксиом, или законов, которые кладутся в основу механики. Эти аксиомы устанавливаются в результате обобщения многочисленных наблюдений и опытов над движением материальных тел. Наиболее распространенной является классическая система таких аксиом, данная И. Ньютоном и опубликованная им в 1687 г. (см. главу I, § 1). В современной формулировке эти аксиомы (законы) могут быть изложены в виде следующих положений.

Будем рассматривать тело столь малых размеров, что различием в движении отдельных его точек можно пренебречь. Такое тело называется *материальной точкой* (или материальной частицей); его можно представлять себе в виде точки (геометрической), снабженной массой. В дальнейшем материальную точку для краткости будем часто называть просто точкой (частицей). Произведение массы m материальной точки на ее скорость v есть векторная величина, называемая *количеством движения* (или импульсом) точки; так как

масса m есть величина скалярная, то направление $m\mathbf{v}$ совпадает с направлением скорости точки.

Аксиома 1 (закон инерции). *Материальная точка, на которую не действуют никакие силы, имеет постоянную по модулю и направлению скорость.*

Таким образом, всякая, лишенная каких бы то ни было воздействий извне свободная материальная точка движется прямолинейно и равномерно ($\mathbf{v} = \text{const}$) или, в частности, находится в покое ($\mathbf{v} = 0$).

Из кинематики известно, что всякое движение является по существу своему относительным и требует обязательного указания системы отсчета, по отношению к которой оно рассматривается. При этом одна и та же точка может по отношению к одной системе отсчета находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно, а по отношению к другой системе совершать неравномерное криволинейное движение, и наоборот. Отсюда вытекает, что закон инерции имеет место только по отношению к некоторым определенным системам отсчета, которые называются *инерциальными*. Вопрос о том, можно ли данную систему отсчета рассматривать как инерциальную, решается опытом. Как показывает опыт, для нашей солнечной системы инерциальной можно практически считать систему отсчета, начало которой находится в центре Солнца, а оси направлены на так называемые «неподвижные» звезды. При решении многих технических задач можно с достаточной для практики точностью рассматривать в качестве инерциальной систему отсчета, связанную с Землей, или же систему, имеющую начало в центре Земли, а оси, направленные на неподвижные звезды.

Аксиома 2 (основной закон динамики). *Производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на нее силе, т. е.*

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}. \quad (5)$$

Из этого закона, справедливого также лишь по отношению к инерциальной системе отсчета, следует, что сила, действующая на материальную точку, является фактором, изменяющим ее количество движения. В классической механике масса частицы считается постоянной; поэтому основной закон динамики может быть еще представлен в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (6)$$

или, так как $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{w}$, где \mathbf{w} есть ускорение точки,

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}, \quad (7)$$

т. е. *произведение массы точки на ее ускорение равно действующей на точку силе*. Так как масса есть величина скалярная,

то векторы $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{F} коллинеарны, т. е. сила есть вектор, направленный по ускорению, которое получает точка от действия силы. В частности, если сила на точку не действует, т. е. если $\mathbf{F} = 0$, то $m\boldsymbol{\omega} = 0$, откуда

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{v} = \text{const.}$$

Итак, эффект действия силы на материальную точку заключается в том, что точка получает ускорение; при отсутствии силы ускорение точки равно нулю, т. е. точка движется по инерции.

Основной закон динамики дает количественную связь между кинетическими факторами, обуславливающими движение точки, т. е. между действующей силой (внешний фактор) и массой точки (внутренний фактор), с одной стороны, и кинематической величиной — ускорением, с другой. Из аналитического выражения этого закона, даваемого равенством (7), следует, что: 1) одна и та же сила сообщает различным точкам ускорения, обратно пропорциональные их массам, и 2) различные силы сообщают одной и той же точке ускорения, пропорциональные силам. Таким образом, действие силы на точку зависит от массы точки, которая поэтому и является мерой ее инерции.

Аксиома 3 (закон действия и противодействия). *Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

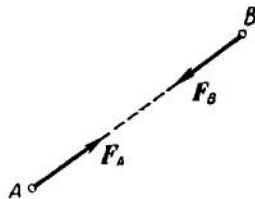


Рис. 162.

Эта аксиома предполагает *дальнодействие*, т. е. возможность действия материальных тел друг на друга на расстоянии, что характерно для классической механики Галилея — Ньютона.

Если точка A с массой m_A действует на точку B с силой \mathbf{F}_B , а точка B с массой m_B действует на точку A с силой \mathbf{F}_A (рис. 162), причем точки A и B получают от действия этих сил ускорения, соответственно равные $\boldsymbol{\omega}_A$ и $\boldsymbol{\omega}_B$, то имеем:

$$\mathbf{F}_B = -\mathbf{F}_A \quad \text{и} \quad \mathbf{F}_A = F_B$$

или

$$m_A \boldsymbol{\omega}_A = m_B \boldsymbol{\omega}_B;$$

следовательно, ускорения, сообщаемые материальным точкам силами взаимодействия, обратно пропорциональны массам точек.

Аксиома 4 (закон независимости действия сил). *Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил действует независимо от других и сообщает точке ускорение, равное этой силе, деленной на массу точки.* Следовательно, если на точку с массой m действует

система сил F_1, F_2, \dots, F_n , то каждая сила F_i сообщит точке ускорение

$$w_i = \frac{F_i}{m};$$

поэтому ускорение, получаемое точкой от действия всей системы сил, будет:

$$w = \sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n F_i,$$

откуда имеем:

$$m w = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (8)$$

Из этого равенства следует, что система нескольких сил F_1, F_2, \dots, F_n действует на материальную точку так же, как одна сила F , равная сумме F_1, F_2, \dots, F_n , т. е.

$$F = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (9)$$

Это следствие представляет обобщенный закон *параллелограмма сил*.

3. Системы основных единиц. Для измерения всех механических величин достаточно ввести три основные единицы измерения. Двумя из них принято считать единицы длины и времени, уже введенные в кинематике. В качестве третьей (кинетической) единицы удобнее всего выбрать единицу измерения массы или силы. Но так как сила и масса связаны между собой основным уравнением динамики:

$$\text{сила} = \text{масса} \times \text{ускорение},$$

то произвольно может выбираться единица измерения только одной из кинетических величин: или массы, или силы. В зависимости от этого в механике возможно введение двух принципиально различных систем основных единиц.

1) *Первый тип систем единиц.* В этих системах за основные принимаются единица длины, единица времени и единица массы, а сила измеряется производной единицей.

К системам такого рода относится *международная система единиц измерения физических величин* (СИ), в которой основными единицами измерения механических величин являются: метр (1 м), килограмм массы (1 кг) и секунда (1 сек)¹⁾.

¹⁾ В системе СИ метр есть длина, равная 1 650 763,73 длины волны (в вакууме) излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86; секунда есть 1/31556925,9747 часть тропического года для 1900 г., января 0, в 12 часов эфемеридного времени; килограмм — масса соответствующего платино-иридиевого эталона.

Единицей измерения силы в системе СИ является производная единица, численно равная силе, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/сек². Такая единица силы называется *ньютон* (1 н). Следовательно,

$$1 \text{ н} = 1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ м/сек}^2 = 1 \text{ кгм/сек}^2.$$

Другой аналогичной системой является распространенная в физике система СГС, в которой основными единицами являются *сантиметр*, *грамм массы* и *секунда*, а сила измеряется производной единицей — *диной* (1 дина = 10⁻⁵ н).

2) *Второй тип систем единиц.* В этих системах за основные принимаются единица длины, единица времени и единица силы, а масса измеряется производной единицей.

К таким системам относится имеющая большое распространение в технике система МКГС (техническая система единиц), в которой основными единицами являются *метр* (1 м), *килограмм силы* (1 кгГ) и *секунда* (1 сек). Единицей измерения массы в этой системе будет $1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}}$, т. е. масса, которой сила в 1 кгГ сообщает ускорение 1 м/сек².

Соотношение между единицами силы в системах СИ и МКГС таково: 1 кгГ ≈ 9,81 н или 1 н ≈ 0,102 кгГ.

Принципиальное различие между названными системами единиц состоит в том, что в одних за основную кинетическую единицу принимается единица массы, а в других — единица силы.

4. Система материальных точек. Совокупность (множество) материальных точек (частиц) носит название системы материальных точек (частиц). Такую систему мы можем образовать из любого множества материальных точек, выбранных нами совершенно произвольно; поэтому всякая данная точка может или принадлежать к рассматриваемой системе, или не принадлежать. Если система материальных точек обладает тем свойством, что движение каждой точки зависит от положения и движения остальных точек системы, то такая система называется *механической системой* материальных точек. Следовательно, для того чтобы система была механической, необходимо, чтобы точки системы были каким-либо образом связаны между собой; при этом между точками системы будут действовать силы взаимодействия (как, например, между планетами солнечной системы, если их рассматривать как материальные точки). Любое материальное тело (твердое, жидкое или газообразное) представляет собой механическую систему, состоящую из очень большого числа материальных частиц (точек), связанных между собой силами интрамолекулярного действия, которые налагают определенные ограничения на взаимные расстояния между частицами согласно природе тела. Всякая совокупность мате-

риальных тел, так или иначе связанных между собой, также образует механическую систему (ферма, механизм, машина и т. п.).

Если точки системы или тела связаны между собой неизменно, т. е. так, что взаимное расстояние между двумя любыми точками остается постоянным, то такая система называется *неизменяемой системой*, а тело — *абсолютно твердым телом*; в противном случае система называется изменяемой, а тело *деформируемым*.

Положение системы определено, если известно положение каждой из точек, составляющих систему, и наоборот; точно так же движение системы известно, если известно движение каждой точки, принадлежащей к системе, и обратно.

Б. Связи. Если каждая из точек системы может занимать произвольное положение в пространстве и иметь произвольные скорости, то система называется *свободной*; в противном случае система будет *несвободной*. Условия, которые налагают ограничения на движение системы, называются *связями*. Если связь налагает ограничение только на положение системы или на относительное положение точек, составляющих систему, в том смысле, что система, а следовательно, и ее элементы не могут занимать произвольного положения в пространстве, то такая связь называется *геометрической*; если же связь, кроме того, налагает ограничения еще и на кинематические элементы (например, на скорости), то такая связь носит название *кинематической*.

Геометрические связи представляются аналитически уравнениями, дающими зависимость между координатами точек системы. Для системы, состоящей из n материальных точек, положения которых определяются их декартовыми координатами $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$, уравнение геометрической связи имеет вид

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (10)$$

или, сокращенно,

$$f(x, y, z) = 0. \quad (10')$$

Примечание. Отсутствие индексов в равенствах вида (10') означает здесь и далее, что при x, y и z нужно подразумевать все индексы от 1 до n .

Уравнение же кинематической связи, налагающей ограничения не только на положения, но и на скорости точек системы, имеет вид

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \quad (11)$$

Связи обычно осуществляются в виде различных тел, стесняющих свободу перемещения точек системы. Если влияние связи не может прекратиться или, другими словами, система не может освободиться от связи, то такая связь называется *неосвобождающей*; если же система может покинуть связь, то связь носит название *освобождающей*. Пусть, например, материальная точка принуждена

двигаться по данной поверхности; тогда эта поверхность будет по отношению к точке геометрической связью, — неосвобождающей, если точка не может оставить поверхность, и освобождающей, если точка может сойти с поверхности в какую-либо *одну* сторону; если же точка может сойти с поверхности в обе стороны, то поверхность уже не будет связью.

Связи, выражаемые уравнениями вида (10) или (11), являются неосвобождающими. Если связь является освобождающей (и геометрической), то она выражается неравенством вида

$$f(x, y, z) \geq 0 \text{ или } f(x, y, z) \leq 0. \quad (12)$$

Связи, не зависящие от времени, называются *стационарными* или *склерономными* (по терминологии Больцмана). Если же связь зависит от времени, то она называется *нестационарной* или *реономной* связью. Например, неподвижная поверхность или кривая, по которой принуждена двигаться точка, будет склерономной связью; если же эта поверхность или кривая движутся, то связь будет реономной.

Связи, выражаемые уравнениями вида (10), (11) или (12), будут склерономными. Уравнение реономной связи (и притом геометрической, неосвобождающей) имеет вид

$$f(x, y, z, t) = 0. \quad (13)$$

Отметим, наконец, что по отношению к рассматриваемой системе связи можно разделить на *внутренние* и *внешние*. Внутренней называется такая связь, которая не препятствует перемещению всей системы *в целом*, а налагает ограничения только на относительное расположение точек системы; в противном случае связь называется *внешней*. Таким образом, если связями служат тела, принадлежащие к системе, то эти связи будут внутренними, и наоборот. Систему, которая имеет только внутренние связи, также называют *свободной* системой.

Пример 1. Рассмотрим систему трех материальных точек A, B, C , соединенных между собой гибкими и нерастяжимыми нитями, длины кото-

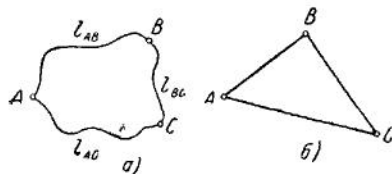


Рис. 163.

рых соответственно равны l_{AB}, l_{BC}, l_{AC} (рис. 163, а). Эти нити по отношению к системе частиц A, B, C будут внутренними связями, следовательно, система будет свободной. Кроме того, эти связи будут геометрическими, потому что взаимные расстояния точек системы не могут быть какими угодно, а подчинены условиям:

$$AB \leq l_{AB}; \quad BC \leq l_{BC}; \quad AC \leq l_{AC} \quad (a)$$

и освобождающими, потому что эти связи действуют только тогда, когда $AB = l_{AB}, BC = l_{BC}, AC = l_{AC}$, т. е. когда нити натянуты; если же,

например, $AB < l_{AB}$, то точка A освобождается от связи, которой служит нить AB . Аналитически первая из связей (а) выражается неравенством

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B) - l_{AB} \leq 0.$$

Аналогичными неравенствами выражаются и две другие связи.

Если рассматривать систему, состоящую только из двух точек A и B , то для этой системы нить AB будет внутренней связью, а нити BC и CA — внешними, так как точка C уже не принадлежит рассматриваемой системе. Если нити AB , BC и CA заменим неизменяемыми стержнями (т. е. такими, длина которых не может изменяться), то система (рис. 163, б) будет свободной неизменяемой системой, а связи — неосвобождающими.

Пример 2. Пусть твердый шар находится на неподвижной шероховатой плоскости и может катиться по ней без скольжения. В данном случае плоскость будет налагать стеснение не только на перемещения шара, но и на скорости его точек, потому что скорость точки шара, в которой шар касается плоскости, должна быть равна нулю; следовательно, плоскость по отношению к шару будет кинематической связью, притом внешней и склерономной.

6. Координаты системы. Независимые между собой величины, определяющие положение или *конфигурацию* системы материальных точек относительно какой-либо системы отсчета, называются *координатами системы*. Конфигурацию системы мы можем геометрически изобразить точкой пространства, число измерений которого равно числу координат системы. Если на систему наложены только геометрические связи, то число координат системы называется *числом степеней свободы* этой системы.

Пусть мы имеем систему, состоящую из n материальных точек. Положение каждой точки определяется тремя декартовыми координатами (x_v, y_v, z_v) , где v есть номер точки; следовательно, положение всей системы, если на нее не наложены связи, будет определяться $3n$ координатами:

$$x_v, y_v, z_v \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

и такая система будет иметь $3n$ степеней свободы.

Допустим теперь, что система подчинена k геометрическим связям вида (10), т. е.

$$f_\chi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (\chi = 1, 2, \dots, k). \quad (14)$$

Тогда $3n$ координат точек системы не будут уже между собой независимы и не могут иметь произвольных значений, а будут связаны k условиями (14); поэтому независимых координат будет:

$$3n - k. \quad (15)$$

Таким образом, число координат системы, а следовательно и число степеней свободы ее, будет $3n - k$.

За координаты системы можем принять в данном случае любые $3n - k$ декартовых координат x_v, y_v, z_v , которые будем считать независимыми; тогда остальные k из этих координат будут функциями первых. Можно $3n - k$ независимых декартовых координат системы преобразовать в другие посредством точечного преобразования, выразив их в функциях $3n - k$ независимых переменных $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$, т. е. положив

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots), \quad y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots) \quad \text{и т. д.}, \quad (16)$$

где x_1, y_1, \dots будут аналитическими функциями переменных q_1 , причем якобиан

$$\frac{\partial (x_1, y_1, \dots)}{\partial (q_1, q_2, \dots)} \neq 0.$$

Тогда $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$ будут координатами системы, в общем случае криволинейными. Декартовы координаты точек системы в этом случае будут функциями координат $q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}$, т. е.

$$x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, y_n, z_n | q_1, q_2, \dots, q_{3n-k}.$$

Пример 1. Система двух материальных точек m_1 и m_2 , соединенных между собой неизменяемым стержнем длиной l , движется по сфере радиуса R . Возьмем начало координат в центре сферы (рис. 164), и пусть координаты точек будут $m_1(x_1, y_1, z_1)$ и $m_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда связи системы выразятся уравнениями:

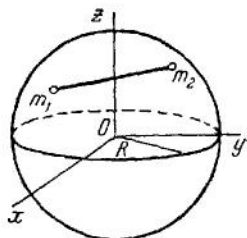


Рис. 164.

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0, \quad (a)$$

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 = 0, \quad (б)$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 = 0. \quad (в)$$

Таким образом, шесть координат точек системы связаны тремя уравнениями и независимых координат будет три. Следовательно, система имеет три степени свободы, и число координат системы (за которые можно принять любые три из шести координат $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$) равно трем. Связи, выражаемые уравнениями (а), (б), (в), будут геометрические, неосвобождающие и склерономные. Если точки m_1 и m_2 могут сходиться со сферы во внутреннюю область, то последние две связи станут освобождающими и будут выражаться неравенствами:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R^2 \leq 0, \quad (a')$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - R^2 \leq 0. \quad (б')$$

Если радиус сферы изменяется пропорционально времени, т. е. $R = at$, где a есть постоянный коэффициент, то равенства (б) и (в) примут вид

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - a^2 t^2 = 0, \quad (a'')$$

$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - a^2 t^2 = 0. \quad (б'')$$

Связи будут уже реономными, так как в их уравнения будет явно входить время.

Пример 2. Неизменяемая система. Рассмотрим неизменяемую систему, состоящую из n материальных точек. Возьмем три какие-либо точки: 1, 2, 3 (рис. 165), координаты которых соответственно будут:

$$x_v, y_v, z_v \quad (v = 1, 2, 3).$$

Так как эти точки связаны между собой неизменно, то девять их координат должны удовлетворять трем уравнениям связи¹⁾:

$$S(x_1 - x_2)^2 = l_{12}^2, \quad S(x_2 - x_3)^2 = l_{23}^2,$$

$$S(x_3 - x_1)^2 = l_{31}^2,$$

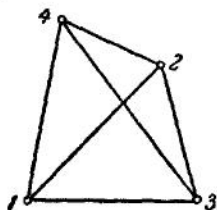


Рис. 165.

где l_{12} , l_{23} , l_{31} будут постоянные расстояния между соответственными точками; следовательно, из девяти координат независимыми будут только шесть. Присоединим четвертую точку; тогда прибавятся три координаты x_4 , y_4 , z_4 и три уравнения связи предыдущего типа, выражающие постоянство расстояний четвертой точки от точек 1, 2, 3. Таким образом, присоединение каждой новой точки вносит три координаты и три уравнения связи. Следовательно, $3n$ координат точек системы будут связаны $3 + 3(n-3) = 3n - 6$ уравнениями связи; поэтому число независимых координат будет равно

$$3n - (3n - 6) = 6.$$

Итак, свободная неизменяемая система (в частности, абсолютно твердое тело) определяется шестью координатами и, следовательно, имеет шесть степеней свободы.

7. Виды сил. Материальные тела могут действовать друг на друга или путем непосредственного соприкосновения, или на расстоянии;

в зависимости от этого силы, которые служат в механике мерой взаимодействия тел, можно разделить на две категории.

1) *Поверхностные силы* — силы, действующие на точки поверхности тела. Они возникают при действии одного тела на другое непосредственным соприкосновением и приложены к той части поверхности тела, в которой взаимодействующие тела касаются друг друга. Пусть тело 1 действует на тело 2, касаясь его вдоль некоторой поверхности σ (рис. 166). Действующие на эту поверхность распределенные силы характеризуются их напряжением p , т. е. величиной силы,

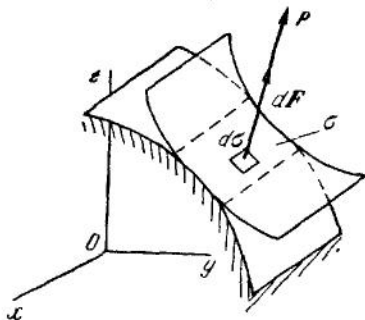


Рис. 166.

¹⁾ В этих равенствах $S(x_1 - x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$ и т. д.

приходящейся на единицу площади. Если на элемент $d\sigma$ площади контакта действует сила dF , то

$$p = \frac{dF}{d\sigma}. \quad (17)$$

Величина p будет вообще функцией координат точки, определяющей положение элемента $d\sigma$; размерность p будет $\frac{\text{сила}}{(\text{длина})^2}$.

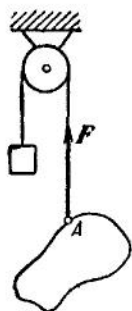


Рис. 167.

Если на очень малый элемент поверхности действует конечная сила F , то, пренебрегая размером этого элемента, мы приходим в пределе к абстрактному представлению о сосредоточенной силе, приложенной к телу в одной точке. С достаточной степенью точности сосредоточенной можно, например, считать силу, с которой на тело действует нить (рис. 167), прикрепленная к телу в точке A (фактически, конечно, нить прикреплена не к «точке», а к какому-то элементу поверхности тела).

2) *Массовые*, или *объемные*, силы — силы, которые действуют на все частицы тела. К таким силам относятся силы дальнего действия, такие, например, как силы тяготения или тяжести. Массовые силы характеризуются их напряжением f , т. е. величиной силы, приходящейся на единицу объема. Пусть при взаимодействии тел (1) и (2) на элемент объема $d\tau$ тела 2 действует сила dF (рис. 168); тогда

$$f = \frac{dF}{d\tau}. \quad (18)$$

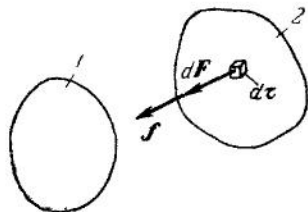


Рис. 168.

Величина f является вообще функцией координат точки, определяющей положение элемента объема $d\tau$. Размерностью f

будет $\frac{\text{сила}}{(\text{длина})^3}$. Пусть масса рассматриваемого элемента объема равна dm ; тогда величина

$$\frac{dm}{d\tau} = \rho, \quad (19)$$

представляющая собой массу единицы объема в данной точке, называется *плотностью* тела в данной точке и есть, очевидно, функция координат этой точки; размерность ее будет $\frac{\text{масса}}{(\text{длина})^3}$. Если ускорение, сообщаемое элементу объема силой dF , обозначим w , то будем иметь:

$$dF = dm \cdot w = \rho w d\tau. \quad (20)$$

Сравнивая равенства (18) и (20), получим:

$$f = \rho w. \quad (21)$$

Если силу dF будем относить не к единице объема, а к единице массы, то из равенства (20) получим:

$$\frac{dF}{dm} = w. \quad (22)$$

Отсюда видно, что сила, отнесенная к единице массы в данной точке тела, равна ускорению, получаемому этой точкой от действующих на тело массовых сил.

Кроме деления сил на поверхностные и массовые, силы, действующие на систему, можно разделить еще на внутренние и внешние. *Внутренними* силами называются силы, происходящие от взаимодействия частиц (тел), принадлежащих системе; силы, происходящие от действия тел, не принадлежащих системе, называются *внешними*.

8 Реакции связей. Связи, налагаемые на точки системы, стесняют свободу движения этих точек, отклоняя их движение от того, которое они имели бы под действием тех же сил, будучи свободными от связей. Поэтому мы можем считать, это эффект действия связей такой же, как и действия сил, вследствие чего *действие связей можно заменить соответствующими силами, которые называются реакциями связей* (аксиома связей).

Реакции связей по природе своей несколько отличаются от всех других действующих на систему сил, не являющихся реакциями, которые принято называть *активными* силами. Это отличие заключается в том, что реакция связи не вполне определяется самой связью; ее модуль, а иногда и направление зависят еще от других сил, действующих на систему, и от движения системы (при отсутствии активных сил и движения реакции вообще не возникают). Модуль же и направление каждой активной силы (или их зависимость от времени, координат точки приложения силы и скорости) известны заранее и от других приложенных к системе сил не зависят. Кроме того, активные силы, действуя на покоящуюся систему, могут сообщить ей то или иное движение (отсюда и наименование «активные»); реакции же связей этим свойством не обладают, вследствие чего их еще называют *пассивными* силами.

Связи осуществляются обычно в виде различных тел, стесняющих свободу движения системы. В этих случаях реакция связи представляет собой силу, приложенную в точке, в которой связь соприкасается с телом, причем направление реакции совпадает с тем направлением, по которому связь препятствует перемещению тела; если таких направлений несколько, то направление реакции, а также и напряжение ее определяются в зависимости от активных сил, действующих на тело, и от движения самого тела. Кроме того,

нужно заметить, что реакция связи есть действие связи на тело; при этом тело действует на связь с силой, равной реакции и ей противоположной, по закону действия и противодействия.

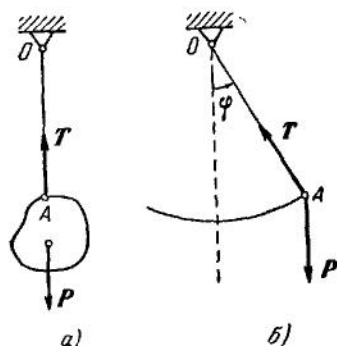


Рис 169.

Пусть, например, твердое тело весом P подвешено в неподвижной точке O на нерастяжимой нити, прикрепленной к точке A тела (рис. 169, а). Нить, служащая связью, дает реакцию T , приложенную в точке A тела и направленную по нити; числовое значение этой реакции равно в данном случае весу тела P , ибо нить действует на тело с силой T , а тело действует на нить с силой P . Если же тяжелое тело весом P , подвешенное на нити к неподвижной точке O (рис. 169, б), совершает колебания (маятник), то реакция

нити T будет по-прежнему направлена вдоль нити, однако ее численная величина будет зависеть не только от P , но и от угла φ и угловой скорости $\frac{d\varphi}{dt}$, т. е., вообще говоря, от движения тела.

Если связью служит неподвижная гладкая поверхность (рис. 170), то она дает реакцию N , приложенную в точке касания A тела к этой поверхности и направленную по нормали к ней; напряжение реакции зависит от активных сил, действующих на тело, и от движения тела. Неподвижная гладкая кривая, служащая связью (рис. 171), развивает

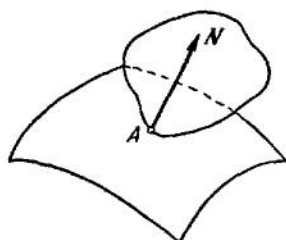


Рис. 170.



Рис. 171.

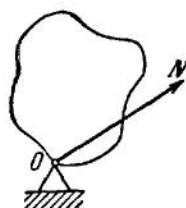


Рис. 172.

реакцию, приложенную в точке касания A и направленную по нормали к кривой; в этом случае реакция может иметь какое угодно напряжение и направление, лежащее в нормальной плоскости, проведенной к кривой через точку A . Если связью является неподвижная точка O (рис. 172), то она может дать любую по напряжению и направлению реакцию N , приложенную к этой точке. Модуль и

направление реакции в последних двух случаях зависят от действующих активных сил и от движения тела.

Связи, развивающие нормальную реакцию, являются *идеальными* связями (*связями без трения*), в отличие от *связей с трением*, которые, кроме нормальной реакции N , дают еще реакцию F , лежащую в касательной плоскости (рис. 173) и возникающую благодаря трению; вследствие этого реакция связи с трением N_1 может отклоняться от нормали на некоторый угол φ .

9. Разделение кинетики на статику и динамику. Кинетика, как было уже сказано, посвящена изучению движения и равновесия механической системы (в частности, материальной точки) в зависимости от действующих на систему сил. Обычно кинетику разделяют на *статику* — учение о равновесии механической системы под действием сил и *динамику* — учение о движении системы под действием сил.

Если на материальную точку никакие силы не действуют, то она по отношению к инерциальной системе отсчета находится в покое или движется по инерции, т. е. прямолинейно и равномерно. Аналогично можно ввести понятие о движении по инерции и для механической системы. В частности, абсолютно твердое тело при отсутствии действующих сил может или находиться в покое, или совершать поступательное, равномерное и прямолинейное движение, также называемое движением по инерции или *инерциальным*¹⁾. При действии сил движение материальной точки или системы будет вообще отличаться от инерциального. Изучение таких движений и составляет основное содержание динамики. Однако может случиться, что при действии некоторой совокупности (системы) сил материальная точка или механическая система будет оставаться в покое или двигаться инерциально, т. е. вести себя так же, как и при отсутствии сил. Про такую систему сил говорят, что она находится в *равновесии*. Таким образом, определение условий, при которых точка или механическая система могут находиться под действием сил в равновесии, сводится прежде всего к определению условий равновесия, действующих на точку или систему сил. Сообразно этому статику можно назвать учением об условиях равновесия сил, действующих на механическую систему.

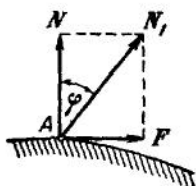


Рис 173.

§ 15. Определения и аксиомы статики

1. Элементарная и аналитическая статика. Статика есть часть кинетики, посвященная изучению условий равновесия механической системы под действием сил, или, иначе, условий равновесия сил.

¹⁾ Твердое тело может совершать «по инерции» и другого вида движения (например, равномерное вращение и т. д.); эти движения будут рассмотрены в ч. II.

действующих на механическую систему. Ее можно в свою очередь разделить на: 1) элементарную (или геометрическую) и 2) аналитическую.

Элементарная статика представляет собой в основном статику абсолютно твердого тела. В ней силы рассматривают как некоторые определенные заданные величины и изучают методы замены различных систем сил, действующих на абсолютно твердое тело, простейшими системами, а затем находят условия равновесия этих систем.

Так как сила, действующая на абсолютно твердое тело, как будет показано далее, есть вектор скользящий, то к изложению элементарной статики может быть применен богатый материал геометрии скользящих векторов, вследствие чего изложение получает геометрический характер.

Аналитическая статика представляет собой развитие одного из основных принципов механики, именно принципа виртуальных (возможных) перемещений, который дает общий критерий равновесия механической системы, вследствие чего выводы аналитической статики относятся к какой угодно механической системе. В аналитической статике имеет широкое применение математический анализ, поэтому изложение носит аналитический характер.

§ 2. Сила. Понятие о силе в элементарной статике является основным. Известно, что сила, действуя на материальную точку, сообщает ей ускорение, направленное по силе; поэтому действие силы на точку зависит: 1) от направления силы и 2) от напряжения (численного значения или модуля) силы.

Направление силы есть то направление, по которому свободная материальная точка, находящаяся в покое, начинает двигаться под действием силы. Прямая, по которой направлена сила, называется *линией действия силы*.

Напряжение, или модуль, силы есть величина, которая равна произведению массы точки на модуль ускорения, сообщаемого ей силой, ибо, согласно второй аксиоме, $F = m\omega$.

Это — динамическое определение напряжения силы. Статическое определение напряжения силы основано на сравнении данной силы с другой,

принятой за единицу меры. Для этой цели обыкновенно пользуются пружинными весами, или динамометрами. Устройство динамометра основано на свойстве сил вызывать в упругих телах исчезающие деформации, пропорциональные силам, если только эти силы невелики по сравнению с пределом упругих деформаций. Простейший динамометр представляет собой упругую пружину (рис. 174), неподвижно укрепленную в точке O и снабженную индексом A и шкалой S . На другом конце пружины находится приспособление B для приложения

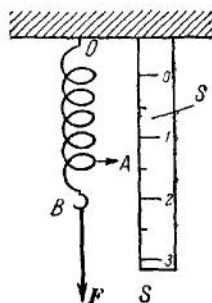


Рис. 174.

измеряемой силы (крюк, ручка и т. п.). Шкала динамометра градуируется посредством последовательного подвешивания к концу B динамометра одного, двух, трех и т. д. эталонов, вес каждого из которых равен единице (например, 1 кг), причем против стрелки индекса на шкале наносятся соответствующие значения. Принимая во внимание, что при действии равных сил пружина динамометра получает равные удлинения, мы можем по указаниям стрелки индекса определить напряжение силы F , приложенной к концу B пружины.

Итак, сила есть физическая величина, определяемая не только напряжением, но и направлением в пространстве; кроме того, как будет установлено, сложение сил производится по правилу параллелограмма. Следовательно, *сила есть величина векторная*, модулем (или численной величиной) которой является напряжение силы. Точкой приложения вектора силы будет та материальная частица, на которую сила действует.

Силы, как векторные величины, изображаются векторами, и по отношению к ним применимы все положения и операции, которые относятся к векторам вообще. Если сила действует на какое-либо тело, которое, как известно, представляет собой систему очень большого числа материальных частиц, между собой связанных, то движение тела под действием силы зависит не только от направления и напряжения силы, но также и от точки приложения силы. Так, например, сила F_1 , приложенная в точке A тела, действует на тело иначе, чем равная по напряжению и параллельная ей сила F_2 , приложенная в точке B (рис. 175), потому

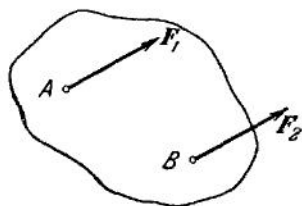


Рис 175

что при действии силы F_1 движение свободного тела будет иным, чем при действии силы F_2 . Отсюда следует, что сила есть вектор, связанный с точкой приложения, т. е. *неподвижный* вектор, и что данная сила не может быть перенесена из одной точки тела в другую без изменения действия силы. Таким образом, сила, как неподвижный вектор, определяется: 1) *точкой приложения*, 2) *направлением* и 3) *напряжением*.

3. Основные определения. В основании элементарной статики лежит система определений и аксиом, посредством которых вводятся основные понятия.

Определения. 1) Совокупность сил, действующих на какую-либо механическую систему, в частности на твердое тело, называется *системой сил*.

2) Система сил, которая, действуя на свободное твердое тело, находящееся в покое, не сообщает ему никакого движения, находится в *равновесии*, или, иначе говоря, *эквивалентна нулю*.

3) Если направления всех сил какой-либо системы (S) изменить на противоположные, сохраняя точки их приложения, то получается система сил (S'), которая называется системой, противоположной системе (S). Символически это обозначается так:

$$(S') = (-S).$$

4) Если две системы сил (S_1) и (S_2), действующие одновременно на свободное твердое тело, находятся в равновесии, то говорят, что система (S_2) уравнивает систему (S_1), и наоборот.

5) Если система сил (S_1) уравнивается системой, противоположной системе (S_2), то системы сил (S_1) и (S_2) называются *эквивалентными*. Символически это определение записывается так: если $(S_1) + (-S_2) \approx 0$, то $(S_1) \approx (S_2)$ (знак \approx есть символ эквивалентности).

Физический смысл эквивалентности двух систем сил заключается в том, что каждая из этих систем, действуя на одно и то же первоначально неподвижное свободное тело, сообщает телу одно и то же движение.

Следствие 1. Из определения 5) следует, что если система сил (S_2) уравнивает систему (S_1), то система $(-S_2)$ эквивалентна системе (S_1).

Следствие 2. Две системы сил (S_1) и (S_2), эквивалентные третьей (S), эквивалентны между собой, т. е. если $(S_1) \approx (S)$, $(S_2) \approx (S)$, то $(S_1) \approx (S_2)$.

6) Если система сил (S) эквивалентна *одной* силе F , то сила F называется *равнодействующей* системы (S).

Из определений 5) и 6) вытекает, что если система сил (S) имеет равнодействующую F , то эта система (S) уравнивается одной силой, равной $-F$.

7) Если все силы, действующие на твердое тело, образуют систему сил, находящуюся в равновесии, то мы будем говорить, что и само тело находится в равновесии. Из последнего определения следует, что под состоянием равновесия твердого тела (а в дальнейшем и механической системы) мы будем понимать те состояния, которые тело может иметь под действием уравновешенной системы сил, т. е. состояния покоя или инерциального движения (см. § 14, п. 9); какое именно из этих состояний имеет место, с точки зрения задач, рассматриваемых в статике, несущественно. Рассмотрение инерциальных движений, которые может совершать твердое тело, относится к задачам динамики.

4. Аксиомы статики. 1) Система двух взаимно противоположных сил, равных по напряжению и приложенных в одной точке, находится в равновесии (рис. 176).

2) Система двух равных по напряжению взаимно противоположных сил, приложенных в двух каких-либо точках абсо-

лотно твердого тела и направленных по прямой, соединяющей их точки приложения, находится в равновесии (рис. 177).

Необходимо иметь в виду, что эта аксиома имеет место *только* по отношению к абсолютно твердому телу, для которого расстояние между двумя любыми точками неизменно; поэтому все выводы, основанные на этой аксиоме, применимы только к абсолютно твердому телу.

3) *Всякую систему сил (S_1) можно, не изменяя оказываемого ею действия, заменить другой системой (S_2), ей эквивалентной.*

Физический смысл этой аксиомы состоит в утверждении, что эквивалентные системы сил (S_1) и (S_2) действуют на одно и то же тело одинаково (см. определение 5).

Следствие. Если к точкам A и B абсолютно твердого тела (рис. 178) приложены равные по напряжению и взаимно противоположные силы F_1 и F_2 , направленные по прямой AB , то, согласно аксиоме 2), сила F_2 уравнивает силу F_1 ; тогда сила $-F_2$, противоположная F_2 , будет эквивалентна силе F_1 (см. следствие из определения 5); отсюда на основании аксиомы 3) заключаем, что сила $-F_2$, равная F_1 и приложенная в точке B тела, оказывает на него такое же действие, как сила F_1 , приложенная в точке A , т. е. приходим к выводу, что *всякую силу, приложенную в какой-либо точке абсолютно твердого тела, можно, не изменяя ее действия, перенести в любую другую точку, лежащую на линии действия этой силы*. Таким образом, сила, приложенная к абсолютно твердому телу, есть вектор скользящий; во всех же других случаях (например, в случае деформируемых тел) сила, как было сказано выше, есть вектор неподвижный.

Отсюда следует, что для определения силы, действующей на абсолютно твердое тело, надо знать: 1) какую-либо точку, через которую проходит линия действия силы, 2) направление силы, 3) напряжение силы.

Необходимо заметить, что две равные по напряжению и параллельные силы F_1 и F_2 , приложенные в двух точках тела A и B и не направленные по прямой AB (см. рис. 175), не эквивалентны, т. е. если $F_1 = F_2$, то из этого не следует, что $F_1 \sim F_2$.

4) *Две системы сил, различающиеся между собой на систему сил, эквивалентную нулю, эквивалентны между собой.*

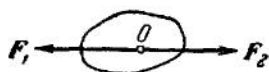


Рис. 176.

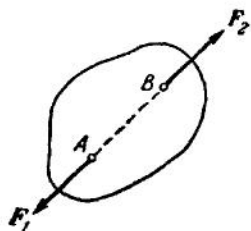


Рис. 177.

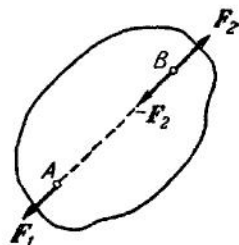


Рис. 178.

Отсюда следует, что всякой системе сил можно придать или отнять от нее систему сил, находящуюся в равновесии, не изменяя действия этой системы.

5) *Равновесие механической системы, находящейся в покое, не нарушается от наложения новых связей; в частности, равновесие механической системы не нарушится, если все частицы системы связать между собой неизменно (принцип отвердевания).*

Таким образом, если какая-либо механическая система находится в равновесии, то она останется в равновесии, если сделается абсолютно твердым телом. Отсюда, между прочим, следует, что условия, необходимые и достаточные для равновесия абсолютно твердого тела, необходимы, но недостаточны для равновесия какой угодно механической системы.

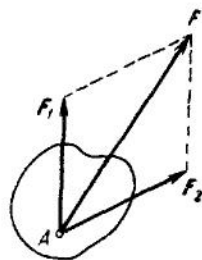


Рис. 179.

6) *Система двух сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе, приложенной в той же точке и равной геометрической сумме этих сил (закон параллелограмма сил).*

Таким образом, если на точку A действуют две силы F_1 и F_2 (рис. 179), то система сил (F_1, F_2) эквивалентна силе F , тоже приложенной в точке A , причем

$$F = F_1 + F_2;$$

иначе говоря, сила F есть равнодействующая системы сил (F_1, F_2) .

Следствие. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке и направленных по одной прямой, равна алгебраической сумме этих сил и направлена по той же прямой.

5. Несвободное твердое тело. Аксиома связей. Всякое твердое тело, которое может занимать произвольное положение в пространстве, называется свободным; если же на тело наложены внешние связи, стесняющие свободу его перемещений, то тело становится несвободным. Выше было указано (см. § 14, п. 8), что механический эффект связей можно заменить пассивными силами, которые называются реакциями связи; поэтому на всякое несвободное тело мы можем смотреть как на свободное, освободив тело от связей и заменив действие связей их реакциями. Отсюда вытекает весьма важная аксиома связей: *Всякое несвободное твердое тело можно освободить от связей, заменив действие связей их реакциями, и рассматривать его как свободное, находящееся под действием приложенных к нему активных сил и реакций связей.*

В статике связи, налагаемые на твердое тело, чаще всего встречаются в виде неподвижных поверхностей, линий и точек, а также в виде гибких нитей. Как было уже сказано, в случае идеальных связей неподвижная поверхность (см. рис. 170) дает реакцию, приложенную в точке касания и направленную по нормали к поверхности.

Когда связь осуществляется в виде некоторого тела, реакция направлена по общей нормали к поверхностям соприкасающихся тел в точке их касания (рис. 180, а); если же одна из поверхностей вырождается в точку, то реакция направлена по нормали к другой поверхности (рис. 180, б). Реакция неподвижной линии (см. рис. 171) приложена в точке касания и может иметь любое направление в нормальной плоскости, проведенной к кривой в этой точке. Примером такой связи служит цилиндрический шарнир (подшипник), в котором ось шарнира, перпендикулярная к рисунку, является неподвижной

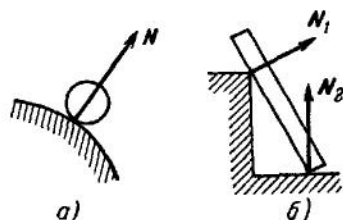


Рис. 180.

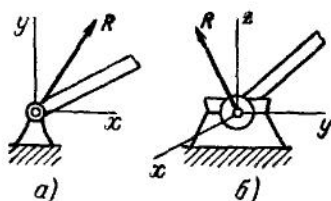


Рис. 181.

прямой (рис. 181, а); реакция R такого шарнира может иметь любое направление в плоскости, перпендикулярной к его оси (т. е. в плоскости рисунка). Неподвижная точка (см. рис. 172) может развить какую угодно по модулю и направлению реакцию. Примером такой связи служит шаровой шарнир (рис. 181, б) или подпятник (подшипник с упором). Реакция гибкой нити всегда направлена по нити (см. рис. 169) и равна натяжению нити. Во всех этих случаях напряжения реакций (а для шарниров и направления) определяются в зависимости от действующих на тело активных сил (см. § 14, п. 8).

6. Задачи элементарной статики. В элементарной статике рассматриваются различные системы сил, действующих на абсолютно твердое тело, с целью замены этих систем наиболее простыми системами, им эквивалентными, и нахождения необходимых и достаточных условий равновесия этих систем. Процесс замены систем сил простейшими системами, в частности одной равнодействующей, называют еще процессом приведения сил. (Этот термин нельзя смешивать с термином «сложение сил», который употребляется в случае сложения сил как свободных векторов.) Операция замены одной силы системой сил, ей эквивалентной, носит название «разложения» сил.

Для решения различного рода вопросов в элементарной статике можно пользоваться или аналитическим, или геометрическим методом. При аналитическом методе данные и искомые величины определяются численно, причем векторные величины даются своими проекциями на оси координат. При геометрическом (или графическом) методе процесс нахождения искомых величин производится с помощью

соответствующих геометрических построений. При этом все величины могут задаваться и определяться графически (рисунком). Развитие последнего метода привело к появлению важного для техники отдела механики — графической статики, которая используется при решении некоторых инженерных задач.

В настоящем курсе мы будем держаться синтетического метода изложения и рассматривать различные системы сил, начиная с простейших и кончая самым общим случаем какой угодно системы.

§ 16. Система сил, приложенных в одной точке. Сходящиеся силы

1. **Равнодействующая системы сил, приложенных в одной точке.** Предположим сначала, что на тело действуют две силы P и Q , приложенные в одной точке A и образующие между собой угол $\widehat{PQ} = \gamma$ (рис. 182). Равнодействующая R этих двух сил, согласно аксиоме о параллелограмме сил, равна геометрической сумме данных сил, т. е.

$$R = P + Q. \quad (1)$$

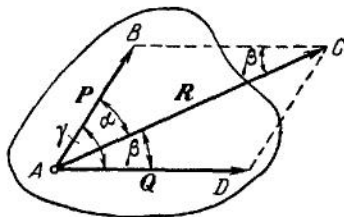


Рис. 182.

Модуль равнодействующей можно определить из треугольника ABC ; заметив, что $\angle ABC = 180^\circ - (\widehat{P, Q})$, получаем:

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos [180^\circ - (\widehat{P, Q})]$$

или

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (\widehat{P, Q})}. \quad (2)$$

Найдем теперь направление равнодействующей, т. е. определим углы

$$\alpha = (\widehat{R, P}) \quad \text{и} \quad \beta = (\widehat{Q, R}),$$

которые равнодействующая составляет с силами P и Q . Применяя известную теорему тригонометрии, получим из треугольника ABC , учитывая, что $\sin [180^\circ - (\widehat{P, Q})] = \sin (\widehat{P, Q})$,

$$\frac{P}{\sin (\widehat{Q, R})} = \frac{Q}{\sin (\widehat{R, P})} = \frac{R}{\sin (\widehat{Q, P})}. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) определяют модуль и направление равнодействующей, если известны величины составляющих сил и угол между ними.

Вектор R можно также найти, строя один из треугольников ABC или ADC , образующих параллелограмм $ABCD$ (см. рис. 10 на стр. 24).

Задача разложения данной силы R на эквивалентные ей две силы P и Q , которую можно считать задачей, обратной определению равнодействующей, имеет, очевидно, бесчисленное множество решений.

Для определенности надо задать дополнительно или линии действия искомых сил, или их модули, или же модуль и направление одной из сил. Первая задача сводится к построению параллелограмма, у которого известна диагональ R и направления сторон AB и AD (см. рис. 182). Другие же две задачи сведутся к построению треугольника по трем заданным сторонам (имеет два решения) или по двум сторонам и углу между ними.

Перейдем теперь к определению равнодействующей системы n сил ($F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$), приложенных к телу в точке O (рис. 183).

Применяя последовательно аксиому параллелограмма сил, получим:

$$(F_1, F_2) \oslash R_{12},$$

где

$$R_{12} = F_1 + F_2;$$

далее,

$$(R_{12}, F_3) \oslash R_{123},$$

где

$$R_{123} = F_1 + F_2 + F_3;$$

и т. д. Наконец,

$$(R_{123} \dots (n-1), F_n) \oslash R,$$

где

$$R = F_1 + F_2 + F_3 +$$

$$+ \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (4)$$

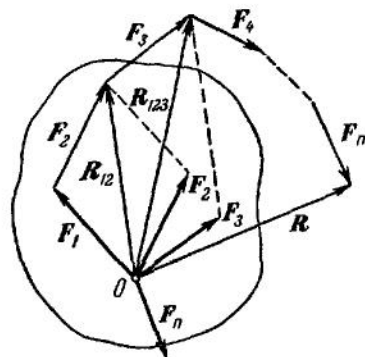


Рис. 183.

Таким образом, система сил, приложенных в одной точке, эквивалентна одной силе, т. е. имеет равнодействующую. Эта равнодействующая равна геометрической сумме всех сил системы и приложена в той же точке.

Равнодействующая R может быть получена или графически, причем сложение сил совершается по методу векторного многоугольника, или аналитически через проекции составляющих сил на оси координат. В последнем случае, применяя выведенные ранее формулы векторного исчисления, получим:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix}, & R_y &= \sum_{i=1}^n F_{iy}, & R_z &= \sum_{i=1}^n F_{iz}, \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\cos(\widehat{R, x}) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\widehat{R, y}) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\widehat{R, z}) = \frac{R_z}{R}, \quad (6)$$

Формулы (5) и (6), дающие модуль и направляющие косинусы равнодействующей рассматриваемой системы сил, вполне определяют ее по напряжению и по направлению.

2. Равнодействующая системы сходящихся сил. Система действующих на абсолютно твердое тело сил (F_1, F_2, \dots, F_n), обладающих тем свойством, что линии действия всех сил системы пересекаются в одной точке O , называется *системой сходящихся сил* (рис. 184). Очевидно, что этот случай приводится к предыдущему, ибо все силы мы можем перенести по линии их действия в точку O и заменить данную систему сил системой сил, приложенных в точке O . Следовательно, система сходящихся сил имеет равнодействующую, равную сумме этих сил и проходящую через точку, в которой пересекаются линии действия сил.

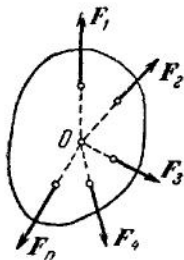


Рис. 184.

3. Условия равновесия. Как мы установили, всякая система сходящихся сил (в том числе и сил, приложенных в одной точке) имеет равнодействующую; поэтому для равновесия этой системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая системы R была равна нулю, т. е.

$$R = \sum_{i=1}^n F_i = 0. \quad (7)$$

Это — условие равновесия в векторной форме. В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат, т. е. в *аналитической форме*, условия равновесия, согласно (5), представляются в виде

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (8)$$

Следовательно, для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций всех сил на каждую из осей координат была равна нулю. Для плоской системы сил будем иметь в проекциях на оси координат только два условия равновесия.

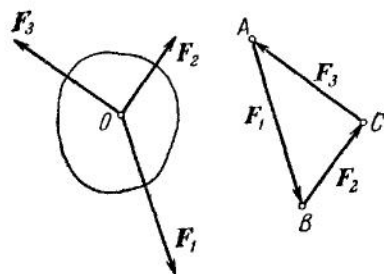


Рис. 185.

Наконец, так как при $R = 0$ силовой многоугольник замкнется, т. е. конец последней силы совпадает с началом первой (см. рис. 183), получаем следующее условие равновесия сходящихся сил в *геометрической форме*: для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы векторный (силовой) многоугольник, построенный из сил системы, был замкнутым.

Так, например, чтобы узнать, будет ли в равновесии система трех сил (F_1, F_2, F_3) (рис. 185), из какой-либо произвольной точки A

проводим вектор, равный силе F_1 , от его конца B проводим вектор, равный силе F_2 , и от конца C этого вектора — вектор, равный силе F_3 . Если векторный (силовой) треугольник ABC оказывается замкнутым, то рассматриваемая система сил находится в равновесии.

4. Теорема о трех силах. Если плоская система трех непараллельных сил находится в равновесии, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Пусть плоская система трех сил F_1 , F_2 , F_3 , приложенных в точках A_1 , A_2 , A_3 , находится в равновесии (рис. 186). Предположим, что линии действия сил F_1 , F_2 пересекаются в точке O ; перенесем эти две силы F_1 , F_2 по линиям их действия в точку пересечения O и по правилу параллелограмма найдем их равнодействующую R_{12} . Тогда

$$(F_1, F_2, F_3) \sim (R_{12}, F_3).$$

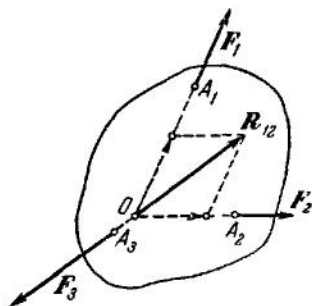


Рис. 186

Но система двух сил находится в равновесии только в том случае, если эти силы направлены по одной прямой. Следовательно, линия действия силы F_3 должна совпасть с линией действия силы R_{12} , которая проходит через точку O , т. е. пройдет через точку O .

Итак, для равновесия системы трех сил, лежащих в одной плоскости, необходимо (но недостаточно), чтобы линии действия этих сил пересекались в одной точке.

Этой теоремой иногда удобно пользоваться при решении задач на равновесие тел, находящихся под действием плоской системы трех сил, в частности для определения наперед неизвестных направлений реакций связей.

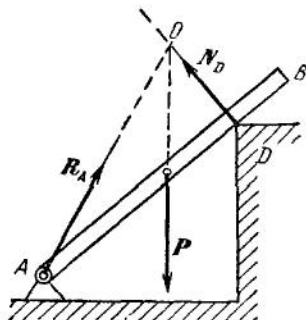


Рис. 187.

Пример. Рассмотрим однородный брус AB весом P , конец A которого закреплен шарниром и который опирается на выступ в точке D (рис. 187). На брус действуют три силы: сила тяжести P , приложенная в центре тяжести бруса, т. е. в его середине, реакция N_D опоры D , направленная перпендикулярно к брусу, и реакция R шарнира A , направление которой неизвестно. Но так как брус находится в равновесии, а линии действия сил P и N_D пересекаются в точке O , то по доказанной теореме и реакция R должна пройти через точку O , т. е. будет направлена вдоль линии AO .

5. Задачи. Решение задач статики сводится обычно или к определению условий, при которых тело под действием данных сил может

находиться в равновесии, или, когда тело заведомо находится в равновесии, к нахождению действующих на него при этом сил (в большинстве случаев реакций связей). Так как получаемые методами элементарной статики условия равновесия относятся к силам, действующим на абсолютно твердое тело, то при решении любой задачи следует прежде всего установить, равновесие какого именно тела надо рассмотреть для нахождения искомых величин. После этого, изобразив приложенные к телу активные силы, пользуются аксиомой связей, т. е. заменяют действия связей их реакциями и, рассматривая тело как свободное, составляют условия равновесия всех приложенных к телу сил (и активных и реакций связей). Из этих условий и определяются искомые величины.

В случае сходящихся сил, когда их общее число равно трем, проще пользоваться геометрическим методом решения, а при большем числе сил — аналитическим (или графическим). Если используется аналитический метод, то направления осей координат целесообразно выбирать так, чтобы проекции сил вычислялись возможно проще. Удобно также одну из осей направлять перпендикулярно к неизвестной силе; тогда соответствующее уравнение будет содержать меньше неизвестных.

Рассмотрим примеры.

1. Тяжелый шар весом P подвешен на стержне AB , прикрепленном к шару и к неподвижной точке A шарнирами (рис. 188), и удерживается в отклоненном положении горизонтальной силой Q . Найти, какой угол α образует стержень с вертикалью при равновесии и чему при этом равна реакция стержня. Весом стержня пренебречь.

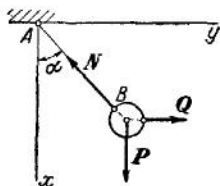


Рис. 188.



Рис. 189.

каются в одной точке. Следовательно, мы будем иметь для них в аналитической форме два условия равновесия. Проводя оси координат так, как показано на рисунке, получим:

$$\sum F_{ix} = P - N \cos \alpha = 0,$$

$$\sum F_{iy} = Q - N \sin \alpha = 0,$$

1) Стержень, если его весом пренебрегают, будет находиться в равновесии под действием только двух сил, приложенных к нему в точках A и B со стороны шарниров. Согласно аксиоме 2), эти силы должны быть направлены вдоль AB , т. е. вдоль стержня. Следовательно, и реакция со стороны стержня на шарнир B (а значит, и на шар) направлена тоже вдоль стержня (по закону действия и противодействия).

или $N \sin \alpha = Q$, $N \cos \alpha = P$. Отсюда находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}, \quad N = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Рассмотрим теперь геометрическое решение. Так как силы P , Q и N находятся в равновесии, то построенный из них многоугольник (в данном случае треугольник) должен замыкаться. Начиная построение с известных сил, откладываем от произвольной точки a (рис. 189) силу P , а от ее конца b — силу Q ; соединяя теперь конец с силы Q с точкой a , получаем замкнутый треугольник, в котором сторона ca дает искомую силу N . Из треугольника abc находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P}, \quad N = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

В данном случае при геометрическом методе решения расчеты оказываются несколько проще.

Наконец, задачу можно решить графически, если при построении силового треугольника abc изображать силы P и Q в определенном масштабе. Тогда, измерив сторону ca в том же масштабе, найдем напряжение силы N ; угол $\alpha = \angle bac$ также находится непосредственным измерением.

2. На плоскости, наклоненной к горизонту под углом α , находится тяжелый шар весом P , привязанный гибкой нерастяжимой нитью в точке A , причем угол β известен (рис. 190). Определить натяжение нити и давление шара на плоскость, пренебрегая трением.

Для решения задачи рассмотрим равновесие шара. На него действуют заданная сила P , реакция T нити, численно равная искомому натяжению и направленная вдоль нити, и реакция N плоскости, численно равная искомому давлению на плоскость и направленная по нормали к плоскости. Так как шар заведомо находится в равновесии, то построенный из этих сил треугольник должен быть замкнутым. Построение начинаем с известной силы P , откладывая ее от произвольной точки a ; через конец b вектора P проводим прямую, параллельную силе N , а через начало a — прямую, параллельную T . Пересечение этих прямых даст точку c , являющуюся одновременно концом вектора N и началом вектора T . Из построенного треугольника по теореме синусов находим:

$$\frac{T}{\sin \alpha} = \frac{N}{\sin \beta} = \frac{P}{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]}.$$

Отсюда

$$T = \frac{P \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad N = \frac{P \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

При чисто графическом решении значения T и N можно найти, измерив стороны bc и ca силового треугольника в масштабе силы P .

Искомое натяжение нити и давление на плоскость, как указывалось, численно равны T и N , но имеют противоположные силам T и N направления.

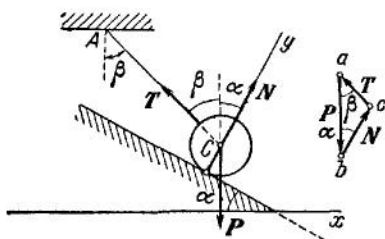


Рис. 190.

Задачу можно также решить аналитически, составив условия равновесия (направления осей показаны на рисунке):

$$\sum F_{ix} = P \sin \alpha - T \sin (\alpha + \beta) = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -P \cos \alpha + T \cos (\alpha + \beta) + N = 0.$$

Из полученных уравнений найдем те же значения для T и N , но расчет будет несколько длиннее, чем при геометрическом методе.

3. Горизонтальный стержень AB закреплен шарниром в точке B и поддерживается двумя тросами AC и AD , образующими с горизонтальной прямой CD , перпендикулярной к стержню, углы α и β (рис. 191); при этом плоскость ACD наклонена к горизонту под углом γ . В точке A подвешен груз весом P . Найти натяжения тросов и усилие в стержне, пренебрегая его весом.

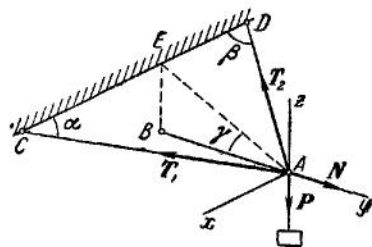


Рис. 191.

Для определения искомых величин рассматриваем равновесие точки (узла) A . На узел действует активная сила P и реакции T_1 , T_2 и N тросов и стержня, образующие систему сходящихся сил, не лежащих в одной плоскости. В таких случаях обычно пользуются тремя условиями равновесия в аналитической форме. Проводя ось Ax

параллельно DC , ось Ay — вдоль стержня и Az — по вертикали вверх, будем иметь (для вычисления проекций сил T_1 и T_2 на оси x и y находим сначала их проекции на прямую AE , лежащую в плоскости xy):

$$\sum F_{ix} = T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -T_1 \sin \alpha \cos \gamma - T_2 \sin \beta \cos \gamma + N = 0,$$

$$\sum F_{iz} = T_1 \sin \alpha \sin \gamma + T_2 \sin \beta \sin \gamma - P = 0.$$

Решая полученную систему уравнений, найдем окончательно:

$$T_1 = \frac{P \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta) \sin \gamma}, \quad T_2 = \frac{P \cos \alpha}{\sin (\alpha + \beta) \sin \gamma}, \quad N = P \operatorname{ctg} \gamma.$$

Все найденные величины положительны, следовательно, реакции связей направлены так, как показано на рисунке (тросы растягиваются, а стержень сжат).

§ 17. Трение и связи с трением

1. Трение скольжения. Связь, которая развивает реакцию, направленную по нормали к поверхности (или линии), служащей связью, называется идеальной связью¹⁾ или связью без трения. Связь с трением, кроме нормальной реакции N , развивает еще тангенциальную реакцию F , лежащую в касательной плоскости, проведенной через точку A , в которой тело соприкасается с поверхностью, служащей

¹⁾ Это понятие будет уточнено в главе V.

связью (рис. 192); если связью служит кривая, то тангенциальная реакция F направлена по касательной к этой кривой. В то время как нормальная реакция представляет собой давление связи на тело, тангенциальная реакция появляется благодаря силе трения.

Сила трения есть результат взаимодействия двух соприкасающихся под некоторым давлением тел. Эта сила возникает в точках соприкосновения, лежит в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел и препятствует скольжению одного тела относительно другого. Трение такого рода носит название трения *скольжения*.

Трение между двумя соприкасающимися телами происходит прежде всего вследствие шероховатости их поверхностей и наличия сцепления у прижатых друг к другу тел.

Несмотря на то, что трение есть одно из самых распространенных явлений природы и встречается почти во всех задачах механики, точные законы трения до сих пор не установлены вследствие трудностей, связанных с выявлением полной физической картины возникновения силы трения и с количественной оценкой всех факторов, от которых эта сила зависит. Поэтому практически при учете сил трения пользуются законами, которые носят в основном качественный характер и представляют собой только некоторое приближение к действительности. Эти законы были установлены в результате первых опытов над трением, проделанных Амонтоном (1699 г.), и более точных экспериментальных исследований Кулона (1781 г.).

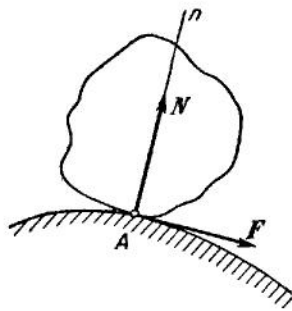


Рис. 192.

У 2. Законы трения скольжения. При рассмотрении явления трения следует различать статическое трение, имеющее место при относительном покое соприкасающихся тел, и трение движения, которое имеет место при относительном движении тел.

Установленные экспериментально законы трения скольжения при покое можно сформулировать так:

1) Сила трения скольжения действует в общей касательной плоскости к поверхностям соприкасающихся тел; численно сила трения имеет всякий раз то значение, которое необходимо для предотвращения относительного скольжения тел, но не может стать больше некоторой определенной предельной величины, т. е.

$$F \leq F_{\max}. \quad (1)$$

2) Величина предельной силы трения зависит от природы соприкасающихся тел и от возникающей при их взаимном давлении друг на друга нормальной реакции N и определяется равенством

$$F_{\max} = f_0 N, \quad (2)$$

где f_0 — отвлеченное число, называемое коэффициентом трения скольжения при покое (или статическим коэффициентом трения). Коэффициент f_0 зависит от материала, характера обработки и состояния (влажности, температуры и др.) трущихся поверхностей и определяется опытным путем.

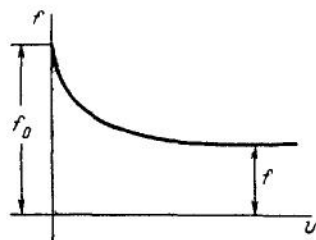


Рис. 193.

Представление о величине f_0 дают следующие данные: при трении дерева о дерево $f_0 = 0,4 \div 0,7$, при трении металла о металл $f_0 = 0,15 \div 0,25$.

При движении сила трения направлена в сторону, противоположную относительной скорости тела, а ее численная величина определяется равенством

$$F = fN, \quad (4)$$

где f — коэффициент трения скольжения при движении (или динамический коэффициент трения). Он также зависит от материала, степени обработки и состояния трущихся поверхностей и, кроме того, от скорости движения. Обычно с увеличением скорости величина f сначала несколько убывает, а затем сохраняет почти постоянное значение (рис. 193). Исключение составляет, например, трение кожи о металл, при котором f с увеличением скорости несколько возрастает.

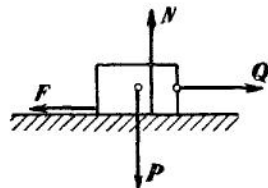


Рис. 194.

Пример. Пусть груз весом P лежит на горизонтальной плоскости (рис. 194) и пусть статический коэффициент трения груза о плоскость равен f_0 . В данном случае $N = P$. Тогда, если к грузу приложить горизонтальную силу Q , численно меньшую, чем $F_{\max} = f_0 P$, то груз останется в покое; при этом на него будет действовать сила трения, напряжение которой $F = Q < F_{\max}$. Чтобы сдвинуть груз, к нему надо приложить силу $Q_1 = f_0 N = f_0 P$. При движении с некоторой скоростью $v > 0$ сила трения станет равна $fP < f_0 P$ (когда $f < f_0$); поэтому если на груз будет продолжать действовать сила Q_1 , то он будет двигаться ускоренно. Равномерное движение груз будет совершать, если действующая сила $Q = fP < Q_1$.

3. Реакция связи с трением. Угол и конус трения. Полная реакция R связи с трением складывается геометрически из нормальной реакции N и перпендикулярной к ней силы трения F . Так как $F \leq F_{\max}$, то при данной величине N полная реакция может иметь

разные численные значения и образовывать разные углы с нормалью. Наибольшее значение R_{\max} полная реакция имеет при $F = F_{\max}$ (рис. 195). Образующий при этом реакцией R_{\max} угол φ с нормалью (наибольший из всех возможных углов отклонения) называется *углом трения*. Как видно из рисунка, $F_{\max} = N \operatorname{tg} \varphi$. Сравнивая этот результат с равенством (2), находим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\max}}{N} = f_0. \quad (5)$$

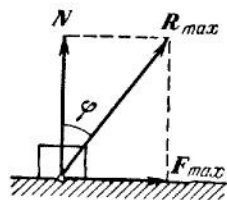


Рис. 195

Так как тело может перемещаться вдоль поверхности, реализующей связь, по любому направлению, то связь с трением может развить реакцию по всякому направлению, лежащему внутри конуса (вообще не кругового, если структура поверхности неоднородна), осью которого служит нормаль, а угол между осью и образующей равен углу трения φ (рис. 196). Отсюда, в частности, следует, что для равновесия тела, касающегося шероховатой поверхности в точке A , необходимо, чтобы все силы, действующие на тело, привелись к равнодействующей, проходящей через точку A и лежащей внутри конуса трения.

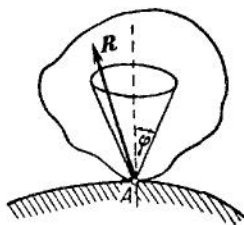


Рис. 196.

4. Задачи. При определении условий равновесия тел с учетом трения можно встретиться с задачами двух типов: а) задачи, в которых рассматривается предельное положение равновесия и сила трения считается равной ее предельному значению (2); б) задачи, в которых отыскиваются все возможные положения равновесия и величина силы трения определяется неравенством (3). В задачах второго типа решения получаются в виде неравенств, определяющих все множество значений искомых величин, при которых возможно равновесие (область равновесия).

1. Найти, при каком наибольшем угле наклона α (рис. 197) тяжелый груз, лежащий на наклонной плоскости, остается в равновесии, если коэффициент трения груза о плоскость равен f_0 .

На груз в рассматриваемом предельном положении действуют сила тяжести P , нормальная реакция N и предельная сила трения F_{\max} . Составля условия равновесия в проекциях на оси x и y (см. рисунок), будем иметь:

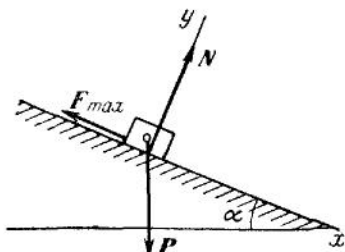


Рис. 197.

$$P \sin \alpha - F_{\max} = 0, \quad (a)$$

$$N - P \cos \alpha = 0. \quad (б)$$

Из (б) находим $N = P \cos \alpha$. Тогда $F_{\max} = f_0 N = f_0 P \cos \alpha$. Подставляя это значение в (а), получим $P (\sin \alpha - f_0 \cos \alpha) = 0$. Отсюда, согласно (б),

$$\operatorname{tg} \alpha = f_0 = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{или} \quad \alpha = \varphi.$$

Следовательно, наибольший угол наклона, при котором возможно равновесие, равен углу трения.

Если мы будем искать все углы α , при которых возможно равновесие, то тогда в уравнении (а) вместо F_{\max} будет стоять F и оно даст $F = P \sin \alpha$. Но в этом случае $F \leq f_0 N$ или $F \leq f_0 P \cos \alpha$ и мы получим, что $P \sin \alpha \leq f_0 P \cos \alpha$, откуда

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f_0 \quad \text{или} \quad \alpha \leq \varphi. \quad (\text{в})$$

Следовательно, равновесие вообще возможно при любом угле наклона, меньшем угла трения или равном ему. Неравенство (в) определяет область равновесия.

2. К ползуну A весом P , который может скользить вдоль вертикальных направляющих (рис. 198), прикреплена нить, перекинутая через блок B и несущая на конце груз весом Q . Коэффициент трения ползуна о направляющие равен f_0 . Зная угол α , определить, при каком соотношении между P и Q возможно равновесие. Трением в блоке пренебречь.

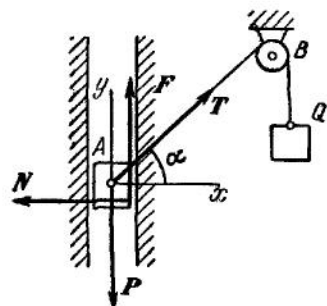


Рис. 198.

Рассматриваем равновесие ползуна, пренебрегая его размерами. На ползун действуют сила P , натяжение нити T , численно равное Q , нормальная реакция N и сила трения F , которая может быть направлена или вверх (когда $P > Q \sin \alpha$), или вниз (когда $P < Q \sin \alpha$). Составляя условия равновесия в проекциях на оси x и y , будем иметь:

$$T \cos \alpha - N = 0, \quad T \sin \alpha - P \pm F = 0. \quad (\text{а})$$

Так как $T = Q$, то отсюда $N = Q \cos \alpha$ и $F = \pm (P - Q \sin \alpha)$. Но $F \leq f_0 N$ или $F \leq f_0 Q \cos \alpha$. В результате приходим к двум неравенствам:

$$\begin{aligned} P - Q \sin \alpha &\leq f_0 Q \cos \alpha, \\ -(P - Q \sin \alpha) &\leq f_0 Q \cos \alpha, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$(\sin \alpha + f_0 \cos \alpha) \geq \frac{P}{Q} \geq (\sin \alpha - f_0 \cos \alpha). \quad (\text{б})$$

Так как $f_0 = \operatorname{tg} \varphi$, то неравенство (б) можно еще представить в виде

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi} \geq \frac{P}{Q} \geq \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (\text{в})$$

Полученный результат показывает, в каких границах можно изменять отношение P/Q , не нарушая равновесия (т. е. определяет область равновесия). При отсутствии трения ($f_0 = 0$) равновесие, как видно из (б), возможно, только когда $P = Q \sin \alpha$.

Отметим еще, что если весом ползуна по сравнению с весом груза можно пренебречь и считать $P/Q = 0$, то условие равновесия (в) принимает вид

$$\sin(\alpha - \varphi) \leq 0 \quad \text{или} \quad \alpha \leq \varphi,$$

т. е. сводится к тому, что участок AB нити должен лежать внутри угла трения (см. п. 3); при этом система будет в равновесии, каков бы ни был груз Q (самотормозящее устройство).

3. Лестница опирается концами A и B на горизонтальный пол и вертикальную стену (рис. 199). Пренебрегая весом лестницы, определить, при каких положениях стоящего на ней человека система остается в равновесии. Углы трения φ_A и φ_B в точках A и B известны.

Решим задачу графически. На лестницу действуют сила тяжести P , равная весу человека, и реакции R_A и R_B в точках A и B , которые могут иметь любые направления внутри углов трения. При равновесии эти силы должны пересекаться в одной точке.

Но реакции R_A и R_B могут пересечься где угодно внутри заштрихованной на чертеже площади. Следовательно, при равновесии линия действия силы P должна пересекать эту площадь. Поэтому при том положении лестницы, которое показано на рисунке, человек может подняться только до точки D . Чтобы человек мог дойти до верхнего конца B лестницы, угол α , который она образует с вертикалью, должен быть не больше угла трения φ_A (от трения в точке B этот результат не зависит).

При отсутствии трения реакции будут нормальными и пересекутся в точке O . Равновесие будет возможно только тогда, когда человек стоит в точке A лестницы.

5. Трение гибкой нити о цилиндрическую поверхность. Рассмотрим нить, касающуюся поверхности кругового цилиндра вдоль дуги ADB с центральным углом α (рис. 200). Коэффициент трения нити о цилиндр равен f_0 . К одному концу нити приложена сила P . Найдем, какую наименьшую силу Q надо приложить

к другому концу, чтобы сохранить равновесие. Для этого рассмотрим равновесие элемента нити DE длины $ds = R d\theta$, где R — радиус цилиндра. На него действуют приложенные в точках D и E натяжения нити $T + dT$ и T , нормальная реакция dN и сила трения dF . Составляя условия равновесия в проекциях на касательную τ и нормаль n и считая $\sin \frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} \approx 1$, будем иметь (пренебрегая

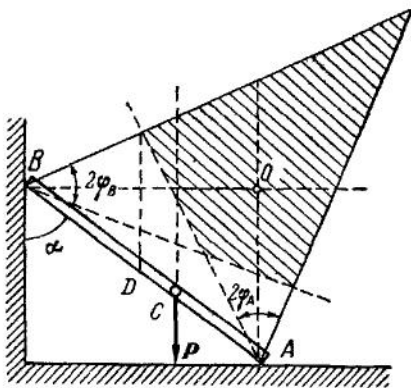


Рис. 199.

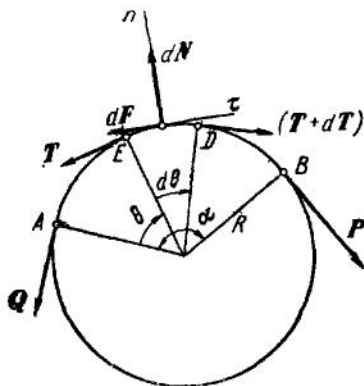


Рис. 200.

малыми высшего порядка):

$$dT = dF, \quad dN = 2T \sin \frac{d\theta}{2} = T d\theta. \quad (6)$$

Но так как рассматриваемое положение равновесия является предельным, то $dF = f_0 dN$. Подставляя сюда значения dF и dN из равенств (6), получим:

$$dT = f_0 T d\theta.$$

Так как натяжение нити в точках A и B равно соответственно P и Q , то, разделяя в полученном уравнении переменные и беря от обеих частей определенные интегралы в соответствующих пределах, получим:

$$\int_Q^P \frac{dT}{T} = f_0 \int_0^\alpha d\theta \quad \text{или} \quad \ln \frac{P}{Q} = f_0 \alpha,$$

откуда

$$Q = P e^{-f_0 \alpha}. \quad (7)$$

Формула (7), найденная Эйлером, показывает, что уравновешивающая сила Q не зависит от радиуса цилиндра и при данном f_0 быстро убывает с увеличением α .

Пример. При трении пенькового каната о дерево $f_0 = 0,5$. Если обернуть такой канат вокруг столба два раза ($\alpha = 4\pi$), то будет $Q = P e^{-2\pi} \approx 0,002P$; натяжение в $1 T$ можно при этом уравновесить силой в 2 кг .

6. Трение качения. Опыт показывает, что для качения тяжелого цилиндра (катка) по горизонтальной плоскости к оси цилиндра необходимо приложить некоторую горизонтальную силу Q для того, чтобы преодолеть сопротивление, возникающее при качении цилиндра. Это сопротивление носит название *трения качения*.

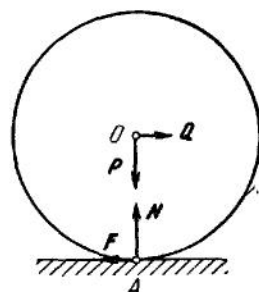


Рис. 201.

Трение качения возникает оттого, что поверхность катящегося тела и плоскость, по которой тело катится, не абсолютно тверды, а несколько деформируются вследствие давления тела на плоскость.

Допустим сначала, что цилиндр и плоскость являются абсолютно твердыми и касаются друг друга в точке A . Чтобы могло происходить качение без скольжения, их поверхности должны быть шероховатыми. Пусть к оси цилиндра приложена горизонтальная сила Q , величина которой меньше F_{\max} (рис. 201). Тогда точка касания цилиндра A скользить вдоль плоскости не будет. На цилиндр при

этом будут действовать две взаимно уравновешивающиеся силы: сила тяжести P и приложенная в точке A нормальная реакция N , и две другие силы: сила Q и препятствующая скольжению точки A сила F , которые не могут уравновесить друг друга (см. аксиому 2). Под действием этих сил и началось бы качение цилиндра при любой сколь угодно малой силе Q .

В действительности картина будет иной. Вследствие деформации тел под действием сил P и N их касание происходит не в точке, а вдоль некоторой площадки (рис. 202). При действии силы Q , направленной вправо, давление у левого края убывает, а у противоположного — возрастает. При этом нормальная реакция N смещается вправо в некоторую точку B и вместе с силой трения скольжения F (см. рис. 201) дает равнодействующую N_1 , которая проходит через ось O цилиндра и уравновешивает силы P и Q . Как видно из соответствующего силового треугольника, с увеличением силы Q сила N_1 , чтобы уравновесить систему, должна образовывать все больший угол α

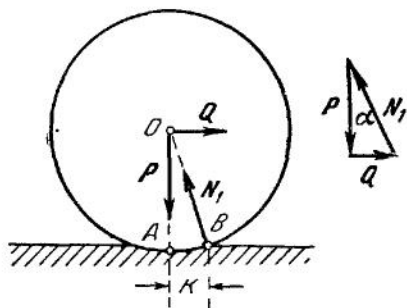


Рис. 202.

с вертикалью, т. е. точка B приложения реакции N должна все больше смещаться вправо. Но это смещение имеет известный предел, зависящий от свойств материалов соприкасающихся тел; обозначим его через k . Тогда, если Q имеет наибольшее значение $Q_{\text{пр}}$, при котором еще возможно равновесие, то $AB = k$. Значение $Q_{\text{пр}}$ можно найти из подобия силового треугольника и $\triangle OAB$. Считая приближенно $OA = R$, где R — радиус цилиндра, будем иметь $Q_{\text{пр}}/P = k/R$ или

$$Q_{\text{пр}} = \frac{k}{R} P. \quad (8)$$

Если $Q < Q_{\text{пр}}$, то цилиндр находится в покое, а при $Q > Q_{\text{пр}}$ начинается качение. Входящая в равенство (8) линейная величина k называется *коэффициентом трения при качении*. Измеряют k обычно в сантиметрах и определяют опытным путем. Например, при качении вагонного колеса по рельсу $k = 0,005$ см, а для шариковых подшипников (закаленная сталь) $k = 0,001$ см.

Отношение k/R для большинства материалов значительно меньше, чем коэффициент трения скольжения f . Поэтому в технике, когда это возможно, трение скольжения стремятся заменить трением качения (колеса, катки, шариковые подшипники и т. п.).

§ 18. Параллельные силы

1. Система двух параллельных сил, направленных в одну сторону. Рассмотрим сначала систему двух параллельных сил P и Q , направленных в одну сторону и действующих на абсолютно твердое тело (рис. 203). Так как сила, действующая на твердое тело, есть вектор скользящий, то достаточно знать только линию действия каждой силы и ее напряжение, а за точку приложения можно брать любую точку на линии действия соответствующей силы, например точку A для силы P и точку B для силы Q . Соединим эти точки прямой AB и приложим в них две численно равные силы S и S' , направленные по прямой AB в противоположные стороны. Очевидно, система

$$(S, S') \sim 0.$$

Теперь, сложив силы P, S и силы Q и S' , получим их равнодействующие R_1 и R_2 . Система $(P, Q) \sim (P, Q, S, S')$, следовательно,

$$(P, Q) \sim (R_1, R_2).$$

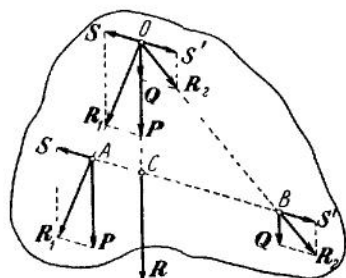


Рис. 203.

Продолжим линии действия сил R_1 и R_2 до их пересечения в точке O и перенесем R_1, R_2 в эту точку. Теперь

каждую силу R_1, R_2 разложим по правилу параллелограмма на составляющие силы P и S, Q и S' , параллельные прямой AB и силам P и Q . Таким образом, наша система сил свелась к системе сил, приложенных в одной точке O .

Рассмотрим систему четырех сил (P, Q, S, S') в точке O . Систему сил (S, S') , как эквивалентную нулю, отбросим; остаются две силы P и Q . Эти силы направлены в одну сторону и действуют по одной прямой, которая параллельна линиям действия сил P и Q ; следовательно, равнодействующая этих сил $R = P + Q$ будет по модулю равна сумме модулей слагаемых сил, т. е.

$$R = P + Q, \quad (1)$$

и направлена параллельно данным силам. Из подобия соответствующих треугольников имеем:

$$\frac{P}{OC} = \frac{S}{AC}, \quad \frac{Q}{OC} = \frac{S'}{CB}.$$

Разделив почленно одну пропорцию на другую, получим:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB}{AC}, \quad \text{откуда} \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC}.$$

Таким образом, точка C находится на отрезке AB и делит его внутренним образом на части, обратно пропорциональные силам. Составив из последней пропорции производную пропорцию, получим:

$$\frac{P+Q}{AC+CB} = \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC},$$

или, так как $P+Q=R$, а $AC+CB=AB$,

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (2)$$

Из равенств (2) легко определить отрезки AC и CB .

Итак, система двух параллельных сил, направленных в одну сторону, имеет равнодействующую, которая по модулю равна сумме модулей данных сил, параллельна им и направлена в ту же сторону. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные данным силам, внутренним образом.

Решим теперь задачу о разложении данной силы R на две параллельные. Такое разложение, как и в случае сходящихся сил, может быть проведено бесконечным множеством способов. Для определенности задачи недостаточно также задать только напряжения P и Q слагаемых сил, ибо и это разложение может быть совершенно бесконечным множеством способов, лишь бы только точки A и B приложения слагаемых сил P и Q удовлетворяли только что выведенному соотношению (2).

Задача станет вполне определенной, когда будут заданы или напряжение и линия действия одной из слагаемых сил, или линии действия обеих слагаемых сил.

Пусть, например, требуется силу R (рис. 204), приложенную в точке C , разложить на две параллельные ей силы так, чтобы одна сила была приложена в точке A и напряжение ее было равно P (AC и P заданы). Напряжение второй слагаемой силы Q и точка ее приложения B определяются тогда из соотношений

$$R = P + Q, \quad \frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC},$$

откуда

$$Q = R - P, \quad CB = \frac{P}{Q} AC.$$

Пусть теперь силу R требуется разложить на две параллельные силы (рисунок тот же), приложенные в точках A и B (AC и CB заданы). Тогда напряжения P и Q определяются из соотношений

$$P = R \frac{CB}{AB}, \quad Q = R \frac{AC}{AB}.$$

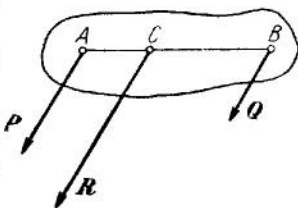


Рис. 204.

Отметим в заключение следующее. Равенства (2), очевидно, сохраняются, если силы P и Q считать приложенными в точках A_1 и B_1 , лежащих на общем перпендикуляре к линиям действия этих сил (рис. 205). Тогда, полагая $A_1C = p$, $CB_1 = q$, будем иметь:

$$\frac{P}{Q} = \frac{CB_1}{A_1C} = \frac{q}{p},$$

откуда

$$Pp = Qq. \quad (3)$$

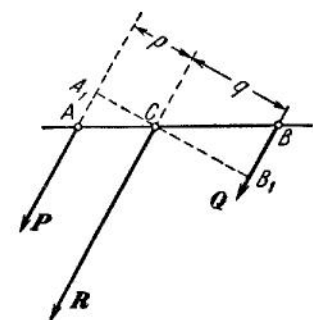


Рис 205

Расстояние от точки C до линии действия силы называется *плечом* силы относительно точки C ; например, p есть плечо силы P относительно точки C . Произведение силы на плечо представляет собой числовое значение величины, называемой *моментом* силы относительно данной точки. Таким образом, формула (3) показывает, что моменты параллельных сил относительно любой точки, находящейся на линии действия их равнодействующей, равны между собой по числовому значению.

2. Система двух параллельных сил, направленных в противоположные стороны (антипараллельных). Две параллельные силы, направленные в противоположные стороны, называют антипараллельными. Пусть мы имеем систему антипараллельных сил P и Q , не равных по модулю и приложенных в точках A и B . (рис. 206). Разложим большую силу P на две параллельные силы R и Q_1 , из которых одну (Q_1), равную по напряжению силе Q , приложим в точке B так, что силы Q и Q_1 будут действовать по одной прямой в разные стороны. Тогда напряжение другой силы R и точка ее приложения C определяются из соотношений вида (1) и (2), которые, учитывая, что $Q_1 = Q$, дают:

$$R = P - Q, \quad (4)$$

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{R}{AB}. \quad (5)$$

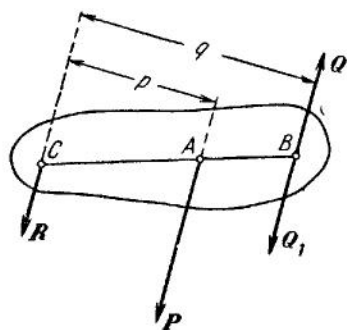


Рис 206

Сила R , модуль и направление которой определяются равенствами (4), (5), и будет равнодействующей системы антипараллельных сил P и Q . Действительно, $(P, Q) \sim (R, Q_1, Q)$; но система $(Q_1, Q) \sim 0$, следовательно,

$$(P, Q) \sim R.$$

Итак, система двух антипараллельных сил имеет равнодействующую, которая равна по модулю разности модулей этих сил, им параллельна и направлена в сторону большей силы. Линия действия равнодействующей проходит через точку, которая лежит на продолжении отрезка BA и делит этот отрезок на части, обратно пропорциональные силам, внешним образом.

Задача разложения данной силы на две антипараллельные является опять задачей неопределенной; она становится определенной, если заданы положение и напряжение одной силы или линии действия обеих слагаемых сил. Это разложение проводится таким же способом, как и в случае параллельных сил.

Из равенств (5) легко найти, что и для антипараллельных сил имеет место соотношение (3), т. е. что моменты этих сил относительно любой точки на линии действия их равнодействующей равны по числовому значению (см. рис. 206).

3. Пара сил. Хотя формулы (4) и (5) получены для случая, когда $P \neq Q$, мы можем с их помощью рассмотреть, что произойдет с равнодействующей двух антипараллельных сил, если модуль одной из них, например P , будет приближаться к Q . Из равенства (4) видно, что при $P \rightarrow Q$ будет $R \rightarrow 0$. Равенство же (5), которое можно представить в виде

$$AC = \frac{Q}{R} AB,$$

показывает, что при $R \rightarrow 0$ расстояние $AC \rightarrow \infty$, т. е. что точка C , где приложена равнодействующая, при $P \rightarrow Q$ уходит в бесконечность. Этот результат можно истолковать в том смысле, что при $P = Q$ две антипараллельные силы одной какой-нибудь силой заменить нельзя.

Система двух равных по модулю антипараллельных сил, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 207), называется *парой сил*. Пара сил, как будет доказано, действительно не имеет равнодействующей, т. е. не может быть заменена одной эквивалентной ей силой. Поэтому пара сил является в статике таким же самостоятельным элементом, как сила. Ее свойства будут рассмотрены отдельно в § 21.

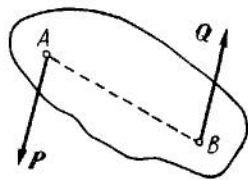


Рис. 207

4. Система многих параллельных сил. Рассмотрим две параллельные силы P_1 и P_2 , приложенные в точках A и B и направленные в одну сторону. Пусть оси выбранной системы координат будут $Oxuz$. Положение точек A и B вполне определится заданием радиусов-векторов r_1 и r_2 , проведенных из начала координат в точки A и B (рис. 208). Проекциями этих векторов на оси координат

являются, очевидно, координаты точек A и B , т. е.

$$r_1(x_1, y_1, z_1), \quad r_2(x_2, y_2, z_2).$$

Определим положение точки C , через которую проходит равнодействующая R сил P_1 и P_2 , т. е. определим радиус-вектор r_0 точки C , зная радиусы-векторы r_1 и r_2 точек A и B . Заметим, что $r_1 + \overline{AC} = r_0$, $r_0 + \overline{CB} = r_2$, откуда

$$\overline{AC} = r_0 - r_1, \quad \overline{CB} = r_2 - r_0.$$

С другой стороны, положение точки C определяется соотношением

$$\frac{AC}{P_2} = \frac{CB}{P_1} \quad \text{или} \quad \frac{\overline{AC}}{P_2} = \frac{\overline{CB}}{P_1},$$

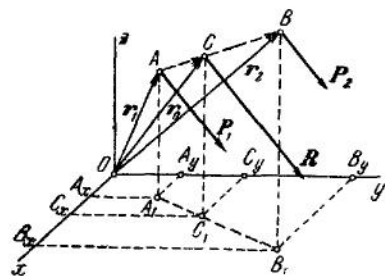


Рис 208.

так как векторы \overline{AC} и \overline{CB} коллинеарны. Подставляя вместо \overline{AC} и \overline{CB} их значения, получим:

$$\frac{r_0 - r_1}{P_2} = \frac{r_2 - r_0}{P_1},$$

откуда

$$r_0 = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2}{P_1 + P_2}. \quad (6)$$

Итак, если даны P_1 , P_2 , r_1 , r_2 , то вектор r_0 , определяющий положение точки C , находится по формуле (6). Проектируя обе части этого векторного равенства на оси координат, получим координаты точки C :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2}{P_1 + P_2}, \\ y_0 &= \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2}{P_1 + P_2}, \\ z_0 &= \frac{P_1 z_1 + P_2 z_2}{P_1 + P_2}. \end{aligned}$$

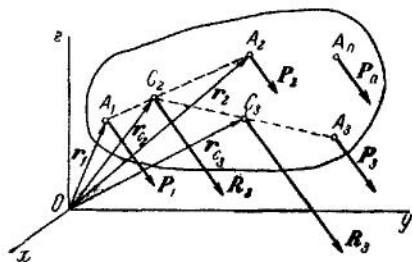


Рис 209

Перейдем теперь к системе n параллельных сил $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, приложенных в точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ и направленных в одну сторону (рис. 209). Найдем сначала точку C_2 , через которую проходит равнодействующая R_2 двух сил P_1 и P_2 , потом точку C_3 , через которую проходит равнодействующая R_3 сил R_2 и P_3 , т. е. трех сил P_1, P_2, P_3 , и т. д. На основании формулы (6) радиус-вектор r_{C_2} ,

определяющий положение точки C_2 , будет:

$$r_{C_2} = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2}{P_1 + P_2}. \quad (7)$$

При этом $P_1 + P_2 = R_2$.

Таким же образом радиус-вектор r_{C_3} точки C_3 , через которую проходит равнодействующая R_3 сил R_2 и P_3 , т. е. сил P_1 , P_2 , P_3 , представится, если учесть равенство (7), в виде

$$r_{C_3} = \frac{R_2 r_{C_2} + P_3 r_3}{R_2 + P_3} = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2 + P_3 r_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{\sum_{i=1}^3 P_i r_i}{\sum_{i=1}^3 P_i}.$$

Замечая общий закон составления выражений для радиусов-векторов, докажем по методу полной индукции переходом от k сил к $k+1$, что этот закон справедлив для любого числа сил. Имеем для точки C_k , где приложена равнодействующая k сил R_k ,

$$r_{C_k} = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2 + \dots + P_k r_k}{P_1 + P_2 + \dots + P_k}. \quad (8)$$

Складываем силу R_k с силой P_{k+1} ; принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \overline{C_k C_{k+1}} &= r_{C_{k+1}} - r_{C_k}, \\ \overline{C_{k+1} A_{k+1}} &= r_{k+1} - r_{C_{k+1}}, \end{aligned}$$

будем иметь:

$$r_{C_{k+1}} = \frac{R_k r_{C_k} + P_{k+1} r_{k+1}}{R_k + P_{k+1}}, \quad (9)$$

причем

$$R_k = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_k. \quad (10)$$

Подставляя значения r_{C_k} и R_k из (8) и (10) в равенство (9), получим:

$$r_{C_{k+1}} = \frac{P_1 r_1 + P_2 r_2 + \dots + P_k r_k + P_{k+1} r_{k+1}}{P_1 + P_2 + \dots + P_k + P_{k+1}} = \frac{\sum_{i=1}^{k+1} P_i r_i}{\sum_{i=1}^{k+1} P_i},$$

что и требовалось доказать. Численная величина равнодействующей равна, очевидно, сумме величин заданных сил

$$R = \sum P_i \dots \quad (11)$$

Точка, через которую проходит равнодействующая системы параллельных сил, направленных в одну сторону, определяемая по формуле

$$r_0 = \frac{\sum_{i=1}^n P_i r_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad (12)$$

называется *центром параллельных сил*.

Проектируя обе части равенства (12) на оси координат, найдем выражения для координат x_0 , y_0 , z_0 центра параллельных сил:

$$x_0 = \frac{\sum_i P_i x_i}{\sum_i P_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_i P_i y_i}{\sum_i P_i}, \quad z_0 = \frac{\sum_i P_i z_i}{\sum_i P_i}, \quad (13)$$

где x_i , y_i , z_i — координаты точки приложения силы P_i .

Если повернем данные силы на один и тот же угол, сохраняя их точки приложения, то и равнодействующая этих сил повернется на тот же угол, причем положение центра параллельных сил не изменится, так как формулы (12) или (13) показывают, что положение центра от направления сил не зависит, а зависит только от модулей данных сил и от их точек приложения.

Когда нам дана система параллельных сил, направленных в разные стороны, то мы можем разделить силы этой системы на две группы, из которых каждая включает силы, направленные только в одну сторону. Находя равнодействующую каждой группы, мы приведем данную систему к системе двух антипараллельных сил, а эта система, как известно, приводится или к одной силе (равнодействующей), или к паре сил. Легко также проверить, что для определения R и r_0 (при $R \neq 0$) можно непосредственно пользоваться формулами (11) и (12) [или (13)], беря в них значения P_i для сил, направленных в какую-нибудь одну сторону, со знаком плюс, а в противоположную — со знаком минус.

5. Статические моменты. Для определения радиуса-вектора центра параллельных сил мы получили формулу (12). В этой формуле выражение $\sum_{i=1}^n P_i r_i$ носит название *статического момента* системы параллельных сил *относительно центра* O . Этот статический момент, как видно из (12), равен произведению радиуса-вектора центра параллельных сил на сумму всех сил, т. е.

$$\sum_{i=1}^n P_i r_i = r_0 \sum_{i=1}^n P_i. \quad (14)$$

Точно так же входящее в равенства (13) выражение $\sum_i P_i x_i$ носит название *статического момента* системы параллельных сил *относительно плоскости уз* и т. д. Как видно из формул (13),

$$\sum_i P_i x_i = x_0 \sum_i P_i, \quad \sum_i P_i y_i = y_0 \sum_i P_i, \quad \sum_i P_i z_i = z_0 \sum_i P_i. \quad (15)$$

§ 19. Центр тяжести

1. Общие понятия. Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется силой тяжести, численная величина этой силы равна весу тела. Сила тяжести имеет направление нити, один конец которой неподвижно закреплен, а к другому привязан тяжелый груз. Это направление называется отвесным или вертикальным, плоскость, перпендикулярная к вертикали, называется горизонтальной плоскостью.

Если разбить тело на множество элементарных частиц, то сила тяжести, действующая на каждую такую частицу, будет приложена

в точке, которую можно считать совпадающей с самой частицей. Когда рассматриваемое тело невелико (по сравнению с радиусом Земли), направления этих сил будут практически между собой параллельны. Равнодействующая всех сил тяжести, действующих на частицы тела, будет численно равна весу тела, а ее линия действия будет проходить через вполне определенную точку, совпадающую с центром параллельных сил тяжести частиц тела. При изменении ориентировки тела в пространстве, что соответствует изменению направлений сил относительно тела, эта точка, согласно свойству центра параллельных сил, не изменяет своего положения по отношению к телу. Точка, являющаяся центром параллельных сил тяжести частиц тела, называется *центром тяжести* данного тела. Таким образом, нахождение центра тяжести сводится к нахождению центра параллельных сил.

Пусть мы имеем некоторое тело (рис. 210) Разобьем его на отдельные малые частицы и обозначим через v объем всего тела, через Δv — объем какой-нибудь частицы, а через ΔP вес этой частицы. Величина

$$\gamma = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta v} = \frac{dP}{dv} \quad (1)$$

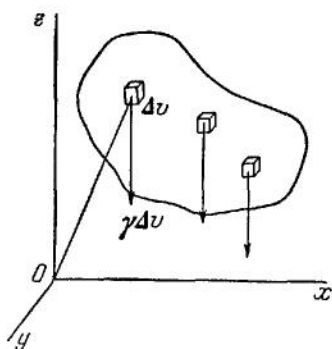


Рис 210

называется весом единицы объема тела в данной точке (численно γ равняется удельному весу), а величина

$$\rho = \frac{\gamma}{g} \quad (2)$$

называется *плотностью* тела (масса единицы объема) в данной точке.

Вообще γ и ρ суть функции координат точек тела (непрерывные или прерывные); если же тело однородно, то γ и ρ постоянны для данного тела. Очевидно, что единицей измерения для γ в технической системе единиц будет 1 кг/м^3 , а для ρ — $1 \text{ кгсек}^2/\text{м}^4$.

Из определения γ и ρ следует, что вес любой частицы с объемом Δv_i будет:

$$\Delta P_i = \gamma_i \Delta v_i = g_i \rho_i \Delta v_i.$$

Если все силы тяжести частиц мы будем считать параллельными, то их равнодействующая будет численно равна сумме весов всех частиц, т. е. весу тела. Радиус-вектор и координаты точки приложения этой равнодействующей определятся как радиус-вектор (координаты) центра параллельных сил формулами ¹⁾

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum P_i \mathbf{r}_i}{\sum P_i} = \frac{\sum \gamma \Delta v \mathbf{r}}{\sum \gamma \Delta v}, \quad (3)$$

$$x_0 = \frac{\sum \gamma \Delta v x}{\sum \gamma \Delta v}, \quad y_0 = \frac{\sum \gamma \Delta v y}{\sum \gamma \Delta v}, \quad z_0 = \frac{\sum \gamma \Delta v z}{\sum \gamma \Delta v} \quad (3')$$

и будут искомыми координатами центра тяжести тела.

Если теперь мы вес единицы объема γ_i заменим величиной $g_i \rho_i$, то формулы (3), (3') примут вид

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum \rho g \Delta v \cdot \mathbf{r}}{\sum \rho g \Delta v}, \quad (4)$$

$$x_0 = \frac{\sum \rho g \Delta v x}{\sum \rho g \Delta v}, \quad y_0 = \frac{\sum \rho g \Delta v y}{\sum \rho g \Delta v}, \quad z_0 = \frac{\sum \rho g \Delta v z}{\sum \rho g \Delta v}. \quad (4')$$

Допустим, что тело достаточно мало. Тогда g_i можно сократить, так как ускорение силы тяжести для всех точек тела будет в данном случае одно и то же, и формулы (4), (4') примут следующий вид:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum \rho \Delta v \cdot \mathbf{r}}{\sum \rho \Delta v}, \quad (5)$$

$$x_0 = \frac{\sum \rho \Delta v x}{\sum \rho \Delta v}, \quad y_0 = \frac{\sum \rho \Delta v y}{\sum \rho \Delta v}, \quad z_0 = \frac{\sum \rho \Delta v z}{\sum \rho \Delta v}, \quad (6)$$

где $\sum \rho \Delta v$ есть масса всего тела.

¹⁾ Индекс суммирования i в формулах (3) — (6) и далее для упрощения записей опускаем.

Формулами (5) и (6) определяются соответственно радиус-вектор или координаты *центра масс (центра инерции)* тела. Как видно из этих формул, положение центра масс зависит только от распределения масс в объеме, занимаемом телом. Понятие о центре масс является более общим, чем понятие о центре тяжести, так как оно имеет смысл не только для одного твердого тела, но и для любой механической системы; кроме того, это понятие не связано с тем, находится тело в поле тяжести или нет. Для тела, находящегося в однородном поле тяжести (в поле тяжести, где $\mathbf{g} = \text{const}$), положения центра тяжести и центра масс совпадают.

Заметим, что центр тяжести (или центр масс) есть точка геометрическая, которая может не совпадать ни с одной из частиц тела (например, для кольца).

Если γ и ρ будут непрерывными функциями координат точек тела, то входящие во все полученные формулы суммы будут в пределе представлять собой интегралы, взятые по объему тела.

Если тело однородно, то мы можем в формулах (3) и (3') или (5) и (6) сократить γ или ρ ; тогда получим:

$$r_0 = \frac{\int r \, dv}{v} \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{\int x \, dv}{v}, \quad y_0 = \frac{\int y \, dv}{v}, \quad z_0 = \frac{\int z \, dv}{v}. \quad (7)$$

Эти формулы определяют координаты так называемого центра тяжести *объема* тела.

Мы видим, что определение положения центра тяжести (или центра масс) однородного тела является задачей чисто геометрической и сводится к отысканию центра тяжести объема этого тела.

Величины, стоящие в числителях выражений (7), называются *статическими моментами*, причем $\int r \, dv$ есть статический момент объема относительно начала координат O , а $\int x \, dv$ — статический момент объема относительно плоскости yz и т. д.

Иногда приходится находить центр тяжести пластинок (плоских фигур). Толщина пластинки (например, листа железа) по сравнению с двумя другими ее измерениями очень мала и всюду одинакова, поэтому мы можем находить центр тяжести не объема, а площади. В данном случае вес частицы тела будет равен $\gamma' \Delta S$, где γ' — вес единицы площади (единицей измерения величины γ' будет 1 кг/м^2), а ΔS — элемент площади. Тогда радиус-вектор и координаты центра тяжести пластинки, расположенной в плоскости xu , будут определяться формулами

$$r_0 = \frac{\sum \gamma' \Delta S \cdot r}{\sum \gamma' \Delta S} \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{\sum \gamma' \Delta S \cdot x}{\sum \gamma' \Delta S}, \quad y_0 = \frac{\sum \gamma' \Delta S \cdot y}{\sum \gamma' \Delta S}. \quad (8)$$

Для однородного тела γ' , как и в предыдущем случае, можем сократить; тогда $\sum \Delta S$ даст площадь S данной фигуры, а суммы в числителях формул (8) заменятся интегралами, взятыми по площади всей фигуры,

$$r_0 = \frac{\int r dS}{S} \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{\int x dS}{S}, \quad y_0 = \frac{\int y dS}{S}. \quad (9)$$

Сумма $\sum x \Delta S$ произведений элементов площади на их координаты x называется *статическим моментом площади* относительно оси y , а $\sum y \Delta S$ — статическим моментом площади относительно оси x .

В некоторых случаях требуется найти центр тяжести материальной линии, т. е. тела, у которого площадь поперечного сечения всюду одинакова и очень мала по сравнению с длиной (например, какой-либо фигуры, сделанной из проволоки). Пусть вес единицы длины будет γ'' (единицей измерения величины γ'' будет 1 кг/м). Разобьем длину линии на элементы длины Δl . Тогда определение центра тяжести тела сведется к определению центра тяжести линии, положение которого найдется по формулам

$$r_0 = \frac{\sum \gamma'' \Delta l \cdot r}{\sum \gamma'' \Delta l} \quad (10)$$

$$\text{или} \quad x_0 = \frac{\sum \gamma'' \Delta l \cdot x}{\sum \gamma'' \Delta l}, \quad y_0 = \frac{\sum \gamma'' \Delta l \cdot y}{\sum \gamma'' \Delta l}, \quad z_0 = \frac{\sum \gamma'' \Delta l \cdot z}{\sum \gamma'' \Delta l}. \quad (10')$$

Полагая линию однородной, мы можем сократить на γ'' . При этом суммы в равенствах (10), (10') заменятся интегралами, взятыми вдоль данной кривой, и мы получим:

$$r_0 = \frac{\int r dl}{l} \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{\int x dl}{l}, \quad y_0 = \frac{\int y dl}{l}, \quad z_0 = \frac{\int z dl}{l}. \quad (11)$$

Итак, нахождение центров тяжести однородных тел является задачей чисто геометрической и сводится к нахождению центра тяжести *объемов* (для тел), центра тяжести *площадей* (для пластин) и центра тяжести *линий* (для материальных линий).

2. Методы нахождения координат центра тяжести. 1) *Метод группировки.* В задачах о нахождении центра тяжести какого-нибудь тела иногда бывает легко определить центры тяжести отдельных его частей, на которые можно разбить тело. Пусть, например, мы данное тело разбили на несколько частей I, II, III, ... (рис. 211) и

определили центр тяжести каждой такой части тела, т. е. нашли:

$$r_{I} = \frac{(\sum P_i r_i)_I}{(\sum P_i)_I}, \quad r_{II} = \frac{(\sum P_i r_i)_{II}}{(\sum P_i)_{II}} \quad \text{и т. д.} \quad (12)$$

(где в сумму I входят только веса частиц первой части тела, в сумму II — веса частиц второй части тела и т. д.). Если теперь в формуле (3) сгруппировать слагаемые, относящиеся к каждой из частей тела, то она даст окончательно [с учетом равенств (12)]:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{(\sum P_i r_i)_I + (\sum P_i r_i)_{II} + \dots}{\sum P_i} = \\ &= \frac{P_I r_I + P_{II} r_{II} + \dots}{\sum P_i}, \end{aligned} \quad (13)$$

где P_I, P_{II}, \dots суть веса соответствующих частей тела.

Приведенный здесь метод группировки или разбиения имеет широкое применение при решении практических задач на нахождение центров тяжести различных тел. Ясно, что в случае однородных тел веса заменяются соответствующими объемами, площадями и длинами.

2) *Симметрия*. Покажем, что если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести этого тела находится соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

а) Пусть тело симметрично относительно плоскости, которую

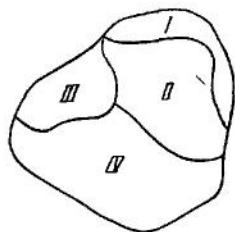


Рис 211.

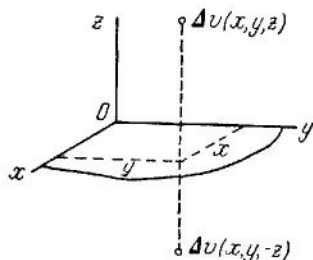


Рис. 212.

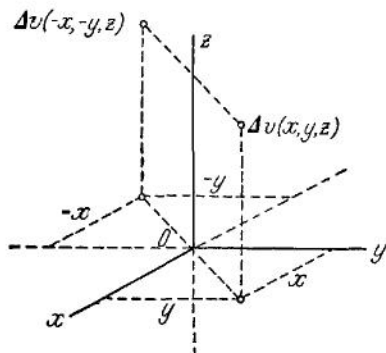


Рис. 213

примем за плоскость xu (рис. 212). Тогда вследствие симметрии каждому элементу объема тела Δv с координатами (x, y, z) будет соответствовать такой же по величине элемент объема с координатами $(x, y, -z)$. Поэтому статический момент $\sum z \cdot \Delta v = 0$

и координата $z_0 = \frac{\sum z \cdot \Delta v}{v} = 0$ (но $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$). Следовательно, центр тяжести тела будет лежать в плоскости симметрии xu .

б) Пусть тело симметрично относительно оси, которую примем за ось z (рис. 213). Тогда всякому элементу объема тела Δv с координатами (x, y, z) будет соответствовать такой же по величине элемент объема, расположенный симметрично относительно оси z и имеющий координаты $(-x, -y, z)$; поэтому статические моменты

$$\sum x \cdot \Delta v = 0, \quad \sum y \cdot \Delta v = 0 \quad \text{и} \quad x_0 = \frac{\sum x \cdot \Delta v}{v} = 0, \quad y_0 = \frac{\sum y \cdot \Delta v}{v} = 0$$

(но $z_0 \neq 0$). Следовательно, центр тяжести будет находиться на оси симметрии z .

в) Пусть тело имеет центр симметрии, который примем за начало координат O . Тогда всякой частице тела объемом Δv , определяемой радиусом-вектором r , будет соответствовать частица такого же объема с радиусом-вектором $-r$, симметричная ей относительно центра O . Поэтому статический момент

$$\sum r \cdot \Delta v = 0 \quad \text{и} \quad r_0 = \frac{\sum r \cdot \Delta v}{v} = 0.$$

Следовательно, центр тяжести будет находиться в центре симметрии O .

3) *Метод отрицательных масс.* Этот метод является частным случаем метода разбиения и применяется к телам, имеющим вырезы.

Способ его применения пояснен ниже, в примере 3.

Пользуясь методом разбиения и свойствами центров тяжести симметричных однородных тел, можно находить центр тяжести сложного тела, разбивая тело на такие части, центры тяжести которых легко определяются. Рассмотрим несколько примеров.

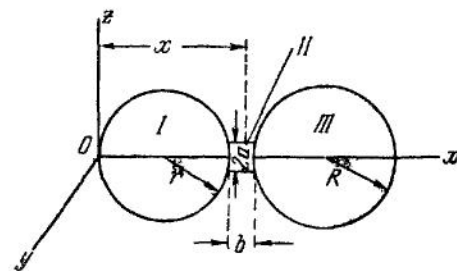


Рис. 214.

1. Дано однородное тело (рис. 214); требуется найти его центр тяжести. Будем рассматривать это тело как состоящее из трех тел: двух шаров и одного цилиндра. Данное тело имеет ось симметрии, которую примем за ось x ; поэтому нужно искать только одну координату x_0 .

Обозначим радиус первого шара через r , второго — через R , высоту цилиндра — через b , а его диаметр — через $2a$. Возьмем начало координат в точке O . Тогда абсцисса центра тяжести первого тела будет равна r , второго $(2r + \frac{b}{2})$ и третьего $(2r + b + R)$. Следовательно, абсцисса центра тяжести всего тела определится на основании принципа разбиения

равенством

$$x_0 = \frac{\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot r + \pi a^2 b \left(2r + \frac{b}{2}\right) + \frac{4}{3} \pi R^3 (2r + b + R)}{\frac{4}{3} \pi r^3 + \pi a^2 b + \frac{4}{3} \pi R^3}.$$

2. Найдем центр тяжести линии, изображенной на рис. 215. Данная фигура плоская, осей симметрии не имеет. Возьмем оси координат x, y так, как указано на рисунке, тогда координаты центра тяжести этой плоской фигуры будут:

$$x_0 = \frac{a \frac{a}{2} + b \cdot 0 + c \frac{c}{2} + dc}{a + b + c + d}, \quad y_0 = \frac{ab + b \frac{b}{2} + c \cdot 0 + d \frac{d}{2}}{a + b + c + d}.$$

3. Найдем, пользуясь методом отрицательных масс, центр тяжести круга, в котором имеется круглое отверстие (рис. 216). Можно рассматривать отверстие как площадь с отрицательной массой. Фигура имеет ось

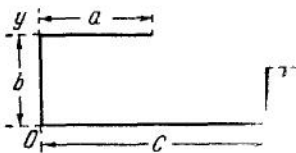


Рис. 215

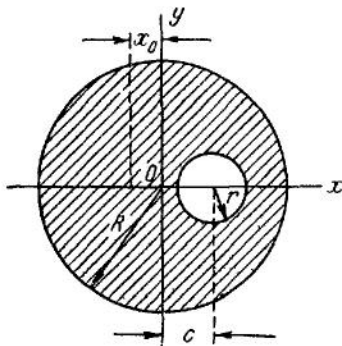


Рис. 216.

симметрии, поэтому ищем только одну координату x . Взяв начало координат в центре большого круга, получим:

$$x_0 = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \pi r^2 \cdot c}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{r^2 \cdot c}{R^2 - r^2}.$$

При нахождении центров тяжести тел, имеющих полости, последние считаются объемами с отрицательной массой.

3. Центры тяжести некоторых линий, площадей и объемов. На практике бывает полезно знать положения центров тяжести некоторых часто встречающихся объемов, площадей и линий.

1) *Центр тяжести дуги окружности.*

Пусть дана дуга \widehat{AB} окружности радиуса R (рис. 217). Проведем хорду AB этой дуги и перпендикулярный к хорде радиус OC , который будет осью симметрии. Возьмем оси координат с началом в центре круга и ось x

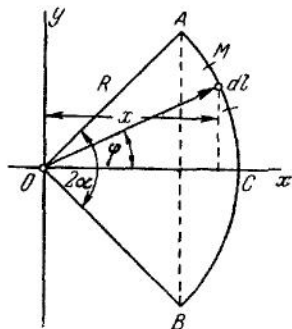


Рис. 217.

направим по OC ; очевидно, центр тяжести будет лежать на оси симметрии, т. е. на оси x . Таким образом, нам нужно найти только одну координату центра тяжести x_0 . Соединим концы дуги с центром; пусть центральный угол равен 2α . Разобьем дугу на элементы длины dl ; тогда координата центра тяжести дуги будет:

$$x_0 = \frac{\int x dl}{l}.$$

Так как $dl = R d\varphi$, а $x = R \cos \varphi$ и $l = R \cdot 2\alpha$, то окончательно получим:

$$x_0 = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \varphi d\varphi}{2R\alpha} = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (14)$$

Следовательно, координаты центра тяжести дуги суть $\left(\frac{R \sin \alpha}{\alpha}, 0\right)$.

Так как

$$2R \sin \alpha = AB \text{ (хорда)}, \quad 2R\alpha = \widehat{AB} \text{ (дуга)},$$

то выражение координаты x_0 можно еще представить в виде

$$x_0 = R \frac{AB}{\widehat{AB}}. \quad (15)$$

Рассмотрим частный случай, когда дуга равна полуокружности; тогда угол $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $\sin \alpha = 1$. В результате формула (14) примет вид

$$x_0 = R \frac{2}{\pi} \approx \frac{7}{11} R \quad (16)$$

(если считать $\pi \approx \frac{22}{7}$).

Таким образом, центр тяжести дуги полуокружности удален от центра окружности на расстояние, *большее* половины радиуса.

2) *Центр тяжести площади треугольника.* Дан треугольник ABC ; найдем центр тяжести площади этого треугольника (рис. 218).

Разобьем треугольник на элементарные полоски параллельно осно-

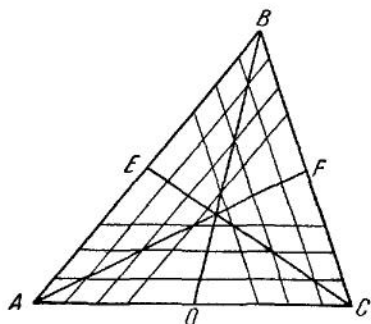


Рис. 218.

ванию AC . Так как эти полоски мы берем очень тонкими, то мы можем их считать за материальные отрезки прямой линии, и, следовательно, центры тяжести данных элементарных полосок будут лежать на их серединах.

Отсюда заключаем, что центр тяжести площади всего треугольника находится в геометрическом месте середин этих полосок, т. е. на медиане BO треугольника ABC .

Но мы можем за основание взять и другую сторону, например AB , и разбить треугольник на элементарные площади-полоски, параллельные AB ; тогда найдем, что центр тяжести площади треугольника будет лежать на другой медиане CE . Следовательно, центр тяжести площади треугольника лежит на пересечении его медиан, которые, как известно, пересекаются в одной точке, расположенной на расстоянии одной трети длины каждой из медиан от соответственной стороны треугольника. Если мы имеем многоугольник и желаем определить центр тяжести его площади, то разбиваем многоугольник на треугольники, определяем центр тяжести площади каждого треугольника, а затем, рассматривая эти центры как материальные точки с массами, пропорциональными площадям треугольников, находим центр тяжести всего многоугольника.

3) *Центр тяжести площади кругового сектора.* Пусть мы имеем некоторый круговой сектор AOB (рис. 219); найдем его центр тяжести. Проведем оси координат, взяв за начало центр круга O . Разобьем данный сектор на равные элементарные секторы, т. е. на секторы с очень малыми центральными углами. Такие секторы мы можем принять за очень малые равнобедренные треугольники; их центры тяжести будут находиться на расстоянии $\frac{2}{3}R$ от центра круга. Таким образом, центры тяжести этих элементарных секторов расположатся на дуге круга радиуса $\frac{2}{3}R$; сосредоточивая массы элементарных секторов в их центрах тяжести, мы сведем нахождение центра тяжести площади кругового сектора к нахождению центра тяжести дуги окружности радиуса $\frac{2}{3}R$ с центральным углом 2α , которая равномерно покрыта массами (так как площади элементарных секторов равны) и, следовательно, однородна.

Для дуги радиуса r , согласно формуле (14), имеем:

$$x_0 = r \frac{\sin \alpha}{\alpha};$$

в данном случае радиус $r = \frac{2}{3}R$; следовательно, абсцисса центра тяжести площади кругового сектора будет:

$$x_0 = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (17)$$

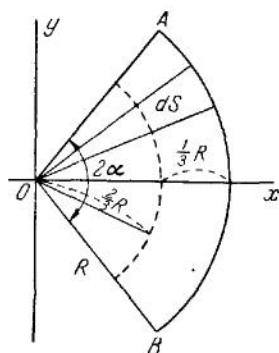


Рис. 219.

В частности, для центра тяжести полукруга будем иметь $\alpha = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\sin \alpha = 1$ и формула (17) дает:

$$x_0 = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \approx \frac{14}{33} R \quad (18)$$

(если считать $\pi = \frac{22}{7}$).

Таким образом, центр тяжести площади полукруга удален от центра круга на расстояние, *меньшее* половины радиуса.

4) *Центр тяжести поверхности сферического сегмента.* Дана поверхность сферического сегмента $ABCEF$ (рис. 220). Найдем центр тяжести его поверхности.

Разделим высоту H на очень большое число равных частей ΔH и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию сегмента.

Тогда поверхность сегмента разделится на очень большое число поясов. Площади этих поясов будут равны между собой, так как площадь поверхности сферического пояса равна длине окружности большого круга, умноженной на высоту пояса, а высоты всех поясов, согласно условию, одинаковы.

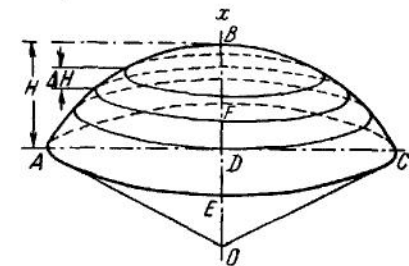


Рис. 220.

Так как поверхности поясов очень малы, то мы можем считать эти пояса материальными окружностями. Центр тяжести каждой такой окружности будет находиться в геометрическом центре, а центры всех таких окружностей расположатся по высоте H .

Таким образом, высота H будет *равномерно* покрыта материальными точками одинаковой массы; следовательно, центр тяжести поверхности сегмента будет находиться в середине отрезка $DB = H$. Беря начало координат O в центре сферы и направляя ось x вдоль оси симметрии, найдем, что абсцисса центра тяжести будет:

$$x_0 = R - \frac{H}{2}. \quad (19)$$

В частном случае, когда $H = R$ (поверхность полусферы), формула (19) примет вид

$$x_0 = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}, \quad (20)$$

т. е. центр тяжести поверхности полусферы находится на середине радиуса, перпендикулярного к основанию.

5) *Центр тяжести объема пирамиды.* Возьмем треугольную пирамиду (тетраэдр) $SABC$ (рис. 221) и разделим ее на элементарные пластинки плоскостями, параллельными основанию ABC . Центры тяжести этих элементарных пластинок лежат на прямой SF , соединяющей вершину пирамиды S с центром тяжести площади основания, который лежит на пересечении медиан треугольника ABC , т. е. в точке F , где $EF = \frac{1}{3} EC$.

Деля затем пирамиду на бесконечно большое число элементарных пластинок плоскостями, параллельными грани SAB , мы найдем, что центры тяжести этих площадок расположатся по прямой KC , где K — центр тяжести площади треугольника ASB , причем $EK = \frac{1}{3} ES$.

Итак, искомый центр тяжести лежит одновременно и на прямой KC и на прямой SF ; следовательно, он лежит на пересечении их в точке O . Определим положение этой точки. Проведем отрезок KF ; очевидно, $KF \parallel SC$ и $\triangle KOF \sim \triangle OSC$. Из подобия этих треугольников находим:

$$\frac{FO}{OS} = \frac{KF}{SC},$$

но

$$\frac{KF}{SC} = \frac{EK}{ES} = \frac{EF}{EC} = \frac{1}{3},$$

следовательно,

$$FO = \frac{1}{3} OS = \frac{1}{4} SF.$$

Окончательно имеем:

$$FO = \frac{1}{4} SF, \quad SO = \frac{3}{4} SF, \quad (21)$$

т. е. центр тяжести объема пирамиды лежит на прямой, соединяющей центр тяжести площади ее основания с вершиной, на расстоянии $\frac{1}{4}$ длины этой прямой, считая от основания. То же самое справедливо для центра тяжести объема многоугольной пирамиды и объема конуса.

6) *Центр тяжести объема сферического сектора.* Пусть дан сферический сектор $OACB$ (рис. 222), вырезанный из сферы радиуса R . Определим центр тяжести его объема. Разобьем сектор на элементарные пирамиды с равновеликими площадями оснований, вершины которых будут в центре сферы. Поверхность всего сегмента

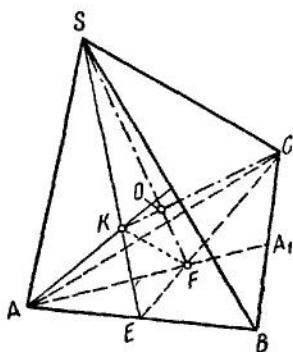


Рис. 221.

разобьется, таким образом, на очень большое число равных элементарных площадей.

Положение центра тяжести объема пирамиды определяется равенством (21). Поэтому центры тяжести элементарных пирамид расположатся на поверхности сегмента радиуса $\frac{3}{4}R$, где R — радиус сферы;

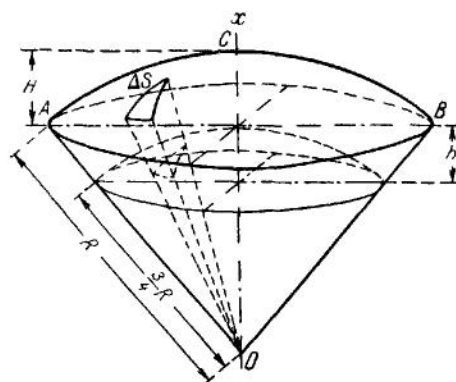


Рис 222

сосредоточивая массы элементарных пирамид в их центрах тяжести, мы получим поверхность сегмента, равномерно покрытую массами, ибо объемы элементарных пирамид одинаковы. Следовательно, центр тяжести сферического сектора лежит в центре тяжести поверхности этого сегмента.

Определим центр тяжести полученного сегмента; обозначим стрелку сегмента заданного сектора через H , а стрелку сегмента радиуса $\frac{3}{4}R$ через h ;

тогда $h = \frac{3}{4}H$. Направляя теперь ось Ox вдоль оси симметрии сектора и используя формулу (19), получим:

$$x_0 = \frac{3}{4}R - \frac{h}{2}.$$

Заменяя здесь h на $\frac{3}{4}H$, найдем, что абсцисса центра тяжести объема сферического сектора будет:

$$x_0 = \frac{3}{4}\left(R - \frac{H}{2}\right). \quad (22)$$

В частности, для центра тяжести объема полусферы, полагая $H = R$, получим:

$$x_0 = \frac{3}{4}\left(R - \frac{R}{2}\right) = \frac{3}{8}R. \quad (23)$$

Следовательно, центр тяжести объема полусферы лежит на радиусе, перпендикулярном к основанию, на расстоянии $\frac{3}{8}R$ от центра сферы.

4. Теоремы Гульдена — Паппа. Теорема 1. *Площадь поверхности, полученной вращением дуги плоской кривой (или ломаной линии) вокруг оси, лежащей в ее плоскости, но ее не пересекающей, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.*

Пусть дана дуга AB некоторой кривой и ось вращения y в плоскости этой кривой (рис. 223). Разобьем дугу на элементы длины Δl . При вращении вокруг оси элемент длины Δl опишет элементарную поверхность, площадь которой равна $2\pi x \Delta l$ (как площадь поверхности усеченного конуса или цилиндра).

Площадь поверхности, описанная всеми элементами, будет:

$$S = \sum 2\pi x \Delta l = 2\pi \sum x \Delta l.$$

Но в соответствии с равенствами (11) $\sum x \Delta l = x_0 l$, где x_0 есть координата центра тяжести дуги AB . Следовательно, площадь поверхности, описанной дугой AB , будет:

$$S = 2\pi x_0 l. \quad (24)$$

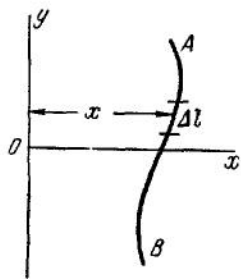


Рис. 223.

Теорема 2. Объем тела вращения, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести площади фигуры.

Разобьем данную площадь на элементарные площадки ΔS (рис. 224). При вращении каждая элементарная площадка образует некоторое элементарное тело, объем которого будет равен

$$\Delta v = 2\pi x \Delta S.$$

Сумма этих объемов даст полный объем

$$v = \sum 2\pi x \Delta S = 2\pi \sum x \Delta S. \quad (25)$$

Но в соответствии с равенствами (9) $\sum x \Delta S = x_0 S$, где x_0 есть координата центра тяжести всей площади. Следовательно, объем полученного тела вращения будет:

$$v = 2\pi x_0 S.$$

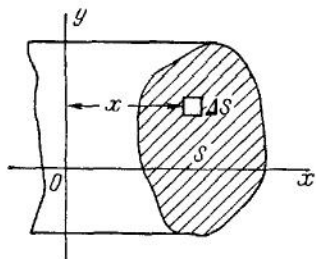


Рис. 224.

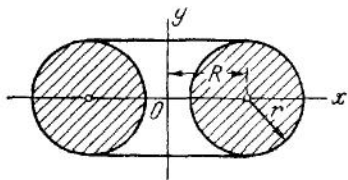


Рис. 225.

Пример. Найдём с помощью теоремы Гульдена площадь поверхности и объем тора (кольца) круглого сечения (рис. 225).

По формулам (24) и (25) получим, что площадь поверхности тора равна

$$S = 2\pi R \cdot 2\pi r = 4\pi^2 Rr,$$

а объем тора равен

$$v = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2.$$

§ 20. Момент силы

1. Момент силы относительно центра. Пусть даны сила F , приложенная в точке A какого-либо тела, и некоторый центр O (рис. 226); тогда моментом силы относительно центра (или точки) O будет называться вектор, приложенный к центру O , направленный перпендикулярно к плоскости треугольника OAB по правилу правого винта (т. е. в ту сторону, откуда поворот, совершаемый силой, виден против хода стрелки часов) и численно равный удвоенной площади этого треугольника (см. § 3, п. 10); иначе говоря¹⁾,

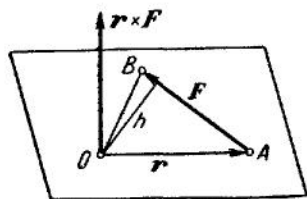


Рис. 226.

$$\text{мом}_O F = r \times F. \quad (1)$$

Модуль (числовое значение) этого вектора равен, очевидно, произведению модуля силы F на расстояние h от центра O до линии действия силы, которое называется плечом силы относительно центра O , т. е.

$$|r \times F| = Fh. \quad (2)$$

Очевидно, что когда центр O лежит на линии действия силы, то момент силы относительно этого центра равен нулю (так как плечо равно нулю).

Если сила измеряется в $\kappa\Gamma$, а плечо в м , то момент будет измеряться в килограммометрах ($\kappa\Gamma\text{м}$).

Проведя через центр O какую-нибудь систему прямоугольных осей $Oxyz$ (рис. 227), мы можем представить момент силы F относительно центра O в виде

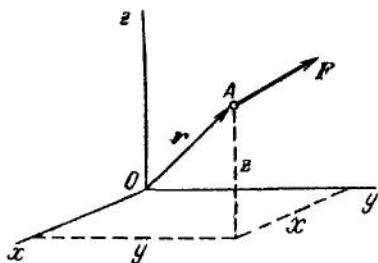


Рис. 227.

$$\text{мом}_O(F) = r \times F =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Формула (3) позволяет вычислить момент силы относительно начала координат, если известны проекции F_x , F_y , F_z силы на оси координат и координаты x , y , z точки приложения силы.

Когда все силы лежат в одной плоскости, то векторы, изображающие моменты этих сил относительно какого-либо центра, лежащего

¹⁾ Символ мом_O здесь и далее [кроме формул (4) и (8)] обозначает вектор момента силы, в отличие от случая плоской системы сил, когда этот же символ обозначает его числовую (алгебраическую) величину.

в той же плоскости, будут перпендикулярны к плоскости; поэтому в данном случае моменты сил будут различаться между собой только числовой величиной и знаком (а не направлением, как в случае пространственной системы сил) и эти моменты можно рассматривать как величины скалярные. Условимся, придерживаясь правой системы, считать момент положительным, если сила стремится вращать тело около центра против хода часовой стрелки (рис. 228), и отрицательным — если по ходу часовой стрелки (рис. 229; плоскость сил считается совмещенной с плоскостью рисунков). Тогда в случае плоской системы сил

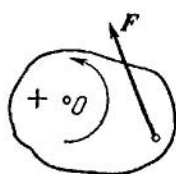


Рис. 228.



Рис. 229.

$$\text{мом}_O(F) = \pm Fh. \quad (4)$$

2. Момент системы сил относительно центра. Если мы имеем систему сил (векторов) $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ (рис. 230), то вектор M_O ,

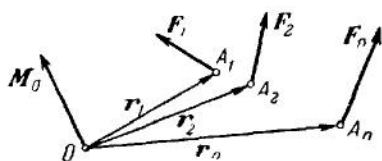


Рис. 230.

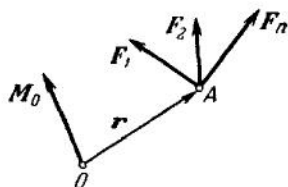


Рис. 231.

равный сумме моментов всех этих сил (векторов) относительно центра O , т. е.

$$M_O = \sum_{i=1}^n \text{мом}_O F_i = \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i), \quad (5)$$

называется *главным моментом* системы этих сил (векторов) относительно центра O . Если все силы (векторы) приложены к одной точке, то (рис. 231)

$$M_O = \sum_{i=1}^n (r \times F_i) = r \times \sum_{i=1}^n F_i. \quad (6)$$

Следовательно, момент суммы сил (векторов), приложенных к одной точке, относительно какого-либо центра равен сумме моментов этих сил (векторов) относительно того же центра (теорема Вариньона).

3. Момент силы относительно оси. Моментом силы относительно оси называется проекция момента силы, взятого относительно любой точки оси, на эту ось, т. е.

$$\text{мом}_x F = (r \times F)_x. \quad (7)$$

Докажем, что проекция момента силы F , взятого относительно некоторой точки O оси x , на эту ось не зависит от положения точки O на оси (рис. 232). Действительно, равенство (7) можно представить в виде

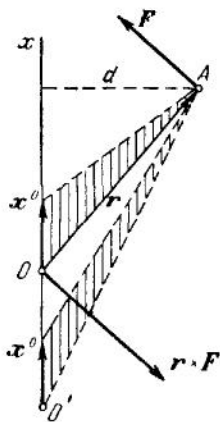


Рис. 232.

$$\text{мом}_x F = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{x}^0 = (\mathbf{x}^0 \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}.$$

Выражение $\mathbf{x}^0 \times \mathbf{r}$, как нетрудно видеть на рисунке, есть величина постоянная, численно равная удвоенной площади треугольника с основанием \mathbf{x}^0 и высотой $r \sin(\widehat{\mathbf{x}^0, \mathbf{r}}) = d$. Как основание, так и высота — величины постоянные, сила F тоже остается постоянной; следовательно, величина $(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x$ не зависит от положения точки O .

Моменту силы относительно оси можно дать еще другое определение, равносильное предыдущему, а именно: момент силы F относительно какой-либо оси x (рис. 233) есть момент проекции силы F на плоскость, перпендикулярную к оси x , взятый относительно точки O_1 пересечения оси x с этой плоскостью (см. § 3, п. 10). При этом момент проекции F_A относительно точки O_1 рассматривается как скалярная величина, имеющая знак плюс, если поворот, совершаемый силой F_A виден с положительного конца оси x против хода часовой стрелки, и знак минус — если по ходу часовой стрелки (см. п. 1). Таким образом,

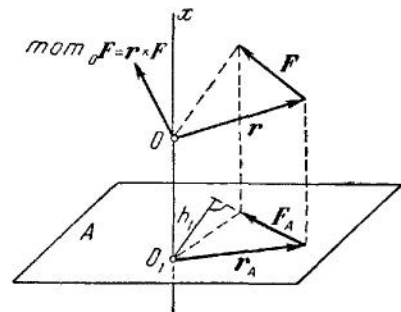


Рис. 233.

$$\text{мом}_x F = \text{мом}_{O_1} F_A = \pm F_A h_1. \quad (8)$$

Из предыдущего следует, что если линия действия силы F пересекает ось x или ей параллельна, то момент силы F относительно этой оси равен нулю.

Моменты силы относительно осей какой-либо прямоугольной системы

координат (см. рис. 227) можно, пользуясь равенством (3), представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \text{мом}_x F &= (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x = yF_z - zF_y, \\ \text{мом}_y F &= (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_y = zF_x - xF_z, \\ \text{мом}_z F &= (\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z = xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Формулы (9) определяют одновременно проекции вектора $\text{мом}_O(F) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ на оси координат.

Рассмотрим примеры вычисления моментов силы относительно оси.

Найдем моменты относительно осей координат силы F , параллельной плоскости Oxz , и силы P , направленной вдоль AD , если $AB = a$, $OB = b$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ODA = \beta$ (рис. 234).

а) Для определения $\text{mom}_x(F)$ проектируем силу F на плоскость Oyz , перпендикулярную оси x . Числовая величина этой проекции будет $F_{yz} = F \sin \alpha$. Тогда по формуле (8) с учетом знака будем иметь:

$$\text{mom}_x(F) = \text{mom}_O(F_{yz}) = bF \sin \alpha.$$

При вычислении $\text{mom}_y(F)$ замечаем, что сила F лежит в плоскости ABC , перпендикулярной к оси y ; следовательно, $F_{xz} = F$. Тогда, согласно (8), учитывая направление поворота, получим:

$$\text{mom}_y(F) = \text{mom}_B(F) = -Fa \sin \alpha.$$

Для вычисления $\text{mom}_z(F)$ проектируем силу F на плоскость Oxy и находим, что $F_{xy} = F \cos \alpha$. Следовательно,

$$\text{mom}_z(F) = \text{mom}_O(F_{xy}) = bF \cos \alpha.$$

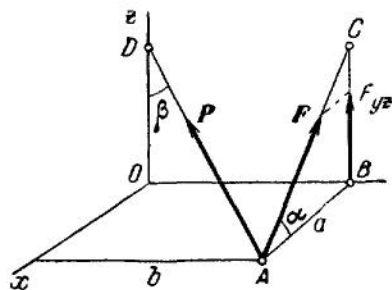


Рис. 234.

б) Так как линия действия силы P пересекает ось z , то $\text{mom}_z(P) = 0$. Для нахождения двух других моментов воспользуемся формулами (9). Замечая, что в нашем случае $x = a$, $y = b$, $z = 0$, $a P_z = P \cos \beta$, получаем:

$$\text{mom}_x(P) = yP_z = bP \cos \beta, \quad \text{mom}_y(P) = -xP_z = -aP \cos \beta.$$

§ 21. Теория пар

1. Момент пары. Парой сил называется система двух равных по напряжению антипараллельных сил, действующих на абсолютно твердое тело. Так, например (рис. 235), система двух сил (F, F') образует пару, если

$$F = F', \quad F \uparrow \downarrow F'.$$

Расстояние d между линиями действия сил пары называется *плечом* пары; плоскость, в которой действуют силы пары, называется *плоскостью* действия пары. Совокупность нескольких пар, действующих на тело, называется *системой пар*.

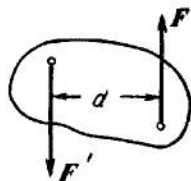


Рис. 235.

Пара сил не имеет равнодействующей. Докажем это, исходя от противного: пусть пара сил (F, F') имеет равнодействующую R , не параллельную силам пары (рис. 236). Тогда, прибавив к системе сил (F, F') силу R' , противоположную равнодействующей R , мы получили бы систему трех сил (F, F', R'), находящихся в равновесии. Но этого быть не может, так как линии действия сил F, F' и R' не проходят через одну точку и, следовательно, не выполняется необходимое условие равновесия. Точно так же можно показать, что

пара сил не может иметь равнодействующей, параллельной силам пары.

Пара сил, действующая на тело, стремится сообщить ему некоторое вращение. Вращательный эффект пары характеризуют величиной, называемой *моментом пары*. Поскольку этот эффект будет тем больше, чем больше напряжение сил, составляющих пару, и чем больше ее плечо, то численно (по модулю) момент пары измеряют произведением модуля одной из сил пары на ее плечо, т. е. величиной $F \cdot d$.

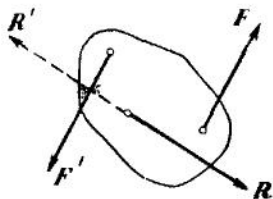


Рис. 236.

Если силы измерять в $\kappa\Gamma$, а плечо — в m , то момент пары (как и момент силы) будет измеряться в килограммометрах.

Кроме числовой величины Fd , действие пары на тело, а следовательно, и ее момент зависит еще от того, как расположена плоскость действия пары в пространстве, и от направления, в котором пара стремится вращать тело. Поэтому момент пары обладает определенным направлением в пространстве и, следовательно, есть величина *векторная*.

Так как направление плоскости в пространстве определяется направлением прямой, перпендикулярной к этой плоскости, то вектор, изображающий момент пары, направляют перпендикулярно к плоскости действия пары. Длина этого вектора берется равной (в выбранном масштабе) числовой величине (модулю) момента пары (т. е. вектор имеет столько соответствующих масштабу единиц длины, сколько единиц момента ($\kappa\Gamma m$) имеет момент пары).

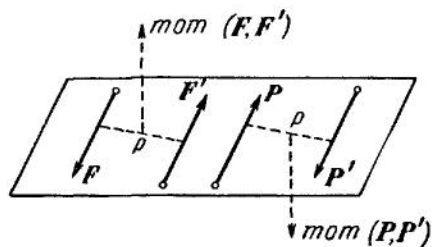


Рис. 237.

Сторона, в которую направлен вектор-момент пары, должна характеризовать направление вращения пары. Мы здесь имеем уже встречавшийся нам случай сопряжения направления на прямой с направлением вращения в плоскости, перпендикулярной к этой прямой.

Правило такого сопряжения зависит от нашего выбора и может соответствовать правому или левому винту. Как и везде ранее, мы будем следовать правилу *правого винта*, т. е. считать вектор-момент пары $\text{мом}(F', F)$ направленным в ту сторону, откуда вращение пары видно против хода стрелки часов (рис. 237).

Итак, *момент пары есть вектор, перпендикулярный к плоскости действия пары, направленный по правилу правого винта и численно равный произведению одной из сил пары на ее плечо.*

Остается невыясненным вопрос о точке приложения этого вектора. Приводимые ниже теоремы об эквивалентности пар показывают, что вектор-момент пары может быть приложен в любой точке пространства, т. е. является вектором *свободным*.

Если пары расположены в одной плоскости, то их векторы-моменты будут направлены перпендикулярно к этой плоскости в ту или иную сторону, в зависимости от направления вращения пары. Поэтому в данном случае моменты пар будут отличаться между собой только числовой величиной и знаком, т. е. могут рассматриваться как величины скалярные. Условимся, придерживаясь правой системы, считать момент пары, вращающей против хода стрелки часов, положительным,

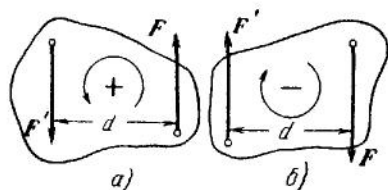


Рис. 238.

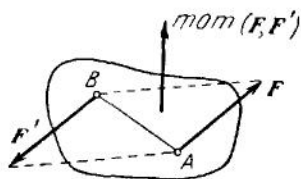


Рис. 239.

а по ходу стрелки часов — отрицательным (рис. 238; плоскость пар считается совмещенной с плоскостью рисунка). Тогда для плоской системы пар

$$\text{мом} (F, F') = \pm Fd. \quad (1)$$

Как легко видеть, момент пары численно равен площади параллелограмма, построенного на силах пары (рис. 239); следовательно, вектор-момент пары равен векторному произведению векторов \overline{AB} и F' , т. е.

$$\text{мом} (F, F') = \overline{AB} \times F' = \overline{BA} \times F. \quad (2)$$

Докажем следующую теорему: *момент пары есть сумма моментов сил пары относительно любого центра*. В самом деле, возьмем произвольный центр O (рис. 240) и проведем из него радиусы-векторы r_1 и r_2 в точки A и B , где приложены силы пары (F, F') . Тогда $\overline{AB} = r_2 - r_1$ и

$$\overline{AB} \times F' = (r_2 - r_1) \times F' = r_2 \times F' - r_1 \times F'.$$

Заменяя во втором члене F' через $-F$, получаем:

$$\text{мом} (F, F') = \overline{AB} \times F' = r_1 \times F + r_2 \times F', \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

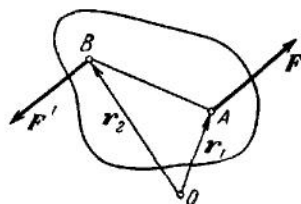


Рис. 240.

2 Эквивалентность пар. Теорема 1. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если переместить пару в другое положение в плоскости ее действия.

Пусть мы имеем пару (F_1, F_2) (рис. 241), причем силы пары приложены к концам плеча AB пары A и B . Переместим плечо AB пары в некоторое новое положение, например A_1B_1 . Приложим в точках A_1 и B_1 по две силы F_3, F_4 и F_5, F_6 , равных силам пары и направленных в противоположные стороны перпендикулярно к A_1B_1 ; тогда

$$(F_1, F_2) \sim (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6),$$

так как $(F_3, F_4, F_5, F_6) \sim 0$.

От пересечения линий действия сил данной пары с линиями действия сил, приложенных к точкам A_1, B_1 , получим параллелограмм, который будет ромбом, ибо $AB = A_1B_1$. Перенесем силы F_1 и F_4 в точку K пересечения линий их действия.

Эти две силы, как равные по модулю, будут иметь равнодействующую, направленную по биссектрисе угла CKD , т. е. по диагонали ромба. Силы F_2 и F_5 перенесем в противоположную вершину ромба L . Эти силы также дадут равнодействующую, численно равную предыдущей и направленную по той же диагонали в противоположную сторону; следовательно, равнодействующие сил F_1, F_4 и сил F_2, F_5 уравниваются, т. е. система

$$(F_1, F_2, F_4, F_5) \sim 0.$$

Таким образом, система (F_1, F_2) эквивалентна системе (F_3, F_6) , т. е. пара (F_1, F_2) эквивалентна паре (F_3, F_6) .

Теорема 2. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если мы плоскость ее действия будем переносить параллельно самой себе.

Пусть мы имеем пару (F_1, F_2) с плечом AB (рис. 242). Перенесем плечо AB параллельно самому себе в положение A_1B_1 и к точкам A_1 и B_1 приложим направленные в противоположные стороны силы F_3, F_4 и F_5, F_6 , равные по напряжению силам пары (F_1, F_2) и параллельные им. Тогда система сил

$$(F_1, F_2) \sim (F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6).$$

Соединив концы плеч, получим параллелограмм. Сложив силы F_2 и F_4 , получим равнодействующую, равную $2F$, которая будет приложена

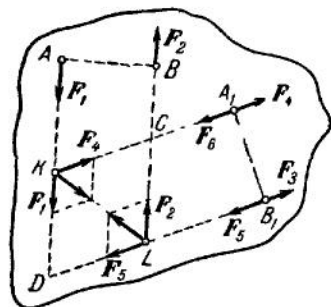


Рис. 241.

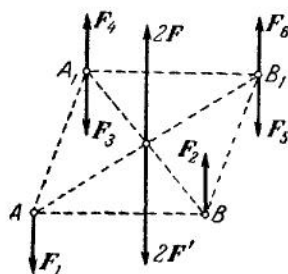


Рис. 242.

в середине диагонали параллелограмма и направлена вверх. Сложив силы F_1 и F_5 , получим их равнодействующую, равную $-2F$ и направленную вниз; точка приложения ее будет в середине второй диагонали параллелограмма; таким образом, обе равнодействующие имеют общую точку приложения, равны между собой и направлены в противоположные стороны, следовательно, они взаимно уравновешиваются. Отсюда вытекает, что система $(F_1, F_5, F_2, F_4) \sim 0$. Поэтому система

$$(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6) \sim (F_3, F_6)$$

и пара (F_3, F_6) эквивалентна паре (F_1, F_2) .

Отсюда вытекает, что плоскость пары можно действительно перенести параллельно ей самой, не изменяя при этом оказываемого на тело действия.

Теорема 3. Действие пары на абсолютно твердое тело не изменится, если любым способом видоизменить силы и плечо пары, сохраняя постоянным их произведение, т. е. момент пары.

Пусть мы имеем пару (P_1, P_2) (рис. 243). Разложим силу P_2 на две силы Q и $(P_2 - Q)$, приложенные в точках C и A . Силы P_1 и $(P_2 - Q)$ имеют равнодействующую Q' , модуль которой $Q' = P_1 - (P_2 - Q) = Q$. В результате мы получим новую пару (Q', Q) , плечо которой равно AC , причем для этой пары сила Q и плечо AC удовлетворяют соотношению

$$\frac{Q}{AB} = \frac{P_2}{AC} \quad \text{или} \quad Q \cdot AC = P_2 \cdot AB. \quad (4)$$

Но произведение $Q \cdot AC$ есть момент пары (Q', Q) , а $P_2 \cdot AB$ есть момент данной пары (P_1, P_2) . Таким образом, теорема доказана. Из теоремы следует, что данную пару можно всегда привести к данной силе или к данному плечу при условии сохранения величины ее момента, так как из равенства (4) видно, что, задаваясь силой Q произвольно, можно определить соответствующее плечо AC новой пары, и наоборот.

Из доказанных трех теорем вытекает, что: 1) вектор-момент пары может быть переносим в любую точку пространства и, следовательно, есть вектор свободный, и 2) пары, имеющие равные векторы-моменты, эквивалентны, так как на основании доказанных теорем одна из этих пар может быть всегда преобразована в другую.

3. Сложение пар. Теорема. Система пар, действующих на абсолютно твердое тело, эквивалентна одной паре, момент которой равен векторной сумме моментов этих пар.

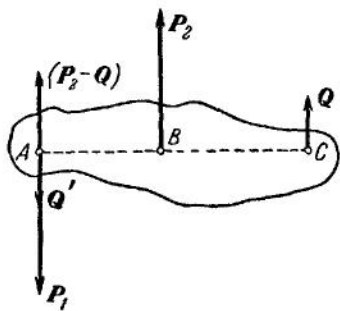


Рис 243.

а) *Плоская система пар.* Рассмотрим сначала случай плоской системы пар. Пусть дано несколько пар

$$(F_1, F'_1), (F_2, F'_2), (F_3, F'_3), \dots, (F_n, F'_n),$$

плечи которых равны соответственно d_1, d_2, \dots, d_n (рис. 244). Приведя все пары к одному плечу D , повернем их так, чтобы плечи их совпали с произвольно выбранным отрезком $AB = D$; тогда D будет их общим плечом, а силами, составляющими пары, будут $Q_1, Q_2, \dots, Q'_1, Q'_2, \dots$

Сложив эти силы, получим новую пару (R, R') с плечом D (силы R и R' на рисунке не показаны); при этом, учитывая направления сил, показанные на рисунке, будем иметь:

$$R' = R = Q_1 - Q_2 - Q_3 + \dots + Q_n.$$

Пара (R, R') будет эквивалентна данной системе пар; момент ее будет:

$$\text{мом}(R, R') = RD = (Q_1D) + (-Q_2D) + (-Q_3D) + \dots + (Q_nD). \quad (5)$$

Но, согласно формуле (1) и теореме 3,

$$\begin{aligned} Q_1D &= F_1d_1 = \text{мом}(F_1, F'_1), \\ -Q_2D &= -F_2d_2 = \text{мом}(F_2, F'_2), \\ &\dots \dots \dots \\ Q_nD &= F_nd_n = \text{мом}(F_n, F'_n). \end{aligned}$$

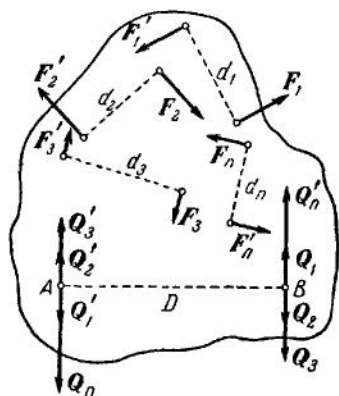


Рис. 244.

Сложив эти равенства почленно и учитывая (5), получим:

$$\text{мом}(R, R') = \sum_{i=1}^n \text{мом}(F_i, F'_i), \quad (6)$$

т. е. плоская система пар эквивалентна одной паре, момент которой равен алгебраической сумме моментов этих пар.

б) *Пространственная система пар.* Рассмотрим систему двух пар, расположенных в пересекающихся плоскостях. Пусть дана пара (F_1, F'_1) , лежащая в плоскости A , и пара (F_2, F'_2) , лежащая в плоскости B (обе пары могут быть ориентированы в своих плоскостях любым образом). Выберем на линии пересечения плоскостей некоторый отрезок $MN = d$ (рис. 245), который примем за плечо, и приведем обе данные пары к этому плечу, изменив соответствующим образом величины сил, составляющих пары. Тогда вместо пар (F_1, F'_1)

и (F_2, F_2') получим пары (P_1, P_1') и (P_2, P_2') , лежащие в тех же плоскостях A и B , причем

$$(P_1, P_1') \oslash (F_1, F_1'), \quad (P_2, P_2') \oslash (F_2, F_2')$$

и, следовательно,

$$\text{мом}(P_1, P_1') = \text{мом}(F_1, F_1'), \quad \text{мом}(P_2, P_2') = \text{мом}(F_2, F_2'), \quad (7)$$

а по модулю

$$|\text{мом}(P_1, P_1')| = P_1 d, \quad |\text{мом}(P_2, P_2')| = P_2 d. \quad (7')$$

Силы P_1, P_1' и P_2, P_2' будут, конечно, перпендикулярны к прямой NM , ибо отрезок d является плечом обеих пар. Складывая

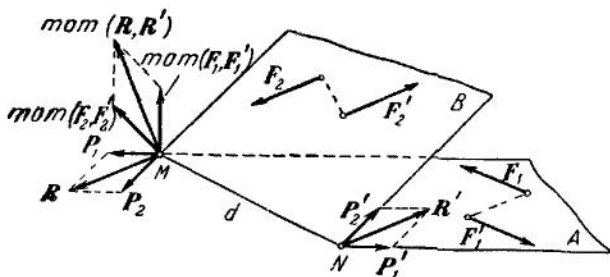


Рис. 245.

силы P_1 с P_2 и P_1' с P_2' , получаем новую пару (R, R') , эквивалентную данным. Изобразим теперь векторы-моменты пар (P_1, P_1') и (P_2, P_2') , которые должны быть перпендикулярны соответственно к плоскостям A и B , и построим на этих векторах-моментах параллелограмм. Этот параллелограмм подобен параллелограммам, построенным на силах, вследствие равенства углов с взаимно перпендикулярными сторонами и пропорциональности сторон, согласно равенствам $(7')$. Поэтому его диагональ перпендикулярна к плоскости пары (R, R') и по длине равна Rd . Следовательно, диагональ, построенная на векторах-моментах пар (P_1, P_1') и (P_2, P_2') , представляет собой момент равнодействующей пары (R, R') , т. е.

$$\text{мом}(P_1, P_1') + \text{мом}(P_2, P_2') = \text{мом}(R, R')$$

или, согласно равенствам (7) ,

$$\text{мом}(F_1, F_1') + \text{мом}(F_2, F_2') = \text{мом}(R, R'), \quad (8)$$

где суммы являются, конечно, векторными.

Если дано несколько пар, то, последовательно применяя равенство (8), найдем, что вектор-момент равнодействующей пары будет равен векторной сумме векторов-моментов слагаемых пар

$$\text{мом}(R, R') = \sum_{i=1}^n \text{мом}(F_i, F'_i). \quad (9)$$

§ 22. Система сил, произвольно расположенных в пространстве

1. Основная лемма. *Всякая сила, приложенная к абсолютно твердому телу в данной точке A , эквивалентна той же силе, приложенной в другой точке B , и паре, момент которой равен моменту силы, приложенной в точке A , относительно точки B .*

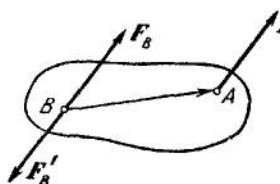


Рис. 246.

Пусть в точке A твердого тела приложена сила F_A . Приложим к точке B две взаимно противоположные силы F_B и F'_B , равные по напряжению силе F_A и параллельные этой силе (рис. 246). Тогда

$$F_A \sim (F_A, F_B, F'_B).$$

Но силы F_A и F'_B составляют пару, поэтому имеем:

$$F_A \sim [F_B \text{ и пара } (F_A, F'_B)],$$

причем момент пары (F_A, F'_B) будет очевидно равен моменту данной силы F_A относительно точки B , т. е. $\overline{BA} \times F_A$. Следовательно, лемма доказана.

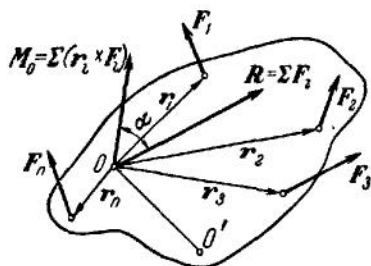


Рис. 247.

2. Приведение пространственной системы сил. Пусть мы имеем произвольную систему сил $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$, действующих на абсолютно твердое тело (рис. 247), расположенных как угодно в пространстве. Выберем произвольный центр O и перенесем все силы системы в этот центр. От перенесения каждой силы

мы получим силу и пару, момент которой равен моменту переносимой силы относительно выбранного центра O . Складывая все силы в центре O (на рис. 247 эти силы не показаны), получим одну результирующую силу R , где

$$R = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (1)$$

Складывая моменты всех пар, получим вектор-момент результирующей пары

$$M_O = \sum_{i=1}^n (r_i \times F_i). \quad (2)$$

Величина R , равная векторной сумме всех сил системы [равенство (1)], называется *главным вектором* системы, а величина M_O , равная векторной сумме моментов всех сил системы относительно центра O [равенство (2)], называется *главным моментом* системы относительно этого центра.

Заметим, что так как силы системы расположены в пространстве совершенно произвольно, то главный момент M_O по отношению к главному вектору R может быть направлен под каким угодно углом. Таким образом, любая пространственная система сил, будучи приведена к некоторому центру O , заменяется приложенной в этом центре результирующей силой, равной главному вектору системы $R = \sum F_i$, и результирующей парой, момент которой равен главному моменту системы M_O относительно центра приведения.

3. Перемена центра приведения. Пусть пространственная система сил приведена к центру O и заменена результирующей силой R и парой с моментом M_O , который с направлением R образует некоторый угол α (см. рис. 247). Возьмем новый центр приведения O' и приведем все силы системы к этому центру; получим в центре O' силу R' и пару с моментом $M_{O'}$. Но очевидно, что

$$R' = \sum F_i = R,$$

т. е. результирующая сила, равная главному вектору системы, с изменением центра приведения не изменяется. Главный же момент при этом вообще изменится, так как относительно нового центра приведения момент каждой из сил системы станет вообще другим. Найдем это изменение. Условимся для краткости обозначать главный момент системы относительно центра O просто через M , а относительно нового центра O' через M' . Тогда

$$M' = \sum_{i=1}^n (r'_i \times F_i),$$

где r'_i — радиус-вектор точки приложения силы F_i , проведенный из центра O' (рис. 248). Но из рисунка видно, что $r'_i = r_i - \overline{OO'}$. Заменяя r'_i его выражением, получаем:

$$M' = \sum [(r_i - \overline{OO'}) \times F_i] = \sum (r_i \times F_i) - \sum [\overline{OO'} \times F_i].$$

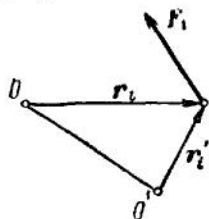


Рис. 248.

В этом равенстве, как следует из (2), $\sum(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M}$; поэтому

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \sum(\overline{OO'} \times \mathbf{F}_i) = \mathbf{M} - \overline{OO'} \times \sum \mathbf{F}_i.$$

Но $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$, и окончательно получаем:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \overline{OO'} \times \mathbf{R} = \mathbf{M} + \overline{O'O} \times \mathbf{R}, \quad (3)$$

т. е. при изменении центра приведения главный момент изменяется на величину, равную моменту результирующей силы относительно нового центра приведения (см. рис. 247).

4. Инварианты приведения. Мы видели, что при изменении центра приведения главный вектор \mathbf{R} остается без изменения, поэтому он представляет собой *инвариант* пространственной системы сил по отношению к изменению центра приведения, т. е.

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}. \quad (4)$$

Вторым инвариантом системы будет скалярное произведение главного вектора на главный момент, т. е. величина $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = RM \cos(\widehat{\mathbf{R}\mathbf{M}})$, или же проекция главного момента на направление главного вектора, т. е. величина $M \cos(\widehat{\mathbf{R}\mathbf{M}})$ (так как \mathbf{R} есть инвариант). Докажем это. Для центра O мы имеем:

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{M} = \sum(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i).$$

Для центра O' , согласно равенствам (4) и (3), будет:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M} + \overline{O'O} \times \mathbf{R}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' \cdot \mathbf{M}' &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M} + \overline{O'O} \times \mathbf{R}) = \\ &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{R} \cdot (\overline{O'O} \times \mathbf{R}). \end{aligned}$$

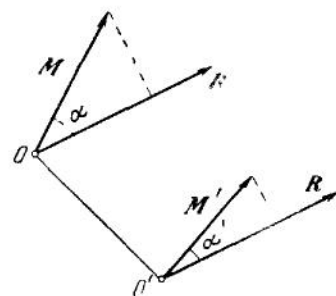


Рис. 249

Но второй член правой части равен нулю вследствие того, что в смешанном произведении имеются два равных множителя; следовательно,

$$\mathbf{R}' \cdot \mathbf{M}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = \text{const}, \quad (5)$$

или же, так как $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M} = RM \cos(\widehat{\mathbf{R}\mathbf{M}})$, а $R = \text{const}$, то

$$M \cos(\widehat{\mathbf{R}\mathbf{M}}) = M' \cos(\widehat{\mathbf{R}'\mathbf{M}'}) = \text{const}. \quad (6)$$

Таким образом, скалярное произведение главного вектора на главный момент, или же проекция главного момента на направление главного вектора (рис. 249), есть величина постоянная для данной

системы сил и не зависит от выбора центра приведения, а поэтому является вторым инвариантом системы.

Б. Приведение системы к динаме (винту). Если центр приведения O выбран произвольно, то, как мы видели, главный вектор R и главный момент системы M будут составлять между собой некоторый угол α , вообще отличный от нуля (рис. 250).

Разложим главный момент M на две составляющие: составляющую M^* , направленную вдоль главного вектора R , и составляющую M_1 , перпендикулярную к главному вектору; таким образом,

$$M = M^* + M_1.$$

Вектор M^* , как ортогональная составляющая главного момента по направлению главного вектора, есть для данной системы величина постоянная, не зависящая от выбора центра приведения, т. е.

$$M^* = \text{const.}$$

причем численно

$$M^* = M \cos(\widehat{R \cdot M}) = \frac{R \cdot M}{R}. \quad (7)$$

Таким образом, с изменением центра приведения будет изменяться только перпендикулярная составляющая M_1 . Мы всегда можем найти такой центр приведения O^* , чтобы переменная составляющая M_1 обратилась в нуль; тогда главный момент и главный вектор будут направлены по одной прямой, т. е. будут коллинеарны, и вектор M будет иметь минимальную величину, равную M^* .

Совокупность силы и пары, вектор-момент которой коллинеарен силе, или, что то же, совокупность силы и пары, лежащей в плоскости, перпендикулярной к силе, носит название *динами* или *динамического винта* (рис. 251). Аналитически центр O^* , при приведении к которому система заменяется динамой, можно определять из условия, что для этого центра $M^* \parallel R$, т. е.

$$\frac{M^*}{R} = p = \frac{R \cdot M}{R^2}, \quad (8)$$

где p — постоянная линейная величина, называемая параметром винта или динами.

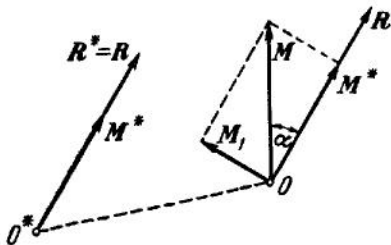


Рис. 250.

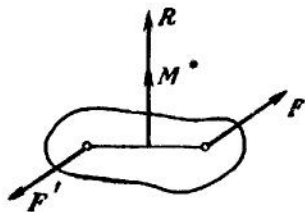


Рис. 251.

Так как, согласно равенству (3),

$$M^* = M - \overline{OO}^* \times R,$$

то уравнение (8) можно представить в виде

$$\frac{M - \overline{OO}^* \times R}{R} = p. \quad (9)$$

Этому уравнению, как нетрудно видеть, удовлетворяет бесконечное множество точек, лежащих на общем направлении векторов R и M^* . Следовательно, уравнение (9) есть уравнение прямой, которая называется *центральной осью* системы.

Равенство (9) выражает уравнение центральной оси в векторной форме, причем текущей координатой является вектор \overline{OO}^* .

Если координаты векторов M , R , \overline{OO}^* обозначить

$$M(M_x, M_y, M_z), \quad R(R_x, R_y, R_z), \quad \overline{OO}^*(x^*, y^*, z^*),$$

то в проекциях на оси координат уравнение центральной оси примет вид

$$\frac{M_x - (y^*R_z - z^*R_y)}{R_x} = \frac{M_y - (z^*R_x - x^*R_z)}{R_y} = \frac{M_z - (x^*R_y - y^*R_x)}{R_z} = p. \quad (10)$$

Так как для всех центров приведения, лежащих на центральной оси, главный момент направлен по главному вектору, то, очевидно, для этих центров главный момент имеет наименьшую числовую величину, определяемую равенством (7).

Итак, всякая система действующих на абсолютно твердое тело сил, для которой второй инвариант $R \cdot M$ не равен нулю, приводится к динаме; эту динаму образуют сила R , направленная по центральной оси системы, и пара с моментом M^* .

6. Приведение системы к двум силам.

Покажем, что всякую систему сил, действующих на твердое тело, для которой второй инвариант $R \cdot M \neq 0$, можно еще привести

к двум силам, одна из которых проходит через заданную точку O . Приведем систему к центру O ; тогда получим для центра O результирующую силу, равную главному вектору R , и результирующую пару с моментом, равным главному моменту M . Представим M в виде пары сил (F, F') , одна из которых проходит через точку O (рис. 252); тогда вся система приведет к двум силам: $Q = R + F$ и F' , которые будут лежать в разных плоскостях, причем сила Q будет проходить через заданную точку O .

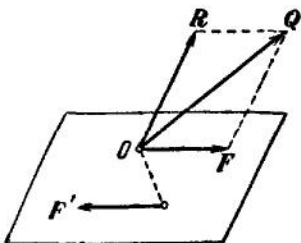


Рис. 252.

Если $M \perp R$, т. е. $M \cdot R = 0$, то R будет лежать в плоскости пары (F, F') , а следовательно, силы Q и F' будут в одной плоскости, и вся система приведет к одной силе — равнодействующей. Если же при этом $R = 0$, то, очевидно, вся система приведет к паре сил.

7. Общие выводы. Случай приведения. По доказанному всякая система сил (или вообще скользящих векторов) при приведении к данному центру заменяется результирующей силой R , равной главному вектору системы, и результирующей парой с моментом M , равным главному моменту системы относительно этого центра. Векторы R и M называются элементами приведения системы (или координатами системы скользящих векторов). Их значения определяются формулами (1) и (2) или вытекающими из этих формул равенствами

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix}, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}, \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}; \quad (11)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \text{mom}_x(F_i), \quad M_y = \sum_{i=1}^n \text{mom}_y(F_i), \quad M_z = \sum_{i=1}^n \text{mom}_z(F_i). \quad (12)$$

Равенства (12) следуют из того, что по определению [§ 20, формула (7)] $(r_i \times F_i)_x = \text{mom}_x(F_i)$ и т. д.

Главный вектор R не изменяется с изменением центра приведения и является поэтому первым инвариантом системы. Главный момент M изменяется при изменении центра приведения на величину, равную моменту главного вектора R относительно нового центра, так что если O и O' — соответственно старый и новый центр приведения, то

$$R' = R, \quad M' = M + \overline{O'O} \times R. \quad (13)$$

Вторым инвариантом системы будет скалярное произведение векторов R и M , т. е. величина $R \cdot M$, или, так как R есть инвариант, то вторым инвариантом можно считать проекцию M на направление R , т. е. величину $M \cos(\widehat{R, M})$.

В зависимости от значения инвариантов системы и элементов приведения можно различать следующие случаи приведения системы сил.

1) $R \cdot M \neq 0$. Система приводится к динаме (винту) с параметром

$$p = \frac{M \cos(\widehat{R, M})}{R} = \frac{R \cdot M}{R^2}$$

или к двум силам, лежащим в различных плоскостях. При этом динама будет образована силой R , равной главному вектору системы и направленной вдоль центральной оси, определяемой уравнением (10), и парой с наименьшим моментом M^* , коллинеарным R ; числовая величина этого момента определяется равенством (7).

2) $R \cdot M = 0$. Здесь возможны следующие частные результаты.
 а) Если $R \neq 0$, то система сил приводится к одной силе, т. е. к равнодействующей, равной главному вектору системы,

$$R = \sum F_i.$$

Это вытекает из того, что при $R \cdot M = 0$ будет $p = 0$ и, согласно равенству (8), $M^* = 0$; следовательно, динама вырождается в одну силу $R^* = R$, т. е. равнодействующую. Линия действия этой равнодействующей совпадает с центральной осью системы, и ее уравнение дается равенствами (10), если в них положить $p = 0$. При этом, если одновременно $M = 0$, то равнодействующая будет, очевидно, проходить через центр приведения O ; если же $M \neq 0$, то равнодействующая проходит через некоторый другой центр O^* , что видно из рис. 250, если на нем считать в данном случае $M^* = 0$, $M_1 = M$.

Легко также убедиться, что если система сил приводится к равнодействующей, то для этой системы $R \neq 0$, $R \cdot M = 0$. Таким образом, чтобы система сил имела равнодействующую, необходимо и достаточно выполнение двух условий: $R \neq 0$, $R \cdot M = 0$ для любого центра приведения.

б) Если $R = 0$, но $M \neq 0$, то при этом, как видно из (13), $M = M' = \text{const}$, т. е. главный момент не зависит от выбора центра приведения. Система приводится в этом случае к паре сил с моментом

$$M = \sum_i (r_i \times F_i) = \sum \text{mom}_O F_i,$$

где O есть произвольный центр.

в) Если $R = 0$ и $M = 0$, то система сил эквивалентна нулю, т. е. находится в равновесии.

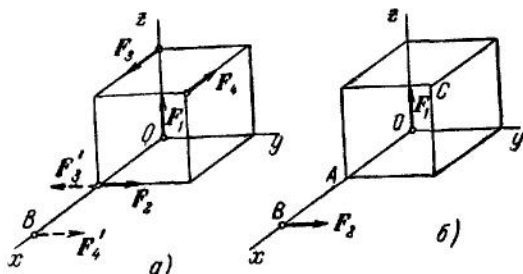


Рис. 253.

Пример. Приведем к простейшему виду систему четырех одинаковых по напряжению сил ($F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$), действующих вдоль ребер куба со стороной a (рис. 253, а).

Прежде всего заметим, что силы F_3, F_4 образуют пару, которую можно перенести в плоскость Oxy и расположить так, как показано на рис. 253, а

пунктиром. Отбросив после этого уравновешенные силы, F_2, F_3' , находим, что заданная система эквивалентна двум силам F_1 и $F_4' = F_2$, причем последняя сила приложена в точке B и $OB = 2a$ (рис. 253, б). Приведем эту систему сил к центру O и подсчитаем по формулам (11) и (12) проекции главного вектора R и главного момента $M_O = M$. Получим:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= 0, & R_y &= F_2 = F, & R_z &= F_1 = F, \\ M_x &= 0, & M_y &= 0, & M_z &= F_2 \cdot 2a = 2aF, \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$R = F\sqrt{2}, \quad M = 2Fa.$$

Теперь определяем значение второго инварианта системы

$$R \cdot M = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z = 2aF^2.$$

Так как второй инвариант не равен нулю, то система приводится к динаме с минимальным моментом M^* и параметром p , определяемыми равенствами (7) и (8). Следовательно,

$$M^* = \frac{R \cdot M}{R} = \frac{2aF^2}{F\sqrt{2}} = aF\sqrt{2}, \quad p = \frac{M^*}{R} = a.$$

Центральную ось системы находим по уравнению (10). Подставляя туда найденные значения $R_x, R_y, R_z, M_x, M_y, M_z$ и p , будем иметь:

$$\frac{-yF + zF}{0} = \frac{xF}{F} = \frac{2aF - xF}{F} = a.$$

Так как $a \neq 0$, то из первого отношения следует, что $-y + z = 0$, а из второго находим, что $x = a$. Следовательно, центральная ось определяется как пересечение плоскостей

$$y = z \quad \text{и} \quad x = a,$$

т. е. совпадает с диагональю AC передней грани куба.

Итак, данная система сил приводится к динаме, образованной силой $R = F\sqrt{2}$, направленной вдоль линии AC , и парой с моментом $M^* = aF\sqrt{2}$, лежащей в плоскости, перпендикулярной к AC .

Такой же результат, конечно, получится если систему заданных четырех сил сразу привести к центру O без предварительного ее упрощения.

8. Теорема Вариньона. Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно произвольного центра равен сумме моментов всех сил системы относительно того же центра.

Пусть некоторая система сил F_1, F_2, \dots, F_n имеет равнодействующую $R = \sum F_i$, приложенную в точке O^* (рис. 254). Перенесем равнодействующую R в произвольную точку O . При этом добавится пара (R, R') с моментом

$$M = \text{пот}_O R.$$

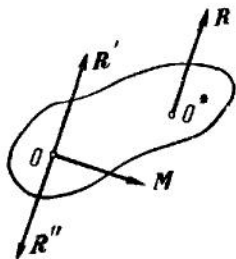


Рис. 254.

С другой стороны, M есть главный момент системы относительно центра O и равен сумме моментов всех сил относительно этого центра, т. е.

$$M = \sum \text{mom}_O F_i.$$

Сравнивая между собой эти два равенства, получаем теорему Вариньона:

$$\text{mom}_O R = \sum \text{mom}_O F_i. \quad (14)$$

Проектируя обе части равенства (14) на любую ось, проходящую через центр O , найдем, что теорема Вариньона справедлива и для моментов относительно оси.

§ 23. Частные случаи систем сил

1. Плоская система сил. Система сил, расположенных в одной плоскости (плоская система), как и всякая другая, является частным случаем пространственной системы сил. Пусть мы имеем какую угодно плоскую систему сил F_1, F_2, \dots, F_n . Возьмем в плоскости действия сил произвольный центр O и приведем систему к этому центру. Тогда эта система, как и любая другая, приведет к приложенной в центре O силе, равной главному вектору системы R , и к паре с моментом, равным главному моменту M_O системы относительно центра O , где

$$R = \sum F_i, \quad M_O = \sum \text{mom}_O F_i = \sum_i r_i \times F_i. \quad (1)$$

Но так как в данном случае все силы F_i и центр O лежат в одной плоскости, то сила R будет лежать в той же плоскости, а все векторы-моменты $r_i \times F_i$, а следовательно, и главный момент M_O , будут перпендикулярны к этой плоскости.

Отсюда следует, во-первых, что числовое значение главного момента плоской системы сил можно вычислять как алгебраическую сумму моментов этих сил относительно центра O , т. е. если h_i — плечи сил F_i , то

$$M_O = \sum \text{mom}_O(F_i) = \sum \pm F_i h_i. \quad (2)$$

Во-вторых, поскольку главный момент M_O плоской системы сил всегда перпендикулярен к главному вектору R , то второй инвариант $R \cdot M$ для любой плоской системы сил равен нулю, т. е.

$$R \cdot M = 0 \quad (3)$$

Первым инвариантом системы по-прежнему будет $R = \sum F_i$.

Отсюда на основании результатов, полученных в § 22, п 7, заключаем, что для любой плоской системы сил (не находящейся

в равновесии) может иметь место один из следующих двух частных случаев.

1) Если $R \neq 0$, то система приводится к одной силе $R^* = R$, которая будет *равнодействующей* данной системы сил. Линия действия этой равнодействующей есть прямая, относительно всех точек которой главный момент системы равен нулю. Эта прямая будет *центральной осью* данной системы сил. Ее векторное уравнение получится из равенства (9) § 22, если в нем положить $p = 0$, и имеет вид

$$M_O - \overline{OO^*} \times R = 0, \quad (4)$$

где O^* — любая точка центральной оси.

Проведя в плоскости действия сил координатные оси Oxy с началом координат в центре O и обозначив координаты точки O^* через x^* , y^* , получим уравнение центральной оси в декартовых координатах, проектируя обе части уравнения (4) на ось z , перпендикулярную к плоскости Oxy , в виде

$$R_y x^* - R_x y^* = M_O, \quad (5)$$

где M_O есть алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно начала координат O , вычисляемая по формуле (2). Этот же результат найдем из равенств (10) § 22, учитывая, что для плоской системы сил $z^* = 0$, $R_z = 0$, $M_x = M_y = 0$, $M_z = M_O$.

2) Если $R = 0$, то момент результирующей пары M при перемещении центра приведения не изменяется; система сил приводится в этом случае к одной паре, момент которой M будет равен сумме моментов всех сил системы относительно любой точки плоскости.

Итак, всякую плоскую систему сил, не эквивалентную нулю, можно привести или к одной силе (равнодействующей)

$$R^* = \sum F_i,$$

если $R = \sum F_i \neq 0$, или к одной паре с моментом

$$M = \sum \text{mom}_O F_i,$$

если

$$R = \sum F_i = 0.$$

2. Система параллельных сил. Пусть мы имеем систему параллельных сил F_1, F_2, \dots, F_n , направление которых характеризуется единичным вектором p (рис. 255). Условимся в дальнейшем понимать под F_i проекцию силы F_i на направление p , т. е.

$$F_i = F_i p. \quad (6)$$

Тогда выражения главного вектора и главного момента будут иметь вид

$$R = \sum F_i = \sum p F_i = p \sum F_i = pR,$$

т. е.

$$R = pR, \text{ где } R = \sum F_i. \quad (7)$$

Главный момент системы относительно любого центра O будет:

$$M_O = \sum (r_i \times F_i) = \sum (r_i \times p F_i), \quad (8)$$

или

$$M_O = (\sum r_i F_i) \times p. \quad (9)$$

Для системы параллельных сил (так же как и для плоской системы) второй инвариант $R \cdot M$ оказывается равным нулю. Действительно,

$$R \cdot M = pR \cdot (\sum r_i F_i) \times p = 0,$$

так как в смешанном произведении два множителя pR и p коллинеарны. Следовательно, система параллельных сил может также приводиться или к равнодействующей, или к паре.

Если $R \neq 0$, то система параллельных сил приводится к одной силе

$$R^* = p \sum_{i=1}^n F_i. \quad (10)$$

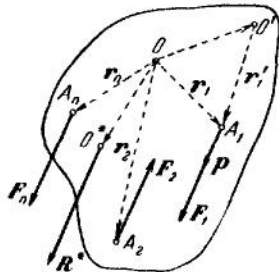


Рис. 255.

Линия действия этой силы есть прямая, относительно всех точек O^* которой главный момент системы равен нулю, т. е. центральная ось системы; уравнение ее в векторной форме есть уравнение (4). Заменяя в нем M_O его значением из равенства (9), получим уравнение центральной оси в виде

$$(\sum F_i r_i) \times p - \overline{OO^*} \times pR = 0$$

или, деля обе части на R ,

$$\left(\frac{\sum r_i F_i}{R} - \overline{OO^*} \right) \times p = 0.$$

Но

$$\frac{\sum r_i F_i}{R} = \frac{\sum r_i F_i}{\sum F_i} = r_0,$$

где r_0 — радиус-вектор центра параллельных сил (см. § 18, п. 4). Таким образом, уравнение центральной оси примет вид

$$(r_0 - \overline{OO^*}) \times p = 0. \quad (11)$$

Если векторное произведение равно нулю и ни один из векторов не равен нулю, то векторы $r_0 - \overline{OO^*}$ и p коллинеарны; следовательно, уравнение центральной оси можно представить еще в виде

$$\frac{r_0 - \overline{OO^*}}{p} = k, \quad (12)$$

где k есть скалярная величина. В проекциях на оси координат уравнение (12) будет иметь вид

$$\frac{x^* - x_0}{p_x} = \frac{y^* - y_0}{p_y} = \frac{z^* - z_0}{p_z}, \quad (13)$$

где x^* , y^* , z^* суть координаты точки O^* (проекции вектора $\overline{OO^*}$), а x_0 , y_0 , z_0 — координаты центра параллельных сил (проекции вектора r_0).

Из уравнения (13) центральной оси видно, что центральная ось системы параллельных сил есть прямая, параллельная этим силам и проходящая через центр параллельных сил. Этим вывод соответствует результатам, полученным в § 18.

Итак, при $R \neq 0$ система параллельных сил приводится к равнодействующей.

Предположим теперь, что $R = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} M &= \sum (r_i \times F_i p) = \\ &= (\sum F_i r_i) \times p = \text{const} \quad (14) \end{aligned}$$

для всех центров приведения. Система параллельных сил приводится в этом случае к паре, момент которой постоянен.

Наконец, когда $R = 0$ и $M = 0$ система параллельных сил эквивалентна нулю. Случай этот обладает одной особенностью, если силы рассматривать как приложенные в данных точках (а не как скользящие векторы). Из равенства (14) видно, что $M = 0$ в случаях, когда векторы $\sum F_i r_i$ и p коллинеарны или когда $\sum F_i r_i = 0$.

Тогда, если $M = 0$ вследствие коллинеарности векторов $\sum F_i r_i$ и p , то равновесие будет иметь место только при данном направлении сил F_i . Если же направления сил изменить (сохраняя их модули и точки приложения), то вектор $\sum F_i r_i$ при этом не изменится, а направление p_i станет другим; следовательно, векторы $\sum F_i r_i$ и p_i не будут коллинеарны и мы получим $M \neq 0$, т. е. система повернутых сил приведет к паре. Такой результат объясняется тем, что в данном случае центры сил, параллельных и антипараллельных p , лежат в разных точках C_1 и C_2 и система приводится к двум равным

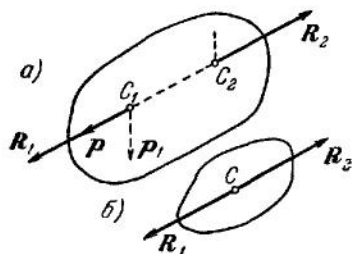


Рис. 256

по напряжению и противоположно направленным силам R_1, R_2 , приложенным в этих центрах (рис. 256, а); поэтому при изменении направления сил равновесие нарушается.

Если же $M=0$ вследствие того, что $\sum r_i F_i = 0$, то равновесие имеет место при всяком p , т. е. при всяком направлении параллельных сил (система приводится в этом случае к двум численно равным антипараллельным силам, приложенным в одной и той же точке, рис. 256, б). Такой случай равновесия системы параллельных сил называется безразличным, или *астатическим*.

§ 24. Условия равновесия систем сил

1. Условия равновесия произвольной системы сил. Так как при изменении центра приведения результирующая сила R не меняется, то для того, чтобы система была в равновесии, необходимо, чтобы $R=0$. Если $R=0$, то вся система приводится к одной паре, момент которой M не изменяется при изменении центра приведения. Следовательно, для равновесия необходимо еще, чтобы было $M=0$. Эти условия также и достаточны, потому что если $R=0$, то система приводится к одной паре с моментом M ; если же $M=0$, то система находится в равновесии (эквивалентна нулю).

Таким образом, мы имеем в векторной форме два необходимых и достаточных условия равновесия произвольной системы сил, а именно:

$$R \equiv \sum_{i=1}^n F_i = 0, \quad (1)$$

$$M \equiv \sum_{i=1}^n \text{мом}_O F_i = 0, \quad (2)$$

где O — произвольный центр.

В проекциях на оси координат [см. § 22, формулы (11), (12)] число условий равновесия для пространственной системы сил будет равно шести, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} = 0, \quad \sum \text{мом}_x F_i &\equiv \sum (y_i F_{iz} - z_i F_{iy}) = 0, \\ \sum F_{iy} = 0, \quad \sum \text{мом}_y F_i &\equiv \sum (z_i F_{ix} - x_i F_{iz}) = 0, \\ \sum F_{iz} = 0, \quad \sum \text{мом}_z F_i &\equiv \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

т. е. для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы: 1) сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей равнялась нулю, 2) сумма моментов всех сил относительно каждой из осей координат равнялась нулю.

2. Условия равновесия плоской системы сил. В случае плоской системы сил условий равновесия в векторной форме будет также два, а именно:

$$\begin{aligned} R &\equiv \sum F_i = 0, \\ M &\equiv \sum \text{mom}_O F_i = 0. \end{aligned}$$

В проекциях число условий равновесия будет три, а именно, если силы действуют в плоскости xu , то

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum \text{mom}_O F_i \equiv \sum (x_i F_{iy} - y_i F_{ix}) = 0. \quad (4)$$

Итак, для равновесия произвольной плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы: 1) сумма проекций всех сил на каждую из двух координатных осей (произвольно выбранных в плоскости действия сил) равнялась нулю и 2) сумма моментов всех сил относительно любого (произвольно взятого в той же плоскости) центра равнялась нулю.

Необходимые и достаточные условия равновесия плоской системы сил можно выразить еще в двух других формах, а именно:

1) *Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно каждого из трех произвольных, но не лежащих на одной прямой центров равнялась нулю* (теорема о трех моментах), т. е.

$$\sum \text{mom}_A F_i = 0, \quad \sum \text{mom}_B F_i = 0, \quad \sum \text{mom}_C F_i = 0, \quad (5)$$

где A , B и C — произвольные, не лежащие на одной прямой центры.

Необходимость этих условий очевидна, так как при равновесии сумма моментов сил системы относительно всякого центра есть нуль. Докажем достаточность условий (5). Ранее было установлено, что если для данной плоской системы сил главный момент $M_A = \sum \text{mom}_A F_i = 0$, то система находится в равновесии или приводится к равнодействующей, проходящей через центр A . Тогда если выполняются все условия (5), то система должна или находиться в равновесии, или приводиться к равнодействующей, проходящей одновременно через центры A , B и C . Но последнее невозможно, так как эти центры не лежат на одной прямой. Следовательно, при выполнении условий (5) имеет место равновесие.

2) *Для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов всех сил относительно двух произвольных центров и сумма проекций всех сил на произвольную ось, не перпендикулярную к прямой, соединяющей эти центры, равнялись нулю*, т. е.

$$\sum \text{mom}_A F_i = 0, \quad \sum \text{mom}_B F_i = 0, \quad \sum (F_i)_l = 0, \quad (6)$$

где ось l не перпендикулярна к прямой AB .

Ясно, что эти условия необходимы, так как при равновесии плоской системы сил сумма моментов всех сил относительно любого центра и сумма проекций всех сил на любое направление равны нулю. Докажем достаточность условий (6). Рассуждая как в предыдущем случае, заключаем, что при выполнении первых двух из условий (6) система должна или находиться в равновесии, или приводиться к равнодействующей R , проходящей одновременно через центры A и B , т. е. направленной вдоль линии AB . Но проекция такой равнодействующей на ось l , не перпендикулярную к AB , была бы отлична от нуля. В то же время по последнему из условий (6) должно быть

$$R_l = \sum (F_i)_l = 0.$$

Следовательно, при одновременном выполнении всех условий (6) система не может приводиться к равнодействующей, т. е. имеет место равновесие.

3. Условия равновесия системы параллельных сил. Когда силы расположены в пространстве, то, направляя ось z параллельно силам, мы найдем, что для каждой из них будет $F_{ix} = 0$, $F_{iy} = 0$, $\text{мом}_z F_i = 0$. Следовательно, первое, второе и последнее из равенств (3) обратятся в тождества вида $0 \equiv 0$ и мы получим для пространственной системы параллельных сил следующие три условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{iz} = 0, \quad \sum \text{мом}_x F_i \equiv \sum y_i F_{iz} = 0, \\ \sum \text{мом}_y F_i \equiv - \sum x_i F_{iz} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если рассматривать силы как приложенные в данных точках (см § 23, п. 2), то равенства (7) будут соответствовать случаю, когда равновесие не является астатическим. Чтобы равновесие было астатическим (безразличным) должно быть $\sum F_i r_i = 0$, что в проекциях на оси координат приводит к еще одному дополнительному условию: $\sum z_i F_{iz} = 0$.

Для плоской системы параллельных сил, направляя ось y параллельно силам, получим из (4) два условия равновесия:

$$\sum F_{iy} = 0, \quad \sum \text{мом}_O F_i \equiv \sum x_i F_{iy} = 0. \quad (8)$$

Другая форма условий равновесия имеет вид

$$\sum \text{мом}_A F_i = 0, \quad \sum \text{мом}_B F_i = 0, \quad (9)$$

где центры A и B не лежат на прямой, параллельной силам. Справедливость этого результата доказывается так же, как для условий (6).

4. Системы статически определяемые и неопределяемые. При решении задач о равновесии несвободного твердого тела в условия равновесия входят наряду с активными силами реакции связей, вели-

чины которых наперед неизвестны. Число этих неизвестных зависит от числа и характера наложенных связей. Соответствующая задача может быть решена методами статики твердого тела лишь в том случае, если число неизвестных реакций связей будет равно числу уравнений статики, в которые эти неизвестные входят. Такие задачи называют статически определенными, а системы тел, для которых это имеет место, — статически определенными системами.

Если же число неизвестных реакций связей будет больше числа уравнений статики, в которые эти реакции входят, то задача будет статически неопределенной, а система тел, для которой это имеет место, — статически неопределимой системой.

Рассмотрим, например, горизонтальную балку, лежащую на двух опорах A и B и нагруженную вертикальными силами P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 257, a). Кроме этих сил, на балку действуют перпендикулярные

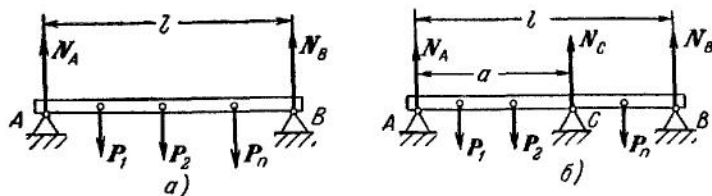


Рис 257

к ней реакции опор N_A и N_B . Составляя для полученной плоской системы параллельных сил условия равновесия (9), будем иметь:

$$\sum \text{мом}_A P_i + N_B \cdot l = 0, \quad \sum \text{мом}_B (P_i) - N_A \cdot l = 0$$

Эти два уравнения содержат две неизвестные реакции, которые отсюда легко определяются.

Пусть теперь та же балка покоится на трех опорах A, B и C (рис. 257, b). Тогда на нее будут действовать, кроме активных сил, три реакции связей N_A, N_B, N_C . Но действующие силы образуют по-прежнему плоскую систему параллельных сил; следовательно, условий равновесия останется два:

$$\begin{aligned} \sum \text{мом}_A P_i + N_B \cdot l + N_C \cdot a &= 0, \\ \sum \text{мом}_B P_i - N_A \cdot l - N_C (l - a) &= 0. \end{aligned}$$

Определить из этих двух уравнений три неизвестных нельзя

Таким образом, балка на двух опорах является статически определенной, а балка на трех (и более) опорах будет статически неопределимой.

Статическая неопределимость появляется вследствие наложения лишних связей, ненужных для обеспечения равновесия абсолютно

твердого тела. Расчет статически неопределимых систем требует учета их деформаций. Такие задачи решаются в курсах сопротивления материалов или статике сооружений.

Б. Решение задач. При решении любой задачи методами геометрической статике следует, как уже указывалось, выделить тело, равновесие которого рассматривается, и изобразить все действующие на это тело активные силы и реакции связей (если направление реакции какой-либо связи наперед неизвестно, то обычно эту реакцию представляют ее составляющими вдоль осей координат). После этого для полученной системы сил составляют условия равновесия, число и вид которых зависят от характера системы сил; из полученных таким путем уравнений и определяют искомые в задаче величины.

Если в задаче приходится рассматривать равновесие *системы тел*, соединенных внутренними связями в виде шарниров, гибких нитей и т. п., то эту систему расчленяют на отдельные тела и составляют условия равновесия для сил, действующих на каждое из тел системы в отдельности (особенности решения таких задач отмечены в примере 2).

Рассмотрим примеры.

1. Горизонтальная однородная балка длины $2l$ и веса P укрепена в точке A шарниром, а концом B опирается на гладкую плоскость, наклоненную к горизонту под углом α (рис. 258). На балке, на расстоянии a от шарнира A покоится груз весом Q . Найти реакции шарнира и плоскости.

Для определения искомых величин рассматриваем равновесие балки.

На нее действуют две активные силы P и Q , реакция N плоскости, направленная по нормали к этой плоскости, и реакция R_A шарнира, которую представим ее составляющими X_A и Y_A вдоль осей координат. При этом целесообразно направить ось x горизонтально, а y — вертикально. Для полученной плоской системы сил составляем условия равновесия в форме (4), беря моменты относительно центра A , где пересекаются две неизвестные силы X_A и Y_A . Получаем:

$$\sum F_{kx} = X_A - N \sin \alpha = 0, \quad \sum F_{ky} = Y_A + N \cos \alpha - P - Q = 0, \quad (a)$$

$$\sum \text{мом}_A F_k = 2Nl \cos \alpha - Pl - Qa = 0. \quad (б)$$

Момент реакции N можно находить или как произведение N на плечо $h = 2l \cos \alpha$, или же можно представить силу N разложенной вдоль AB и по нормали к AB на составляющие N_1 , N_2 и искать $\text{мом}_A N$ по теореме Вариньона: $\text{мом}_A N = \text{мом}_A N_1 + \text{мом}_A N_2$. При этом $\text{мом}_A N_1 = 0$ и мы получим $\text{мом}_A N = \text{мом}_A N_2 = 2l \cdot N \cdot \cos \alpha$. Такой прием бывает особенно удобен в случаях, когда возникают затруднения с подсчетом плеча.

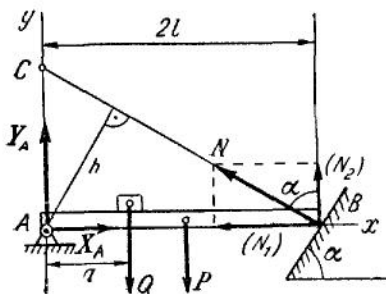


Рис 258

Решая полученную систему уравнений, находим:

$$N = \frac{Pl + Qa}{2l \cos \alpha}, \quad X_A = \frac{Pl + Qa}{2l} \operatorname{tg} \alpha, \quad Y_A = \frac{P}{2} + Q \left(1 - \frac{a}{2l}\right).$$

Найденные значения X_A и Y_A определяют реакцию R_A . Условия равновесия можно было бы составить и в другой форме, беря, например, уравнения моментов относительно центров A , B и C , в каждом из которых пересекаются по две неизвестные реакции. Тогда к уравнению (6), позволяющему найти N , добавились бы два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sum \operatorname{mom}_B F_k &\equiv Q(2l - a) + Pl - Y_A \cdot 2l = 0, \\ \sum \operatorname{mom}_C F_k &\equiv X_A \cdot 2l \operatorname{ctg} \alpha - Pl - Qa = 0, \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

которые служат для определения Y_A и X_A . Система уравнений (6) и (v) интересна тем, что каждое из них содержит только по одной неизвестной реакции.

2. Два одинаковых однородных стержня весом P каждый соединены шарниром B и прикреплены шарнирами A и C к неподвижным опорам так, что стержень AB горизонтален, а стержень BC образует с вертикалью угол α (рис. 259, а). Определить реакции шарниров.

Для решения задачи рассматриваем равновесие каждого из стержней в отдельности. На каждый стержень (рис. 259, б) действуют сила тяжести и реакции соответствующих шарниров, которые мы представляем их составляющими вдоль осей координат. При этом, согласно закону действия и противодействия, реакции X'_B , Y'_B шарнира B на стержень BC должны быть направлены противоположно реакциям X_B , Y_B на стержень AB . По численной же величине

$$X'_B = X_B, \quad Y'_B = Y_B. \quad (a)$$

Теперь составляем условия равновесия для действующих на стержни плоских систем сил [в форме (6) для AB и в форме (4) для BC]. Обозначая $AB = BC = 2a$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} &\text{для стержня } AB \\ \sum \operatorname{mom}_A F_i &\equiv Y_B \cdot 2a - Pa = 0, \\ \sum \operatorname{mom}_B F_i &\equiv Pa - Y_A 2a = 0, \\ \sum F_{ix} &\equiv X_A + X_B = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{для стержня } BC \\ \sum F_{ix} &\equiv X_C - X'_B = 0, \\ \sum F_{iy} &\equiv Y_C - P - Y'_B = 0, \\ \sum \operatorname{mom}_C F_i &\equiv Pa \sin \alpha + Y_B \cdot 2a \sin \alpha - X_B \cdot 2a \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (v)$$

Заметим, что для стержня AB нельзя составлять третье уравнение в виде $\sum F_{iy} = 0$, так как ось y перпендикулярна к AB . Если бы, однако, мы это сделали, то получили бы уравнение $Y_A + Y_B - P = 0$, являющееся следствием первых двух.

Учитывая равенства (а), найдем из полученных шести уравнений с шестью неизвестными:

$$X_A = -X_B = -X_C = P \operatorname{tg} \alpha, \quad Y_A = Y_B = \frac{P}{2}, \quad Y_C = \frac{3}{2} P.$$

Направления реакций X_B , X'_B и X_C противоположны показанным на рисунке.

Задачу можно еще решать другим путем, рассматривая сначала равновесие *всей системы* (рис. 259, а). Так как внутренние силы взаимно уравновешиваются, то необходимо составить условия равновесия только *внешних*

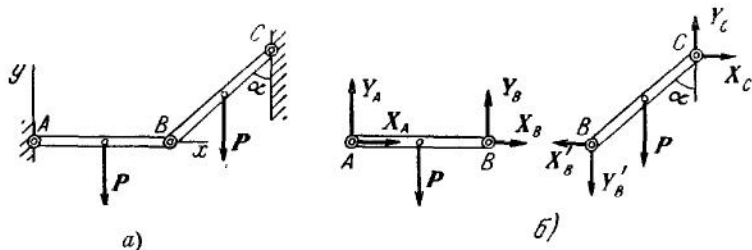


Рис. 259.

сил, действующих на систему, т. е. сил тяжести и реакций R_A и R_C (на рисунке не показаны). В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{ix} &\equiv X_A + X_C = 0, & \sum F_{iy} &\equiv Y_A + Y_C - 2P = 0, \\ \sum \operatorname{mom}_A F_i &\equiv -Pa - P(2a + a \sin \alpha) - X_C \cdot 2a \cos \alpha + \\ &+ Y_C(2a + 2a \sin \alpha) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (r)$$

Эти три уравнения содержат четыре неизвестных. Поэтому для решения задачи надо дополнительно рассмотреть условия равновесия одного из стержней [но не обоих, так как уравнения (г) являются следствиями уравнений (а) и (б)]. Решая совместно систему уравнений (б) и (г), найдем искомые реакции.

Такой путь решения иногда бывает проще, так как уравнения вида (г), вытекающие из условий равновесия всей системы в целом, содержат меньше неизвестных (в них не входят внутренние реакции).

Из рассмотренного примера следует, что вопрос о статической определенности или неопределенности конструкции, состоящей из нескольких тел, должен решаться путем расчленения этой конструкции на отдельные тела. Если при этом общее число неизвестных реакций связей будет равно числу полученных уравнений, в которые эти реакции входят, то конструкция является статически определенной, что и имеет место в рассмотренном примере. На основании одних только уравнений (г), составленных для сил, действующих на конструкцию в целом, делать заключения о ее статической определенности или неопределенности нельзя.

3. Трехногий стол, стоящий на горизонтальной плоскости, нагружен вертикальными силами, равнодействующая которых P проходит через точку $K(x, y)$ (рис. 260). Точки опоры A, B и C лежат в вершинах равностороннего треугольника со стороной $2a$. Найти реакции плоскости.

Рассмотрим равновесие стола, на который действуют сила P и реакции N_A, N_B, N_C . Проводя оси координат так, как показано на рисунке, соста-

вляем для полученной пространственной системы параллельных сил условия равновесия (7). Получаем:

$$\begin{aligned}\sum F_{iz} &= N_A + N_B + N_C - P = 0, \\ \sum \text{mom}_x F_i &= N_B \cdot 2a + N_C \cdot a - Py = 0, \\ \sum \text{mom}_y F_i &= Px - N_C h = 0 \quad (h = a\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Отсюда находим:

$$N_C = P \frac{x}{h}, \quad N_B = \frac{P}{2} \left(\frac{y}{a} - \frac{x}{h} \right), \quad N_A = P \left(1 - \frac{x}{2h} - \frac{y}{2a} \right).$$

Легко проверить, что если линия действия силы P проходит внутри треугольника ABC , то все реакции положительны. В противном случае некоторые из реакций становятся отрицательными (например, при $x < 0$, $N_C < 0$) и стол опрокинется.

Если при тех же условиях рассмотреть равновесие стола на четырех ножках, то неизвестных реакций будет четыре, а уравнений, содержащих эти реакции, останется три; следовательно, задача будет статически неопределенной.

4. Однородная прямоугольная пластина $ABED$ весом P со сторонами $AD = a$, $AB = b$, образующая с вертикалью угол α , укреплена в точке A

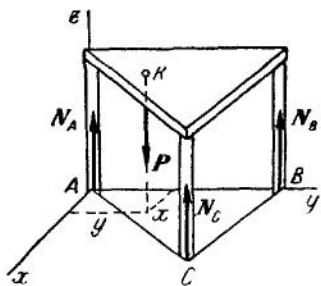


Рис. 260.

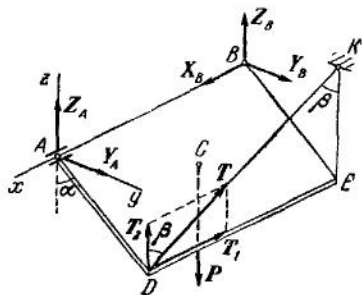


Рис. 261.

цилиндрическим, а в точке B сферическим шарнирами так, что линия AB горизонтальна (рис. 261). Пластина удерживается в равновесии нитью DK , лежащей в вертикальной плоскости, проходящей через линию DE , и образующей с вертикалью угол β . Найти реакции шарниров и нити.

Для определения искомых величин рассматриваем равновесие пластины. Проводим оси координат: Az — по вертикали вверх, Ax — вдоль линии BA , Ay — перпендикулярно к плоскости xAz . На пластину действуют сила тяжести P , направленная по вертикали вниз и приложенная в центре плиты C , реакция T нити, направленная вдоль нити, и реакции шарниров. Реакция цилиндрического шарнира A может иметь любое направление в плоскости yAz , перпендикулярной к его оси; изображаем ее двумя составляющими Y_A и Z_A . Реакция сферического шарнира B может иметь любое направление в пространстве; ее мы изобразим тремя составляющими X_B , Y_B , Z_B .

Для полученной пространственной системы сил составляем шесть условий равновесия (3):

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &\equiv X_B - T \sin \beta = 0, \\ \sum F_{iy} &\equiv Y_A + Y_B = 0, \\ \sum F_{iz} &\equiv Z_A + Z_B - P + T \cos \beta = 0, \\ \sum \text{mom}_x F_i &\equiv T \cos \beta \cdot a \sin \alpha - P \frac{a}{2} \sin \alpha = 0, \\ \sum \text{mom}_y F_i &\equiv T \sin \beta \cdot a \cos \alpha - P \frac{b}{2} + Z_B b = 0, \\ \sum \text{mom}_z F_i &\equiv T \sin \beta \cdot a \sin \alpha - Y_B \cdot b = 0.\end{aligned}$$

Входящие в условия равновесия моменты сил относительно осей координат обычно вычисляют как момент проекции силы на плоскость, перпендикулярную к соответствующей оси, относительно точки пересечения оси с этой плоскостью. Например (рис. 262), $\text{mom}_x P = \text{mom}_A P_{yz} = -P_{yz} \cdot h_1 = -P \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha$, так как $P_{yz} = P$, $h_1 = \frac{a}{2} \sin \alpha$. Аналогично находятся другие моменты.

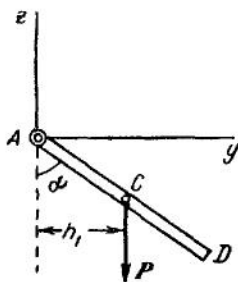


Рис. 262.

При вычислении момента силы T относительно оси y можно разложить эту силу на составляющие: T_1 , направленную вдоль DE , и T_2 , параллельную оси z . Тогда по теореме Вариньона $\text{mom}_y T = \text{mom}_y T_1 + \text{mom}_y T_2$. Но $\text{mom}_y T_2 = 0$, так как сила T_2 пересекает ось y . Следовательно, $\text{mom}_y T = \text{mom}_y T_1 = T_1 a \cos \alpha$, где $T_1 = T \sin \beta$. Такой прием особенно удобен в случаях, когда возникают затруднения с определением проекций силы на плоскость, перпендикулярную к соответствующей оси. В этих случаях можно также вычислять моменты непосредственно по аналитическим формулам, представленным в уравнениях (3).

Решая полученную для определения реакций систему уравнений, найдем окончательно:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{P}{2 \cos \beta}, & Y_A &= -\frac{P}{2} \frac{a}{b} \text{tg} \beta \sin \alpha, & Z_A &= \frac{P}{2} \frac{a}{b} \text{tg} \beta \cos \alpha, \\ X_B &= \frac{P}{2} \text{tg} \beta, & Y_B &= -Y_A, & Z_B &= \frac{P}{2} \left(1 - \frac{a}{b} \text{tg} \beta \cos \alpha \right). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Так как величина Y_A получилась отрицательной, то это означает, что составляющая Y_A имеет фактически направление, противоположное показанному на рис. 261. Найденные значения реакций определяют реакции R_A и R_B .

Заметим, что если в точке A также был бы сферический шарнир, то появилась бы дополнительная реакция X_A и первое из условий равновесия приняло бы вид

$$X_A + X_B - T \sin \beta = 0. \quad (б)$$

Остальные уравнения при этом не изменились бы и мы нашли бы для величин T, Y_A, Z_A, Y_B, Z_B те же значения, которые даны в равенствах (а).

Однако задача определения реакций X_A и X_B из одного уравнения (б) оказалась бы статически неопределенной, так как, сделав шарнир A сферическим, мы наложили на систему лишнюю связь (отсутствие скольжения вдоль оси x обеспечивается одним сферическим шарниром B).

6. Условия равновесия несвободного тела. Всякое несвободное тело можно рассматривать как свободное, отбрасывая связи и заменяя действия их реакциями (§ 15, п. 5). Условиями равновесия тела будем называть уравнения, которые связывают активные силы, действующие на тело, или параметры, определяющие положение тела, и не содержат неизвестных реакций связей.

Число независимых перемещений, которые может иметь тело, называется *числом степеней свободы* тела. Свободное твердое тело, кроме трех поступательных перемещений, параллельных осям координат, может иметь еще три вращения вокруг тех же осей; следовательно, оно имеет шесть независимых перемещений. Чтобы тело не двигалось поступательно параллельно какой-нибудь оси, необходимо, чтобы сумма проекций всех сил на эту ось равнялась нулю, а чтобы тело не вращалось около какой-нибудь оси, необходимо, чтобы сумма моментов всех сил относительно этой оси равнялась нулю. При равновесии тела действующие на него силы должны удовлетворять таким условиям, чтобы они не могли сообщить телу допустимых связями движений; поэтому число условий равновесия тела равно числу его степеней свободы.

1) *Равновесие рычага.* Рычагом называется твердое тело которое может вращаться вокруг неподвижной оси под действием сил, расположенных в плоскости, перпендикулярной к этой оси. Пусть на рычаг действуют активные силы P_1, P_2, \dots, P_n , лежащие в названной плоскости (рис. 263). Реакция оси R будет, очевидно, лежать в той же плоскости и иметь в ней произвольное направление. Проведем оси координат Oxy и составим для действующей на рычаг плоской системы сил три условия равновесия в форме (4):

$$\sum P_x + R_x = 0, \quad \sum P_y + R_y = 0, \quad (10)$$

$$\sum \text{mom}_O P = 0. \quad (11)$$

Равенства (10) дают уравнения, которые служат для определения реакции R , а равенство (11), не содержащее реакций, определяет условие равновесия рычага.

Следовательно, условие равновесия рычага заключается в том, чтобы сумма моментов всех сил относительно оси вращения равнялась нулю.

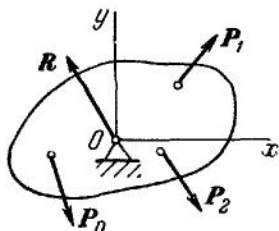


Рис. 263.

2) *Равновесие твердого тела, имеющего одну неподвижную точку.* Пусть мы имеем тело, закрепленное в одной точке O (сферический шарнир), на которое действуют активные силы P_1, P_2, \dots, P_n (рис. 264). Реакция R будет приложена в точке O и имеет произвольное направление в пространстве. Проведем оси координат $Oxuz$ с началом в точке O и составим для действующих на тело сил условия равновесия (3);

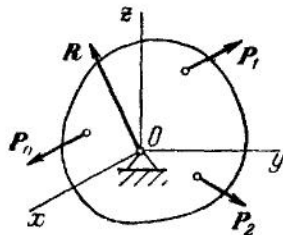


Рис. 264.

$$\left. \begin{aligned} \sum P_{ix} + R_x &= 0, \\ \sum P_{iy} + R_y &= 0, \\ \sum P_{iz} + R_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum \text{mom}_x P_i &= 0, \\ \sum \text{mom}_y P_i &= 0, \\ \sum \text{mom}_z P_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Равенства (12) служат для определения реакции R , а равенства (13) являются условиями равновесия тела. Следовательно, условия равновесия твердого тела, имеющего неподвижную точку, состоят в том, что суммы моментов всех действующих сил относительно каждой из трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через неподвижную точку, должны равняться нулю.

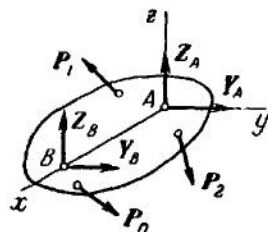


Рис. 265.

3) *Равновесие тела, имеющего ось вращения — скольжения.* Пусть тело имеет ось вращения, вдоль которой оно может скользить, т. е., например, закреплено с помощью двух цилиндрических шарниров (подшипников) в точках A и B (рис. 265). Тогда реакции в точках закрепления будут нормальны к оси, т. е. (при направлениях осей, показанных на рисунке) будут иметь составляющие Y_A, Z_A и Y_B, Z_B . Составляя для действующих на тело сил шесть условий равновесия (3), мы найдем, что из них только два, а именно

являющие Y_A, Z_A и Y_B, Z_B . Составляя для действующих на тело сил шесть условий равновесия (3), мы найдем, что из них только два, а именно

$$\sum P_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad \sum \text{mom}_x P_i = 0, \quad (14)$$

не содержат неизвестных реакций и являются условиями равновесия тела. Таким образом, для тела, имеющего ось вращения — скольжения, будет два условия равновесия, состоящих в том, что сумма проекций всех действующих сил на данную ось и сумма их моментов относительно этой оси должны быть равны нулю.

4) *Равновесие тела, имеющего неподвижную ось вращения.* Если один из шарниров, A или B , показанных на рис. 265, сделать сферическим, то ось вращения тела станет неподвижной; при этом

добавится еще одна составляющая реакции, направленная вдоль оси x . Следовательно, теперь только одно из равенств (14), а именно

$$\sum \text{mom}_x P_i = 0, \quad (15)$$

не будет содержать неизвестных реакций и явится условием равновесия тела. Таким образом, для тела, имеющего неподвижную ось вращения, будет одно условие равновесия, состоящее в том, что сумма моментов относительно этой оси всех действующих сил должна быть равна нулю. Заметим, что, в частности, такое тело может быть рычагом (когда все силы лежат в плоскости, перпендикулярной к оси AB).

§ 25. Основы графостатики

1. Система сил, сходящихся в одной точке. Учение о графических методах решения задач статики представляет собой отдел механики, который называется *графостатикой*. При графическом методе сила изображается, как

обычно, вектором, длина которого берется в определенном масштабе и направление соответствует направлению силы. Рассмотрим систему сил, приложенных в одной точке. Равнодействующая их, как известно, находится по правилу силового

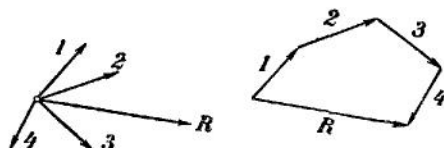


Рис. 266.

многоугольника (рис. 266). Если многоугольник замкнут, то система находится в равновесии, если же он не замкнут, то система приводится к равнодействующей, которая изображается вектором, замыкающим силовой многоугольник.

Рассмотрим пример (см. еще § 16, п. 5).

К отвесной стене приставлен стержень весом P , другой конец которого упирается в угол. Найти реакции стены и угла (рис. 267).

Реакция стены N направлена перпендикулярно к стене, направление силы тяжести P тоже известно. Чтобы система трех сил была в равновесии, необходимо, чтобы линии действия сил пересекались в одной точке. Линии действия двух сил P и N пересекутся в точке O , следовательно, при равновесии направление реакции угла S должно пройти через эту же точку O . Для определения величины реакций N и S по данной силе P и известным направлениям реакций строим силовой треугольник (план сил), начиная построение с силы P . Из полученного треугольника определяем N и S .

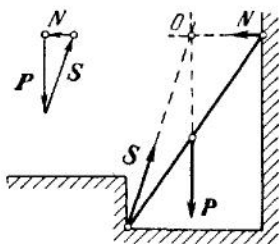


Рис. 267.

2. Метод веревочного (нитяного) многоугольника. Пусть мы имеем некоторую силу F (рис. 268, а). Возьмем произвольный

полос O , не лежащий на линии действия силы F , и соединим его с концами силы F ; тогда мы можем рассматривать силу F как равнодействующую двух сил: $O1$, 10 (читается: ноль — один, один — ноль), приложенных в той же точке, в которой будет приложена сила F .

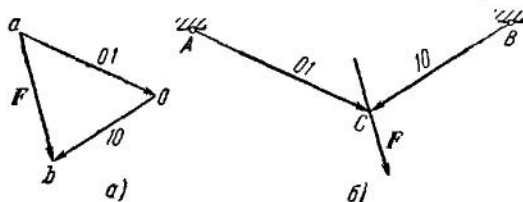


Рис 268.

Поэтому если мы возьмем нить ACB , так что AC и CB будут соответственно параллельны силам $O1$ и 10 , и закрепим концы A и B неподвижно, а к точке C приложим ту же силу F , то эта сила может быть представлена как равнодействующая сил $O1$ и 10 , приложенных к точке C (рис. 268, б); при этом силы $O1$ и 10 будут, очевидно, равны натяжениям участков нити AC и CB . Фигуры (а) и (б) обладают тем свойством, что являются взаимными [их стороны параллельны и линии, сходящиеся на одной фигуре в одной точке (точка C на рис. 268, б), образуют на другой фигуре треугольник ($\triangle Oab$ на рис. 268, а)]; первая фигура называется *планом сил*, вторая — *нитяным* или *веревочным* (или *стержневым*) *многоугольником*.

Определим теперь графически величину момента силы F , приложенной в точке D , относительно центра K (рис. 269). Для этого

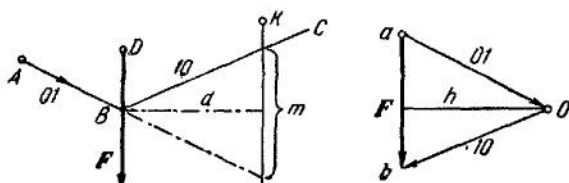


Рис. 269.

от некоторой точки a откладываем вектор $\overline{ab} = F$ и, взяв произвольный центр O , строим сначала силовой треугольник Oab , а затем соответствующий ему нитяной многоугольник. Для построения нитяного многоугольника проводим из произвольной точки A луч, параллельный $O1$, до пересечения с линией действия силы F в точке B , а от точки B — луч, параллельный 10 , до произвольной точки C . Для нахождения момента силы F относительно центра K проведем через K прямую, параллельную направлению силы F ; тогда $\text{мом}_K F$

будет пропорционален отрезку m этой прямой, полученному от пересечения ее с направлениями сторон нитяного треугольника. Действительно, из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{m}{F} = \frac{d}{h},$$

откуда $Fd = mh$; следовательно, момент силы F относительно центра A равен отрезку m , умноженному на полюсное расстояние h , причем отрезок m измеряется в масштабе длин, а h — в масштабе сил.

3. Плоская система сил. Пусть дана плоская система сил 1, 2, 3, 4, действующих на некоторое твердое тело (рис. 270, а).

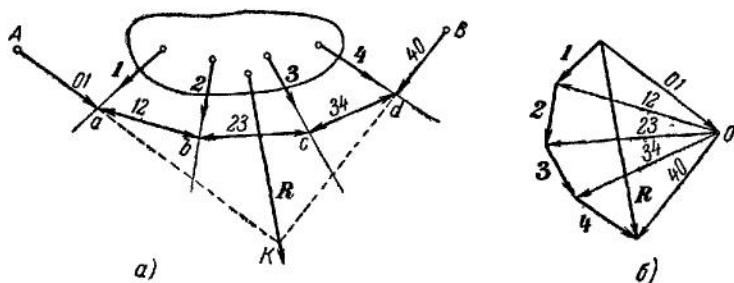


Рис. 270.

Строим силовой многоугольник, замыкающая которого R даст равнодействующую данной системе сил по напряжению и направлению (рис. 270, б). Определим теперь, где эта равнодействующая приложена к телу. Для этого выберем произвольный полюс O , не лежащий на сторонах силового многоугольника или их продолжениях (см. п. 2), и соединим его с вершинами силового многоугольника лучами 01 , 12 , 23 , 34 , 40 . Тогда силу 1 мы можем рассматривать как равнодействующую сил 01 и 12 , силу 2 — как равнодействующую сил (-12) и 23 и т. д., где (-12) — сила, равная по модулю 12 и направленная ей противоположно.

Построим теперь на рис. 270, а для данной системы сил веревочный многоугольник. Для этого от любой точки A проводим прямую, параллельную лучу 01 , до пересечения ее с линией действия силы 1 в точке a . Затем из a проводим прямую, параллельную лучу 12 , до пересечения с линией действия силы 2 в точке b и т. д. Последнюю прямую dB проводим из точки d параллельно лучу 40 до произвольной точки B . Фигура $AabcdB$ и будет для данной системы сил веревочным или стержневым многоугольником (такую форму принимает нить, укрепленная в точках A и B и нагруженная в точках a , b , c , d силами 1, 2, 3, 4, или же система жестких невесомых стержней, соединенных в точках a , b , c , d шарнирами,

прикрепленных к неподвижным точкам A и B также с помощью шарниров и находящихся под действием сил $1, 2, 3, 4$, приложенных к шарнирам). Заметим теперь, что, согласно показанному в п. 2, мы можем силу 1 заменить двумя силами 01 и 12 , приложенными в точке a (на рис. 270, a эти силы показаны в уменьшенном масштабе), силу 2 можем таким же образом заменить двумя силами (-12) и 23 , приложенными в точке b , и т. д. При этом, как уже было указано, сила (-12) численно равна, а по направлению противоположна силе 12 и т. д. В результате первоначальная система сил $(1, 2, 3, 4)$ заменится другой, эквивалентной ей системой сил, которые будут направлены по прямым Aa, ab, bc, cd, dB , причем силы, направленные по прямым ab, bc, cd , как равные и противоположные, взаимно уравниваются. Таким образом, вся система сил приводится к двум силам, направленным по прямым Aa и Bd , параллельным лучам 01 и 40 .

Так как равнодействующая двух сил, лежащих в одной плоскости, проходит через точку пересечения линий действия этих сил, то равнодействующая системы сил $(1, 2, 3, 4)$ должна пройти через точку K пересечения прямых Aa и dB . Проводя через точку K вектор R , найденный построением силового многоугольника, мы и получим

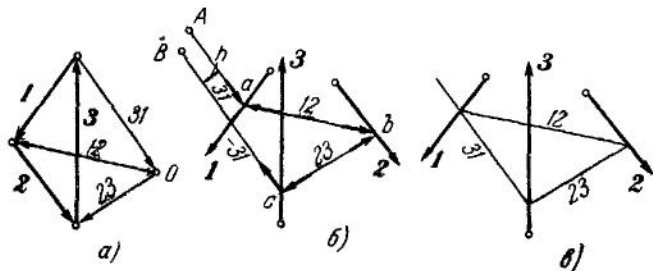


Рис. 271.

искомую равнодействующую. Таким образом, если силовой многоугольник не замкнут, то данная система сил приводится к равнодействующей, численная величина и направление которой определяются замыкающей стороной силового многоугольника, а линия действия проходит через точку пересечения крайних сторон вервочного многоугольника.

Если силовой многоугольник замыкается (рис. 271, a), то сумма сил равна нулю, но, как известно, для равновесия этого еще недостаточно. Вербочный многоугольник в этом случае обладает, очевидно, тем свойством, что крайние стороны его Aa и cB параллельны (рис. 271, $б$). Если крайние стороны не совпадают, как это имеет место на рис. 271, $в$, то система приводится к паре сил $(31, -31)$.

Момент этой пары равен произведению модуля силы $3I$, измеренной на рис. 271, a в масштабе сил, на расстояние h между прямыми Aa и cB , измеренное на рис. 271, b в масштабе длин.

Если же крайние стороны Aa и cB сливаются, то веревочный многоугольник замыкается (рис. 271, $в$), плечо пары обращается в нуль и система находится в равновесии. Таким образом, необходимые и достаточные условия равновесия произвольной плоской системы сил (в геометрической или графической форме) состоят в том, что построенные для этой системы силовой и веревочный многоугольники должны быть замкнутыми.

4. Параллельные силы.

Задача определения равнодействующей двух параллельных и направленных в одну сторону (рис. 272) или антипараллельных сил

(рис. 273) сводится к построению соответствующего силового и веревочного многоугольников (стороны силового многоугольника в случае параллельных сил сливаются в один отрезок; на рисунках эти

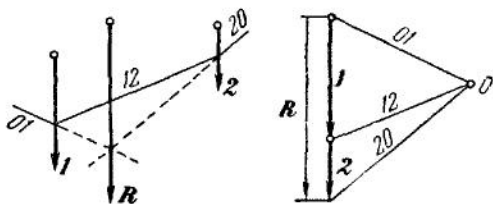


Рис. 272.

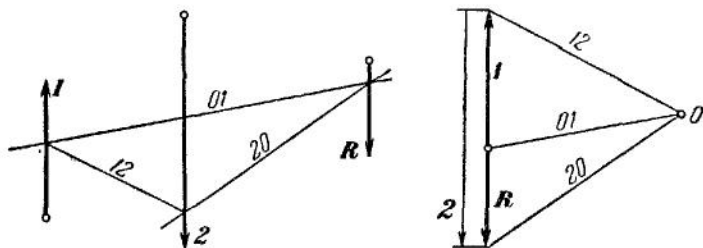


Рис. 273.

отрезки для наглядности смещены). Пересечение крайних сторон $O1$ и 20 веревочного многоугольника дает точку, через которую проходит равнодействующая.

Аналогично находится равнодействующая любого числа параллельных сил (если только $R \neq 0$).

Чтобы разложить данную силу F на две параллельные силы, проходящие через точки A и B (рис. 274), проводим через эти точки прямые, параллельные силе F . На силе F строим силовой треугольник. Через произвольную точку c на линии действия силы F проведем прямые, параллельные лучам $O1$ и 20 , которые пересекут прямые, проходящие через точки A и B , в точках a и b . Из полюса O проводим прямую, параллельную ab ; она разделит данную силу на

две силы I и 2 , которые и будут искомыми силами, проходящими через точки A и B .

Разложение данной силы F на две антипараллельные силы, проходящие через точки A и B , производится аналогично (рис. 275).

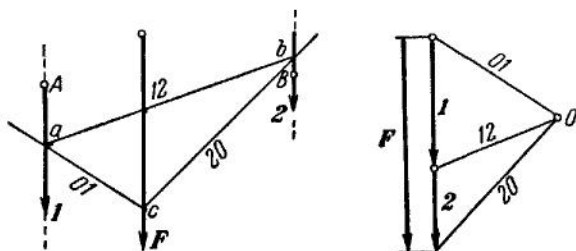


Рис. 274.

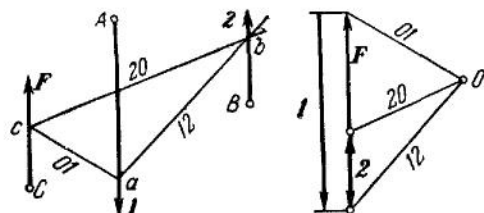


Рис. 275.

5. Определение реакций опор. Допустим, что какое-нибудь твердое тело (неизменяемая конструкция) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B — опору на катках (рис. 276, a).

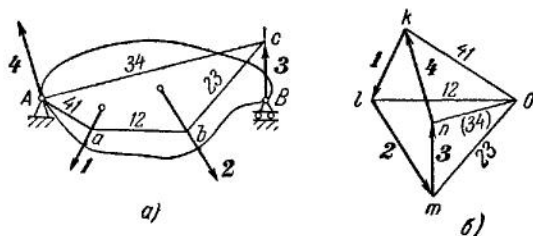


Рис. 276.

На тело действуют заданные силы, например I и 2 . Найдем графически реакции опор. Для этого изображаем на рис. 276, a , выполненном в соответствующем масштабе длин, заданные силы I , 2 и известную нам линию действия силы 3 — реакции опоры B ; о силе 4 — реакции шарнира A — мы знаем лишь, что она проходит через

точку A . Затем на рис. 276, б (в выбранном масштабе сил) строим из действующих на тело сил силовой многоугольник klm , начиная с заданных сил 1 и 2 . Построение обрывается изображением направления силы 3 , так как модуль этой реакции нам неизвестен. Неизвестны также модуль и направление реакции 4 , однако, так как имеет место равновесие, то конец этой силы совпадает с началом силы 1 . Далее выбираем произвольный полюс O (только не на сторонах силового многоугольника или их продолжениях) и соединяем его с известными нам вершинами k, l, m силового многоугольника лучами $41, 12, 23$; луч 34 мы провести не можем, так как не знаем величины силы 3 , т. е. вершины n многоугольника. Чтобы найти этот луч (а тем самым и искомые силы), строим на рис. 276, а веревочный многоугольник. Построение этого многоугольника следует обязательно начинать из точки A , где приложена неизвестная по направлению реакция 4 (в противном случае мы не сумеем замкнуть веревочный многоугольник, так как никакой другой точки на линии действия силы 4 не знаем). От точки A , где приложена сила 4 , пойдет луч 41 до пересечения с линией действия силы 1 в точке a . Из точки a проводим луч 12 до пересечения с линией действия силы 2 в точке b , а из точки b — луч 23 до пересечения с линией действия силы 3 в точке c . Замыкая теперь, согласно условиям равновесия, веревочный многоугольник линией cA , найдем направление искомого луча 34 . После этого проводим из полюса O на рис. 276, б луч 34 , параллельный линии cA . Точка n пересечения этого луча с направлением силы 3 определяет искомую вершину силового многоугольника. Таким образом, реакция 3 дается (в выбранном масштабе) вектором \overline{mn} , а реакция 4 — вектором \overline{nk} .

Пример графического определения реакций опор в случае параллельных сил показан на рис. 277. В этом случае построение веревочного многоугольника можно начинать из любой точки, так как

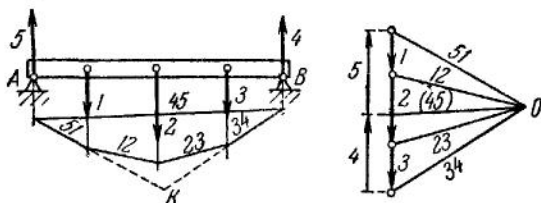


Рис. 277.

направления обеих реакций 4 и 5 наперед известны. Искомым лучом является 45 .

Рис. 277 одновременно показывает, как находится равнодействующая параллельных сил $1, 2, 3$; линия действия этой равнодействующей проходит через точку K , где пересекаются лучи 51 и 34 .

6. Определение наибольшего изгибающего момента. Пусть на балку, свободно лежащую на опорах, действуют вертикальные силы 1, 2, 3, 4 (рис. 278, а). Отбросив опоры и приложив реакции опор 5 и 6, мы получим уравновешенную систему параллельных сил 1, 2, 3, 4, 5, 6, приложенных к балке.

Возьмем какое-нибудь сечение C балки, мысленно разрежем балку в этом месте и отбросим левую часть. Тогда действие отброшенной левой части на правую выразится силами упругости, действующими в сечении C , которые, как и всякую плоскую систему сил, можно

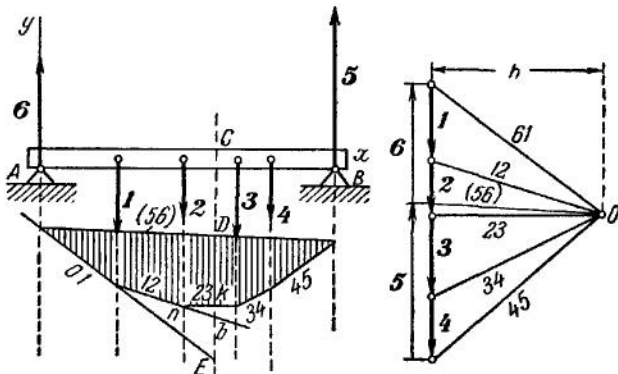


Рис. 278.

привести к одной результирующей силе P , называемой *поперечной силой*, и к паре с моментом M , который называют *изгибающим моментом*. Очевидно, что

$$P = \sum F_{i\lambda}, \quad M = \sum \text{мом}_C F_{i\lambda},$$

где $F_{i\lambda}$ — все силы (включая реакции), действующие на левую, отброшенную часть балки (в нашем случае это силы 6, 1, 2).

Определив построением силового и веревочного многоугольников реакции 5 и 6 (рис. 278), мы можем найти поперечную силу и изгибающий момент в любом сечении балки, что необходимо для ее расчета.

Графически изгибающий момент в сечении C (рис. 278, а) найдется следующим путем. Как было показано в п. 2, моменты сил 6, 1, 2 с учетом их знаков будут:

$$\text{мом}_C 6 = -DE \cdot h, \quad \text{мом}_C 1 = bE \cdot h, \quad \text{мом}_C 2 = kb \cdot h.$$

Следовательно, изгибающий момент M в сечении C будет:

$$M = -h(DE - be - bk) = -Dk \cdot h.$$

Таким образом, изгибающий момент в любом сечении балки будет

пропорционален направленным параллельно силам отрезкам, которые образуют заштрихованную на рис. 278, а область, ограниченную веревочным многоугольником. Наибольший изгибающий момент будет для рассматриваемой балки в том сечении, где приложена сила 2 (опасное сечение).

7. Графическое определение центра тяжести. Найдем графически центр тяжести пластинки, изображенной на рис. 279.

Разобьем данную фигуру на такие части, центры тяжести которых легко определить; в данном случае на три прямоугольника.

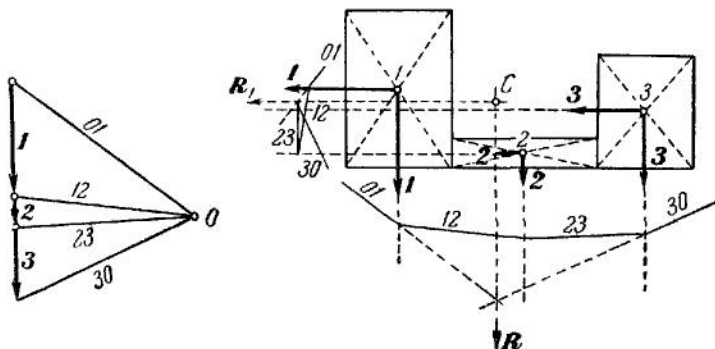


Рис. 279.

Приложим к центрам тяжести параллельные силы, пропорциональные площадям, и построим сначала силовой, а затем веревочный многоугольники. Таким образом найдем равнодействующую R этих параллельных сил. Теперь изменим направление сил, повернув их на прямой угол, и построим новый веревочный многоугольник, стороны которого будут, очевидно, перпендикулярны к сторонам первого веревочного многоугольника; получим другую равнодействующую R_1 . Точка C пересечения линий действий этих равнодействующих и даст центр тяжести фигуры. Если фигура имеет ось симметрии, то достаточно построить только один веревочный многоугольник; центр тяжести будет находиться на пересечении равнодействующей с осью симметрии.

§ 26. Графический расчет ферм

1. Фермы. Графические методы удобно применять при расчете ферм. Фермой называется конструкция, составленная из стержней, концы которых соединены между собой шарнирами так, что стержни не могут иметь относительных перемещений, т. е. вся конструкция представляет собой неизменяемую систему; места соединения стержней называются *узлами* фермы. Фермы часто употребляются в различных сооружениях, например при постройке мостов, стропил,

грузоподъемных машин и пр., и при некоторых условиях допускают простой, элементарный, расчет, не говоря уже о значительной экономии материала. Расчет фермы становится весьма простым, если под действием внешних сил стержни фермы подвергаются только продольным усилиям, т. е. растяжению и сжатию. Для этого должны иметь место следующие условия:

1. Стержни фермы должны быть прямолинейны и соединены своими концами шарнирами без трения.

2. Силы должны быть приложены в узлах фермы.

Конечно, на практике эти условия, как идеальные, осуществляются не вполне, а с возможным приближением.

2. Условие жесткости. Если оси стержней фермы лежат в одной плоскости, то ферма называется плоской, в противном случае — пространственной; здесь мы будем рассматривать только плоские фермы.

Найдем наименьшее число стержней, необходимое для построения фермы, образованной из треугольников и имеющей n узлов (рис. 280, а).

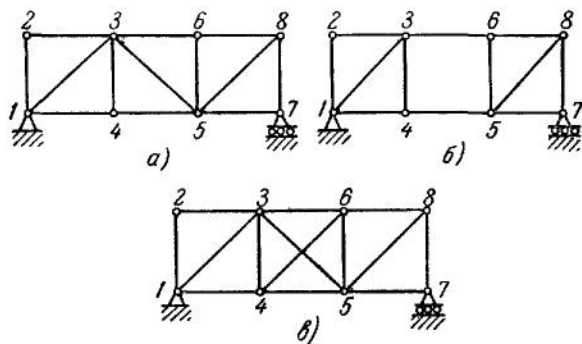


Рис. 280.

Чтобы связать первые три узла, необходимо три стержня; для жесткого присоединения каждого из остальных $(n - 3)$ узлов нужно по два стержня. Следовательно, для того чтобы ферма обладала жесткостью (т. е. чтобы стержни не могли иметь относительных перемещений), необходимо, чтобы число стержней было:

$$N = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3. \quad (1)$$

Если число стержней $N < 2n - 3$, то конструкция не будет обладать жесткостью, т. е. уже не будет фермой (рис. 280, б); если же $N > 2n - 3$, то ферма будет иметь «лишние» стержни (рис. 280, в).

Равенство (1) будем называть *условием жесткости*.

3. Статическая определимость. Если ферма обладает жесткостью, то ее можно рассматривать как абсолютно твердое тело, находящееся под действием активных сил и реакций связей; будем

предполагать, что эти силы приложены в узлах фермы и, если ферма плоская, действуют в плоскости фермы. При равновесии такая система сил должна удовлетворять трем уравнениям равновесия. На каждый узел фермы будет действовать плоская система сходящихся сил, состоящая из внешних сил, действующих на ферму, и внутренних — усилий в самих стержнях, которые будут, согласно сделанным допущениям, иметь направления стержней; поэтому система сил, действующих на каждый узел, должна удовлетворять двум уравнениям равновесия. Таким образом, все действующие на ферму внешние силы (активные и реакции) и усилия в стержнях фермы должны удовлетворять $2n$ уравнениям, где n — число узлов. В число этих $2n$ уравнений будут входить три уравнения, выражающие условия равновесия внешних сил, поэтому для определения усилий в стержнях фермы остается $2n - 3$ уравнений. Если число стержней фермы $N = 2n - 3$, то эти усилия могут быть определены из уравнений статики и, следовательно, ферма будет *статически определимой*; если же $N > 2n - 3$, то усилия в стержнях посредством *одних только* уравнений статики абсолютно твердого тела определить нельзя и ферма будет *статически неопределимой*. Следовательно, условие жесткости (1) является для плоской фермы и условием статической определимости.

4. Графический расчет. Так как система внешних сил (активных и реакций связей), действующих на ферму, представляет собой плоскую систему сил, находящуюся в равновесии, то построением силового и веревочного многоугольников можно графически определить реакции внешних связей (реакции опор), если, конечно, система статически определима (см. § 25, п. 5).

Для графического определения усилий в стержнях фермы удобно пользоваться методом «вырезания узлов», который состоит в том, что каждый узел вырезывается из фермы и рассматривается отдельно, как находящийся в равновесии под действием приложенных к нему внешних сил и реакций разрезанных стержней, которые направлены по стержням в сторону узла, если усилие сжимающее, и в противоположную, — если усилие растягивающее. Система сил, действующих на узел, есть плоская система сходящихся сил, находящаяся в равновесии; поэтому силовой многоугольник, построенный из этих сил, должен быть замкнутым. Построение многоугольников следует начинать с узла, в котором сходятся два стержня. Так как действующие на узел внешние силы (активные и реакции опор) известны, то построением замкнутого многоугольника (треугольника) найдутся усилия в этих двух стержнях. После этого можно переходить к следующему узлу и т. д.; при этом каждый следующий узел выбирается так, чтобы в нем сходились не более двух стержней, для которых усилия еще не найдены. Построив силовые многоугольники для всех узлов фермы, графически определим усилия в стержнях.

Направления сил, приложенных к узлу, и построенный для этого узла силовой многоугольник обладают свойством взаимности, т. е.: 1) направления соответствующих прямых параллельны и 2) прямым, сходящимся на одной фигуре в одной точке, соответствуют параллельные прямые, образующие замкнутый многоугольник на другой, и наоборот (таким же свойством взаимности обладают план сил и веревочный многоугольник, см. § 25, п. 2).

Б. Диаграмма Максвелла — Кремоны. Поскольку любой из стержней фермы соединяет два узла, то усилия в каждом стержне будут входить в два силовых многоугольника. Эти многоугольники при определенном порядке их построения (и одинаковом масштабе) могут быть последовательно сложены друг с другом равными сторонами, так что составят одну фигуру, взаимную по отношению к фигуре, представляющей собой чертеж фермы вместе с приложенными к ней внешними силами; такая фигура, дающая полную картину усилий в стержнях фермы, называется *диаграммой Максвелла — Кремоны*. Методы ее построения даны на основании теории взаимных фигур английским физиком К. Максвеллом и, независимо от него, итальянским геометром Л. Кремоной.

Чтобы построить диаграмму Максвелла — Кремоны для данной фермы, на которую действуют заданные активные силы, прежде всего методом графической статики (или аналитически) определим реакции внешних связей (реакции опор) и на плане сил строим многоугольник внешних сил, который, конечно, должен быть замкнутым; при этом векторы внешних сил на рисунке фермы располагаем вне контура фермы. Затем строим многоугольники сил для узлов фермы, начиная с того узла, где сходятся только два стержня (для *простых* ферм, которые могут быть составлены из треугольников, такой узел всегда имеется), и обходя узлы фермы в такой последовательности, в которой они следуют по периферии фермы; в таком же порядке должны располагаться внешние силы при построении соответствующего силового многоугольника. Точно так же в силовых многоугольниках, построенных для узлов, последовательность сил должна соответствовать той, в которой силы расположены вокруг рассматриваемого узла, причем направление последовательности должно быть такое же, как при обходе узлов.

Пример 1. Рассмотрим простейшую ферму, состоящую из трех стержней (рис. 281, а); в узлах этой фермы приложены заданные внешние силы I , II , III , находящиеся в равновесии. При построении диаграммы будем пользоваться системой обозначений, предложенной Боу (Bow), а именно: части плоскости вне фермы, ограниченные линиями действия приложенных к узлам фермы сил, обозначим буквами A , B , C ; часть плоскости внутри фермы, т. е. в данном случае плоскость треугольника, обозначим буквой D . Тогда, векторы сил на диаграмме (рис. 281, б) будут обозначаться двумя малыми буквами, соответствующими обозначению тех областей, для которых линия действия силы или стержень является границей. Например, сила I

получит обозначение ab , сила $II—bc$, сила $III—ca$, усилие в стержне $12—bd$, $23—cd$ и в стержне $31—ad$. Строим сначала многоугольник внешних сил abc , откладывая в нем силы в том порядке, в котором мы их встречаем при обходе контура фермы против хода часовой стрелки. К этому многоугольнику последовательно пристраиваем силовые многоугольники (в данном случае треугольники) для узлов $1, 2, 3$, начиная построение для каждого узла с известных сил и откладывая все силы также в том порядке, в котором они встречаются при обходе узла против хода часовой стрелки. Например, на узел 1 действуют заданная сила I и реакции стержней 13 и 12 . Сила I , т. е. ab , на рис. 281, b показана; проводя через точку b прямую, параллельную стержню 12 (так как при обходе узла 1 против хода часовой стрелки за силой I следует стержень 12), а через точку a — прямую, параллельную стержню 13 , получаем силовой треугольник abd для узла 1 , где bd — реакция стержня 12 , а da — стержня 13 .

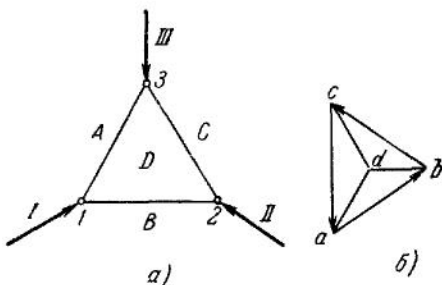


Рис. 281.

Указанное правило построения позволяет определить по диаграмме не только величину усилия, но и установить, будет данный стержень растянут или сжат. Если реакция стержня направлена к узлу, то узел действует на стержень в противоположную сторону и, следовательно, стержень сжат; если же реакция направлена от узла, то стержень растянут.

Например, чтобы найти усилие в стержне 12 надо рассмотреть силовой треугольник узла 1 или 2 . Для узла 1 (обходя его на рис. 281, a против хода часовой стрелки) находим, что силовым треугольником будет $abda$. Тогда

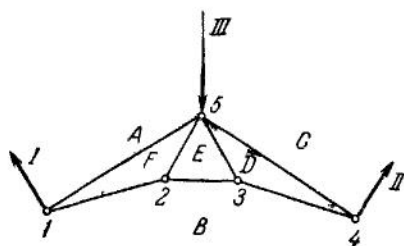


Рис. 282.

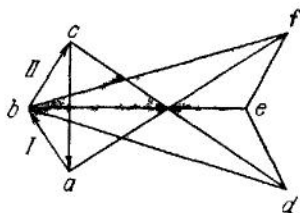


Рис. 283.

реакция стержня на узел будет bd (см. диаграмму); она направлена к узлу, и, следовательно, стержень сжат. Если же рассмотреть узел 2 , обходя его также против хода часовой стрелки, то для него силовой треугольник будет $cbcd$, реакция стержня на узел будет db , т. е. опять направлена к узлу (к узлу 2).

Пример 2. Построим диаграмму усилий (Максвелла — Кремоны) для плоской фермы, изображенной на рис. 282 и нагруженной в узлах $1, 4, 5$ соответственно силами I, II, III . Число узлов в этой ферме равно 5, число стержней — 7; так как $2 \cdot 5 - 3 = 7$, то условия жесткости и статической

определимости (1) удовлетворены. Следуя системе Боу, обозначаем внешние области между силами III и I через A , между силами I и II — через B и между силами II и III — через C и строим многоугольник внешних сил abc (рис. 283). Затем строим силовые многоугольники для узлов 1, 2, 3, 4, 5, обходя их в направлении против хода часовой стрелки; для первых четырех узлов силовые многоугольники будут треугольниками, а для последнего, пятого, узла силовым многоугольником будет пятиугольник $dcafed$. Определяя направление сил в силовых многоугольниках, построенных для каждого узла, можно, таким же образом как и в предыдущем примере, найти, будет ли рассматриваемый стержень сжат или растянут. Например, стержень 25, усилие в котором равно (fe) , будет растянут, так как, рассматривая на диаграмме (рис. 283) силовой многоугольник для узла 5, т. е. многоугольник $dcafed$, найдем, что сила fe имеет направление от f к e , т. е. от узла 5. Стержень 15, усилие в котором равно (af) , будет сжат, так как в том же многоугольнике для узла 5 сила af направлена от a к f , т. е. к узлу 5, и т. д.

6. Метод Риттера. Диаграмма Максвелла — Кремоны дает усилия во всех стержнях фермы путем последовательного построения связанных между собой силовых многоугольников; методом Риттера можно определить усилие для любого стержня фермы непосредственно, независимо от остальных. Этот метод состоит в том, что ферма рассекается на две части таким образом, чтобы в сечении было не более трех стержней с неизвестными усилиями; отбрасывая отсеченную часть фермы и рассматривая оставшуюся часть фермы в равновесии под действием приложенных к ней внешних сил и усилий, заменяющих действие рассеченных стержней, получим для этой части фермы три уравнения равновесия, в которые войдут три неизвестных усилия. Эти уравнения удобно брать в виде равенства нулю суммы моментов всех сил, действующих на оставшуюся часть фермы, относительно трех различных центров (см. § 24, п. 2), принимая за центры моментов те точки, в которых попарно пересекаются рассеченные стержни (или их продолжения); тогда уравнение моментов для каждого центра будет содержать только одно неизвестное, а именно усилие в том стержне, направление которого через этот центр не проходит.

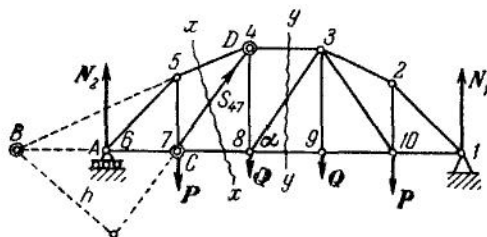


Рис. 284.

Пример. Рассмотрим ферму, изображенную на рис. 284, вместе с действующими на нее внешними активными силами и реакциями опор и определим усилие S_{47} в стержне 47. Проведем сечение xx , пересекающее

стержни 45, 47, 78, и будем рассматривать равновесие левой части фермы под действием сил: реакции $N_2 = P + Q$ в узле A , силы P в узле C и усилий в расчлененных стержнях 45, 47 и 78. При этом все усилия S_{45} , S_{47} , S_{78} направляем от соответствующих узлов (т. е. так, как они были бы направлены, если все стержни были бы растянуты). Для определения усилия S_{47} возьмем сумму моментов всех сил, действующих на левую отсеченную часть фермы, относительно центра B , где пересекаются направления стержней 45 и 78; получим:

$$(P + Q) \cdot (AB) - P \cdot BC + S_{47} \cdot h = 0,$$

откуда

$$S_{47} = \frac{P \cdot BC - (P + Q) (AB)}{h}.$$

Если величина S_{47} получится положительной, то стержень 47 растянут, а если отрицательной, то — сжат.

Усилия S_{45} и S_{78} найдутся аналогичным образом, если составить уравнения моментов относительно центра C (узла 7) и центра D (узла 4).

При расчете линейные размеры берутся из рисунка, а моменты могут определяться или вычислением, или методами графостатики. Центры моментов B , C , D называют иногда точками Риттера. Если два из трех стержней сечения (например, сечения yy) параллельны, то одна из точек Риттера удаляется в бесконечность; тогда для определения усилия в непараллельном стержне вместо уравнения моментов можно взять сумму проекций всех сил на направление, перпендикулярное параллельным стержням. Например, для усилия S_{38} в стержне 38 на рис. 284 получим, так как $N_2 = P + Q$:

$$(P + Q) - P - Q + S_{38} \sin \alpha = 0,$$

откуда усилие $S_{38} = 0$.

ГЛАВА ПЯТАЯ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

§ 27. Работа силы

1. Предварительные замечания. В элементарной статике были выведены необходимые и достаточные условия равновесия абсолютно твердого тела. Для всякой иной системы материальных точек эти условия, согласно принципу отвердевания, будут только необходимы, но недостаточны. Определение достаточных условий равновесия механической системы методами элементарной статики требует, как мы видели на частных примерах, рассмотрения условий равновесия каждого из твердых тел (или точек), входящих в систему. Расчет при этом существенно усложняется необходимостью вводить большое число новых неизвестных — реакций внутренних связей.

Аналитической статикой называют часть статики, в основе которой лежит принцип виртуальных (возможных) перемещений, выражающий собой необходимое и достаточное условие равновесия для любой механической системы. При этом условия равновесия определяются методами, принципиально отличными от методов геометрической статики. Основываются эти методы на понятиях о виртуальном (возможном) перемещении системы и о работе силы.

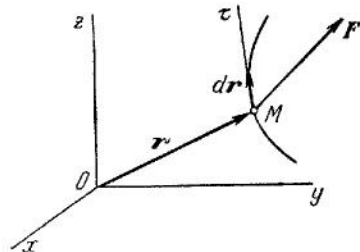


Рис. 285.

2. Элементарная работа силы. Пусть материальная точка M , находящаяся под действием силы F , совершает элементарное перемещение dr (рис. 285). Тогда элементарной работой

силы F на этом перемещении называется скалярное произведение силы на перемещение, т. е. величина

$$d'A = F \cdot dr = F ds \cos(\widehat{F, dr}) \quad (1)$$

или

$$d'A = F_{\tau} ds, \quad (1')$$

где F_τ — проекция силы F на касательную, направленную в сторону перемещения точки.

Обозначая, как обычно, проекции силы F на оси координат через F_x , F_y , F_z , а проекции dr через dx , dy , dz , где x , y , z — координаты точки M , можно представить элементарную работу в виде ¹⁾

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (2)$$

Единицей измерения работы в системе СИ служит *джоуль* (1 дж = 1 нм), а в технической системе единиц — *килограммометр* (кГм).

В случае, когда точка, совершающая перемещение dr , находится под действием системы сил F_1, F_2, \dots, F_n , элементарная работа

$$d'A = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dr = R \cdot dr,$$

где $R = \sum_{i=1}^n F_i$, есть равнодействующая данной системы сил; таким образом, элементарная работа равнодействующей равняется сумме элементарных работ сил составляющих на том же перемещении.

Если же разложить перемещение dr на составляющие перемещения dr_i , то тогда $dr = \sum_{i=1}^n dr_i$ и

$$d'A = F \cdot dr = \sum_{i=1}^n F \cdot dr_i,$$

т. е. элементарная работа силы на данном перемещении равна сумме элементарных работ той же силы на составляющих перемещениях.

3. Понятие о потенциальном силовом поле. Работа потенциальной силы. Остановимся на вычислении элементарной работы потенциальных сил, т. е. сил, образующих потенциальное силовое поле. Полем сил вообще называется область пространства, в каждой точке которого на помещенную туда материальную частицу действует определенная сила, являющаяся однозначной, конечной и дифференцируемой функцией координат этой точки. Поле сил называется *стационарным*, если сила не зависит явно от времени; в противном случае поле называют *нестационарным*. В стационарном поле сила F является функцией только координат точки поля, т. е.

$$F_x, F_y, F_z | x, y, z.$$

¹⁾ Символ d' употребляется с целью отличить его от знака дифференциала d , так как в рассматриваемых выражениях правая часть, как будет показано дальше, вообще не является полным дифференциалом какой-нибудь функции координат.

Следовательно, элементарная работа сил такого поля будет:

$$d'A = F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz. \quad (3)$$

Если дифференциальный трехчлен, стоящий в правой части равенства (3), является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$, то эта функция носит название *потенциальной* или *силовой функции*, а поле сил, для которого такая функция существует, называется *потенциальным силовым полем*.

Таким образом, если

$$F_x(x, y, z) dx + F_y(x, y, z) dy + F_z(x, y, z) dz = dU(x, y, z) \quad (4)$$

или, что то же, если

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (5)$$

то силовое поле является потенциальным, а $U(x, y, z)$ есть силовая функция этого поля.

В том, что равенства (5) вытекают из (4) и наоборот, легко убедиться, если представить (4) в виде

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

и учесть, что координаты x, y, z между собой не зависимы.

Чтобы установить, при каких условиях данное силовое поле будет потенциальным, возьмем от равенств (5) соответствующие частные производные по координатам x, y, z . Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \quad \text{и т. д.,}$$

получим:

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}. \quad (6)$$

Таким образом, условия (6) необходимы для того, чтобы поле силы $F(F_x, F_y, F_z)$ было потенциальным; можно показать, что эти условия являются и достаточными.

Вектор F , проекции которого определяются равенствами (5), называют градиентом скалярной функции $U(x, y, z)$:

$$F = \text{grad } U, \quad (7)$$

где

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (8)$$

Следовательно, сила в потенциальном силовом поле является градиентом силовой функции. Такую силу называют еще *потенциальной силой*.

Из изложенного следует, что для вычисления элементарной работы потенциальной силы надо знать только потенциальную функцию $U(x, y, z)$. Тогда

$$d'A = dU(x, y, z). \quad (9)$$

Одно из основных свойств потенциального силового поля выявляется при вычислении работы силы на конечном перемещении. Если точка, на которую действует сила F , совершает перемещение ACB (рис. 286), то полная работа силы на этом перемещении вычисляется как сумма соответствующих элементарных работ в виде следующего криволинейного интеграла:

$$A_{\widehat{ACB}} = \int_{\widehat{ACB}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (10)$$

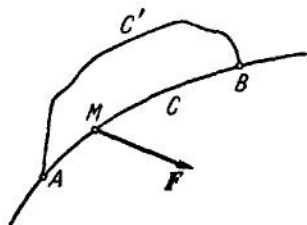


Рис. 286.

В общем случае величина этого интеграла зависит от вида траектории ACB и при перемещении по другой кривой $AC'B$ будет другой. В случае же, когда сила F является потенциальной, будем иметь:

$$A_{\widehat{ACB}} = \int_{\widehat{ACB}} dU = \int_A^B dU = U_B - U_A. \quad (11)$$

Таким образом, работа потенциальной силы на любом конечном перемещении зависит не от вида кривой, по которой перемещается точка, а только от начального и конечного положения этой точки (при условии, что силовая функция U однозначна).

Подробнее вопрос о вычислении работы и о свойствах потенциального силового поля будет рассмотрен в § 33.

В качестве примера потенциального силового поля рассмотрим однородное поле тяжести. Если вблизи поверхности Земли выделить область, размеры которой малы по сравнению с радиусом Земли, то во всех точках этой области можно считать силу тяжести $P = mg$ постоянной. Если сила $P = \text{const}$, то поле такой силы называют однородным. Легко видеть, что для однородного поля условия (6) выполняются, следовательно, оно является потенциальным. Направим ось z вертикально вверх; тогда проекции силы тяжести, действующей на точку с массой m , будут (рис. 287):

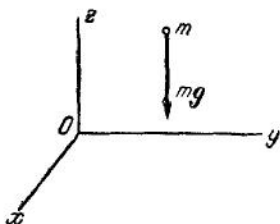


Рис. 287.

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg,$$

следовательно,

$$dU = -mg dz,$$

откуда, интегрируя, получим силовую функцию для однородного поля тяжести:

$$U = -mgz + \text{const.} \quad (12)$$

4. Элементарная работа потенциальных сил, действующих на систему. Рассмотрим теперь более общий случай. Пусть имеем систему материальных точек m_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), причем на каждую точку системы действует сила, зависящая только от положения данной точки, т. е. пусть на точку m_i (x_i, y_i, z_i) действует сила F_i , проекции которой равны F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} , причем

$$F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} \mid x_i, y_i, z_i.$$

Предположим, что рассматриваемая нами система за элементарный промежуток времени dt как-нибудь переместилась; тогда все точки совершат бесконечно малые перемещения. Элементарная работа всех сил при этом перемещении будет:

$$d'A = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dr_i = \sum_{i=1}^n (F_{xi} dx_i + F_{yi} dy_i + F_{zi} dz_i).$$

Если существует функция $U(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$, удовлетворяющая условию

$$dU = \sum_{i=1}^n F_i \cdot dr_i = \sum_{i=1}^n (F_{xi} dx_i + F_{yi} dy_i + F_{zi} dz_i), \quad (13)$$

то эта функция носит название потенциальной или силовой функции сил, действующих на систему. Когда функция U существует, то, очевидно,

$$F_{xi} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad F_{yi} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad F_{zi} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Определение элементарной работы такой системы сил, как видно из (13), сводится также к вычислению дифференциала соответствующей силовой функции.

§ 28. Виртуальные перемещения точки

1. Истинные и виртуальные перемещения. В кинематике мы рассматривали перемещения движущейся точки за некоторый промежуток времени с целью определения скорости точки или ее положения в какой-то последующий момент времени и т. д. Такие перемещения, совершаемые движущейся точкой за определенный промежуток времени и зависящие от закона ее движения, будем называть *истинными*. Таким образом, если точка движется по закону

$$r = r(t)$$

или, в проекциях на оси,

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

то ее истинное перемещение за бесконечно малый промежуток времени dt будет $d\mathbf{r}(dx, dy, dz)$, где

$$dx = \dot{x} dt, \quad dy = \dot{y} dt, \quad dz = \dot{z} dt.$$

Как мы видим, координаты точки при истинном перемещении изменяются вследствие того, что аргумент t (время) изменяется на величину dt ; математически эти изменения выражаются дифференциалами координат. Если точка неподвижна (по отношению к рассматриваемой системе отсчета), то ее истинное перемещение равно нулю.

Однако понятию о перемещении точки можно придать несколько другой смысл и использовать его в иных целях. Рассмотрим точку (или механическую систему), на которую наложены некоторые, ограничивающие ее перемещения связи. Тогда о суммарном эффекте этих связей можно в любой момент времени судить по совокупности всех тех элементарных перемещений, возможность совершать которые (без нарушения наложенных связей) у точки сохраняется. Эти перемещения, в отличие от истинного, не совершаются фактически за какой-то промежуток времени, а представляют собой множество всех мыслимых перемещений, которые *могли бы быть* сообщены точке в данный момент времени; зависят они только от положения точки в этот момент и наложенных на нее связей. Любое элементарное перемещение, которое может быть сообщено точке из занимаемого ею в данный момент времени положения при сохранении наложенных на нее в этот момент связей, будем называть *виртуальным* (или возможным) перемещением¹⁾. В отличие от истинного, виртуальное перемещение точки будем обозначать через $\delta\mathbf{r}$ (рис. 288), а его проекции на оси координат — через δx , δy , δz . Виртуальным перемещением системы будем называть совокупность виртуальных перемещений всех ее точек.

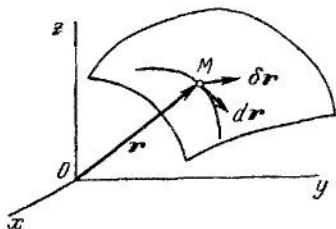


Рис. 288.

¹⁾ Некоторые авторы (например, Г. К. Сулов, Теоретическая механика, 1944, гл. XXVIII) вводят еще понятие о множестве перемещений, которые точка при наложенных на нее связях могла бы совершить из данного положения за какой-то промежуток времени Δt , и называют такие перемещения «возможными», сохраняя за перемещениями, которые точке при наложенных связях можно сообщить в данный момент времени, наименование «виртуальные». Суть различия между этими понятиями обнаруживается при нестационарных (изменяющихся со временем) связях и будет аналогична различию между векторами $\delta\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$, показанными ниже на рис. 291. Однако при изложении аналитической механики наряду с истинными существенную роль играют только виртуальные перемещения; поэтому здесь иных понятий можно не вводить, а термин «возможные», как это делают многие авторы, считать русским переводом термина «виртуальные».

Бесконечно малое изменение функции, происходящее вследствие изменения аргумента, выражается дифференциалом этой функции; если же изменение функции происходит вследствие изменения вида самой функции, то такое изменение называется *вариацией* функции

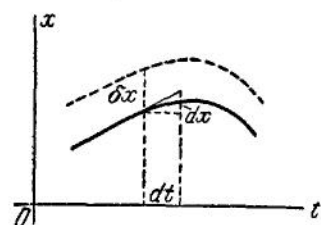


Рис. 289.

и обозначается символом δ . Пусть, например, $x = f(t)$ (рис. 289). Тогда, как известно, при изменении аргумента на dt функция изменяется (с точностью до малых высшего порядка) на

$$dx = f'(t) dt.$$

Если же мы изменим вид самой функции, т. е. возьмем функцию

$$\tilde{x} = x + \varepsilon \eta(t),$$

где ε есть бесконечно малое, а $\eta(t)$ — произвольная дифференцируемая функция, то изменение функции

$$\tilde{x} - x = \varepsilon \eta(t) = \delta x$$

будет вариацией этой функции. Проекции виртуального перемещения точки δx , δy , δz будут, следовательно, представлять собой вариации координат этой точки.

Истинное перемещение точки может принадлежать к числу виртуальных, но не всегда, как это будет показано ниже.

2. Условия, налагаемые геометрическими связями на вариации координат. Связи, налагающие ограничения только на положения точек системы, называются геометрическими, а налагающие ограничения еще и на скорости этих точек — кинематическими. В статике мы будем рассматривать только геометрические связи. Эти связи могут быть в свою очередь (см. § 14, п. 5) склерономными (стационарными) или реономными (нестационарными), а также неосвобождающими или освобождающими. Для точки с координатами x , y , z уравнения соответствующих неосвобождающих геометрических связей имеют вид

$$f(x, y, z) = 0 \quad (\text{склерономная связь}), \quad (1)$$

$$f(x, y, z, t) = 0 \quad (\text{реономная связь}). \quad (2)$$

Освобождающей будет связь, которую точка может покидать, но только в какую-нибудь одну определенную сторону. Например, при связи $f(x, y, z) \geq 0$, которую в дальнейшем условимся записывать в виде

$$f(x, y, z) = c, \quad (3)$$

где $c \geq 0$, точка должна находиться на поверхности $f(x, y, z) = 0$ и может сходить с нее в ту сторону, для которой $f(x, y, z) > 0$.

Координаты x , y , z несвободной точки должны в каждый момент времени удовлетворять уравнению связи. Поэтому если на точку наложена одна геометрическая связь, то независимых координат будет две и, следовательно, число степеней свободы точки будет также равно двум. При двух геометрических связях точка будет иметь одну степень свободы, а при трех геометрических связях точка будет относительно данной системы отсчета неподвижна.

Найдем, каким условиям удовлетворяют вариации координат несвободной точки. Пусть на точку наложена склерономная и неосвобождающая связь

$$f(x, y, z) = 0.$$

Обозначим координаты точки M через x , y , z . Если дадим точке M виртуальное перемещение $\overline{MM_1} = \delta \mathbf{r}$ (рис. 290), то координаты точки M_1 будут $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Так как связь неосвобождающая, то новые координаты точки должны удовлетворять уравнению связи, т. е.

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0.$$

Разлагая это выражение в ряд Тейлора, будем иметь:

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \text{чл. в. п.} = 0;$$

но $f(x, y, z) = 0$, следовательно, пренебрегая членами, содержащими бесконечно малые высших порядков, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (4)$$

Итак, при наличии связи $f(x, y, z) = 0$ вариации координат точки должны удовлетворять соотношению (4) и независимых вариаций будет только две.

Пусть теперь связь будет реономная и неосвобождающая, т. е.

$$f(x, y, z, t) = 0.$$

Обозначив координаты точки M через x , y , z , дадим точке виртуальное перемещение $\overline{MM_1} = \delta \mathbf{r} (\delta x, \delta y, \delta z)$; тогда координаты точки M_1 будут $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Так как координаты точки M_1 должны удовлетворять уравнению связи, то, подставляя их в это уравнение и развертывая его в ряд Тейлора, будем иметь:

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t) = \\ = f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \text{чл. в. п.} = 0. \end{aligned}$$

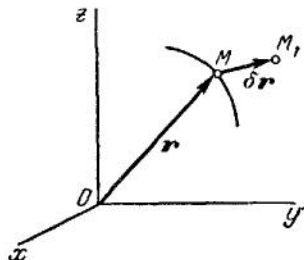


Рис. 290.

Но $f(x, y, z, t) = 0$. Поэтому, отбрасывая члены высшего порядка малости, найдем, что вариации координат должны удовлетворять совпадающему с (4) соотношению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (4')$$

Отсюда видно, что на вариации координат реономность связей никакого влияния не оказывает, потому что время при этом не варьируется.

Рассмотрим теперь истинное перемещение точки при связи $f(x, y, z) = 0$. Пусть в момент t координаты точки M будут (x, y, z) . Через промежуток времени dt точка придет в положение M'_1 с координатами $x + dx, y + dy, z + dz$, совершив истинное перемещение $\overline{MM}'_1 = dr$. Так как координаты точки M'_1 должны удовлетворять уравнению связи, то

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy, z + dz) &= \\ &= f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \text{чл. в. п.} = 0, \end{aligned}$$

или, принимая во внимание, что $f(x, y, z) = 0$, и отбрасывая малые высшего порядка, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0. \quad (5)$$

Следовательно, в случае связей склерономных проекций истинного перемещения удовлетворяют тому же соотношению, что и виртуального, или, что то же, истинные перемещения принадлежат к числу виртуальных. Если связь реономна, т. е. выражается уравнением $f(x, y, z, t) = 0$, то для точки M'_1 будем иметь:

$$\begin{aligned} f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) &= \\ &= f(x, y, z, t) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \text{чл. в. п.} = 0, \end{aligned}$$

или, пренебрегая членами с бесконечно малыми высших порядков и учитывая, что $f(x, y, z, t) = 0$, получим:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (6)$$

В этом случае проекции истинного перемещения dx, dy, dz удовлетворяют уже другому соотношению, не совпадающему с соотношением (4') для вариаций $\delta x, \delta y, \delta z$. Это означает, что истинные перемещения в случае реономной связи не принадлежат к числу виртуальных.

Этот результат ясен и из чисто геометрических соображений. Пусть точка вынуждена двигаться по поверхности, изменяющейся со временем, и пусть в момент времени t эта поверхность занимает положение I , а движущаяся точка находится в положении M (рис. 291). Тогда для момента времени t любое виртуальное перемещение $\delta r = \overline{MM_1}$ будет лежать в касательной к поверхности I плоскости, проведенной через точку M . Истинное же перемещение dr совершается за промежуток времени dt , в течение которого поверхность придет в какое-то новое положение II ; следовательно, вектор $dr = \overline{MM_1}$ не будет лежать в упомянутой касательной плоскости и не может совпасть ни с одним из векторов δr .

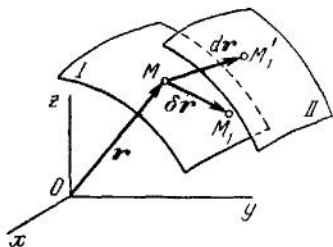


Рис. 291.

Рассмотрим теперь, какие условия налагает на вариации координат точки склерономная освобождающая связь вида

$$f(x, y, z) = c,$$

где $c \geq 0$. Дадим точке виртуальное перемещение $\delta r(\delta x, \delta y, \delta z)$. Тогда для нового положения точки будем иметь:

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = c + \delta c,$$

причем $\delta c = 0$, если точка не покидает связи, и $\delta c \neq 0$ и имеет определенный знак, если точка покидает связь. Развертывая это выражение в ряд Тейлора, получим с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = c + \delta c,$$

или, поскольку $f(x, y, z) = c$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = \delta c. \quad (7)$$

Равенство (7) и выражает условие, налагаемое освобождающей связью на вариации координат. Когда точка не покидает связи, $\delta c = 0$ и это условие совпадает с условием (4). Если же точка покидает связь, то δc имеет определенный знак.

Аналогичный вывод получим и в случае реономных связей. Найденные результаты можно еще представить в другом виде. Принимая во внимание, что

$$\text{grad } f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}.$$

получим для соотношений (4) или (7), которым должны удовлетворять вариации координат δx , δy , δz , при наличии связей $f(x, y, z) = 0$ или $f(x, y, z) = c$, выражения:

$$\text{grad } f \cdot \delta r = 0, \quad (8)$$

если связь неосвобождающая, и

$$\text{grad } f \cdot \delta r = \delta c, \quad (9)$$

если связь освобождающая, причем δc имеет определенный знак.

§ 29. Статика материальной точки

1. Принцип виртуальных перемещений для точки. Если мы имеем свободную материальную точку, то для ее равновесия необходимо и достаточно, чтобы сумма всех действующих на нее сил равнялась нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n F_i = 0. \quad (1)$$

Дадим точке виртуальное перемещение δr (δx , δy , δz). Умножая скалярно обе части равенства (1) на δr , получим:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r = 0, \quad (2)$$

или, в проекциях,

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x + F_{iy} \delta y + F_{iz} \delta z) = 0. \quad (2')$$

Условие (2) необходимо для равновесия точки как следствие (1); оно также и достаточно, так как при выполнении условия (2) ввиду произвольности δr должно быть $\sum F_i = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда точка несвободна и на нее наложена связь в виде некоторой неподвижной гладкой (идеальной) поверхности. Тогда для равновесия точки необходимо и достаточно, чтобы было

$$\sum_{i=1}^n F_i + N = 0, \quad (3)$$

где F_i — активные силы, а N — реакция связи, направленная по нормали к поверхности (рис. 292).

Дадим точке виртуальное перемещение δr . Если связь неосвобождающая, то перемещение δr лежит в касательной плоскости, и

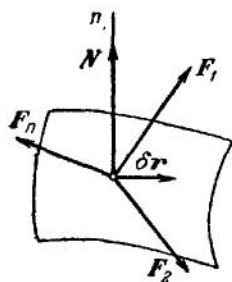


Рис. 292.

поэтому $N \perp \delta r$. Умножая обе части равенства (3) скалярно на δr , получим:

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r + N \cdot \delta r = 0,$$

но $N \cdot \delta r = 0$, следовательно,

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r = 0, \quad (4)$$

или, в проекциях,

$$\sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x + F_{iy} \delta y + F_{iz} \delta z) = 0. \quad (4')$$

Условие (4) необходимо для равновесия точки как следствие (3). Оно также и достаточно, ибо виртуальное перемещение δr лежит в данном случае в плоскости, касательной к поверхности связи. Поэтому при выполнении условия (4) равнодействующая всех активных сил $F = \sum F_i$ будет перпендикулярна к этой поверхности и уравновесится развиваемой реакцией связи N .

В случае освобождающей связи виртуальные перемещения образуют с реакцией N прямой или острый угол (рис. 293), так как точка может покинуть связь только в ту сторону, куда направлена нормальная реакция N ; поэтому $N \cdot \delta r \geq 0$.

Но поскольку при равновесии

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r + N \cdot \delta r = 0,$$

то условие равновесия для освобождающей связи будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r = \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x + F_{iy} \delta y + F_{iz} \delta z) \leq 0. \quad (5)$$

Если связью является гладкая (идеальная) кривая, то на точку действует, кроме активной силы $F = \sum F_i$, реакция кривой N , которая будет направлена по нормали к кривой. Поэтому

$$N \cdot \delta r \begin{cases} = 0 & \text{для связи неосвобождающей,} \\ \geq 0 & \text{для связи освобождающей.} \end{cases}$$

Следовательно, условие равновесия представится в виде (4) или (5), как и в предыдущем случае.

Таким образом, для равновесия материальной точки, на которую наложены идеальные связи, необходимо и достаточно,

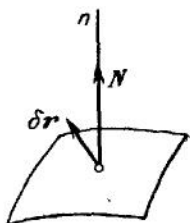


Рис. 293.

чтобы при всяком виртуальном перемещении сумма элементарных работ всех действующих на точку активных сил была или равна нулю (в случае связей неосвобождающих), или же была равна нулю или меньше нуля (в случае связей освобождающих), т. е.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r} \equiv \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x + F_{iy} \delta y + F_{iz} \delta z) \leq 0. \quad (6)$$

Это положение носит название *принципа виртуальных* (возможных) *перемещений*. Установленный И. Бернулли, он был окончательно сформулирован Лагранжем, вследствие чего условие (6) часто называют условием Лагранжа.

Как мы видели, этот принцип вытекает как следствие из постулата, что в случае идеальных связей работа реакций связи при виртуальном перемещении или равна нулю (для неосвобождающей связи), или же равна нулю или больше нуля (для освобождающей связи).

Иногда условие Лагранжа записывают в виде

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r} \equiv \sum_{i=1}^n (F_{ix} \delta x + F_{iy} \delta y + F_{iz} \delta z) = \delta \pi, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \pi &= 0 \text{ для неосвобождающих связей,} \\ \delta \pi &\leq 0 \text{ для освобождающих связей.} \end{aligned}$$

2. Метод множителей Лагранжа. Наложённые на точку связи могут удерживать ее на какой-нибудь поверхности или кривой. Рассмотрим, как при этом составляются уравнения, определяющие положение равновесия точки с помощью множителей Лагранжа.

1) *Равновесие точки на поверхности.* а) Пусть на точку наложена такая *неосвобождающая* связь, что точка все время находится на поверхности,

$$f(x, y, z) = 0. \quad (8)$$

Если на точку действует активная сила $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$, то по предыдущему условию равновесия точки будет:

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0, \quad (9)$$

где δx , δy , δz суть вариации координат, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (10)$$

Следовательно, из трех вариаций независимыми будут только две. Для получения уравнений, определяющих положение равновесия,

воспользуемся методом множителей Лагранжа. Умножим обе части равенства (10) на λ и сложим его с равенством (9); тогда получим:

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta z = 0.$$

Примем за независимые вариации любые две (например, δy и δz), тогда вариация δx будет зависимой. Выберем множитель λ так, чтобы коэффициент при δx обратился в нуль; тогда вследствие того, что вариации δy и δz независимы, множители при них также должны равняться нулю. Таким образом, мы получим три уравнения:

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

Присоединяя к ним уравнения связи

$$f(x, y, z) = 0, \quad (12)$$

получим систему четырех уравнений (11) и (12), из которых определим λ и x, y, z , т. е. положение точки при равновесии.

б) Рассмотрим теперь случай *освобождающей* связи

$$f(x, y, z) = c.$$

Предположим, что на точку действует активная сила $F(F_x, F_y, F_z)$; тогда условие равновесия можно взять в виде

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = \delta \pi, \quad \delta \pi \leq 0. \quad (13)$$

Вариации координат точки должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = \delta c, \quad (14)$$

причем δc должно иметь определенный знак; предположим, что $\delta c \geq 0$. Умножив обе части (14) на λ и сложив с (13), получим:

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta z = \delta \pi + \lambda \delta c. \quad (15)$$

Так как в случае освобождающих связей перемещения, при которых точка не покидает связи, принадлежат к числу виртуальных, то для таких перемещений имеем:

$$\left(F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right) \delta x + \left(F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right) \delta y + \left(F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right) \delta z = 0.$$

Считая независимыми вариациями δy и δz , выберем λ так, чтобы коэффициент при зависимой вариации δx обратился в нуль. Тогда вследствие независимости вариаций δy и δz коэффициенты при них также должны равняться нулю и мы получим:

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (16)$$

Присоединяя к этим трем уравнениям уравнение связи

$$f(x, y, z) = c, \quad (17)$$

определяем из системы четырех уравнений (16) и (17) x, y, z, λ , подобно тому как это делалось в случае неосвобождающей связи. Так как коэффициенты при вариациях равны нулю, то из (15) имеем:

$$\delta l + \lambda \delta c = 0,$$

но, когда связь освобождает, $\delta l < 0$, следовательно,

$$\lambda \delta c > 0. \quad (18)$$

Таким образом, множитель λ должен иметь тот же знак, что и δc . Отсюда видно, что при освобождающих связях положение равновесия стеснено еще добавочным условием, а именно соответствующим выбором знака множителя λ .

Пример. Найдем положения равновесия тяжелой материальной точки на сфере.

а) Предположим сначала, что точка не может покидать сферу радиуса R (связь неосвобождающая). Возьмем начало координат в центре сферы (рис. 294) и ось z направим вертикально вверх. Уравнение связи будет:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Так как проекции силы тяжести точки на оси координат равны

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = -mg,$$

то условие Лагранжа представится в виде

$$-mg \delta z = 0. \quad (a)$$

Варируя уравнение связи, найдем:

$$2x \delta x + 2y \delta y + 2z \delta z = 0. \quad (б)$$

Умножив обе части равенства (б) на λ и сложив с (а), будем иметь:

$$2\lambda x \delta x + 2\lambda y \delta y + (2\lambda z - mg) \delta z = 0.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при $\delta x, \delta y, \delta z$ нулю, получаем для определения положений равновесия уравнения:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda x &= 0, \\ 2\lambda y &= 0, \\ 2\lambda z &= mg. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Присоединив к ним уравнение связи

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0, \quad (г)$$

получим систему четырех уравнений (в) и (г), из которых определим x, y, z, λ . Возводя уравнения (в) почленно в квадрат и складывая их, находим:

$$4\lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2) = m^2 g^2 \quad \text{или} \quad 4\lambda^2 R^2 = m^2 g^2,$$

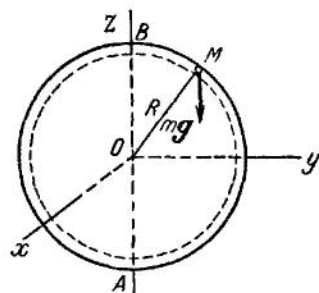


Рис. 294.

откуда

$$\lambda = \pm \frac{mg}{2R}.$$

Так как $\lambda \neq 0$, то

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{mg}{2\lambda} = \pm R.$$

Следовательно, положениями равновесия точки будут $(0, 0, R)$ и $(0, 0, -R)$, т. е. концы A и B вертикального диаметра сферы.

б) Предположим теперь, что связь освобождающая, т. е. что точка может сходить со сферы и именно во *внутреннюю* сторону (рис. 295). Тогда уравнение связи будет:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = c,$$

причем

$$c \leq 0, \quad \delta c \leq 0.$$

Условие равновесия (7) для этого случая имеет вид

$$-mg \delta z = \delta \pi, \quad \delta \pi \leq 0, \quad (д)$$

причем вариации координат должны удовлетворять условию

$$x \delta x + y \delta y + z \delta z = \frac{\delta c}{2}, \quad \delta c \leq 0. \quad (е)$$

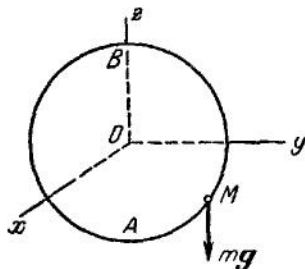


Рис. 295

Умножив обе части уравнения (е) на λ и складывая с (д), будем иметь:

$$\lambda x \delta x + \lambda y \delta y + (\lambda z - mg) \delta z = \delta \pi + \lambda \frac{\delta c}{2}.$$

Принимая во внимание, что неосвобождающие перемещения принадлежат к числу виртуальных, получим прежние уравнения равновесия, из которых найдем:

$$\lambda = \pm \frac{mg}{2R}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{mg}{2\lambda}.$$

Но, согласно равенству (18), когда связь освобождает, $\lambda \delta c > 0$, следовательно, знак λ должен совпадать со знаком δc , т. е. должно быть $\lambda < 0$, поскольку $\delta c < 0$. Таким образом, в данном случае

$$\lambda = -\frac{mg}{2R} \quad \text{и} \quad z = -R,$$

т. е. точка будет находиться в равновесии только в положении $A(0, 0, -R)$

Если предположим, что точка может сходить со сферы во *внешнюю* сторону, то $\delta c > 0$, а следовательно, $\lambda > 0$; поэтому $\lambda = \frac{mg}{2R}$ и $z = R$. Положением равновесия будет точка B .

2) *Равновесие точки на кривой.* а) Рассмотрим сначала случай *неосвобождающих* связей. Пусть уравнения связи, т. е. уравнения поверхностей, пересечением которых является данная кривая, будут:

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

Если на точку действует активная сила $F(F_x, F_y, F_z)$, то условие равновесия Лагранжа будет иметь вид

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0. \quad (19)$$

Варьируя уравнения связей, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Следовательно, вариации координат δx , δy , δz должны удовлетворять двум условиям (20), поэтому независимой будет только одна, положим δz . Умножая тогда обе части равенства (20) соответственно на λ_1 и λ_2 и складывая их с (19), получим:

$$\begin{aligned} (F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}) \delta x + (F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}) \delta y + \\ + (F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}) \delta z = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь произволом выбора множителей Лагранжа λ_1 и λ_2 , подберем их так, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях δx и δy обратились в нуль; тогда коэффициент при δz должен быть также равен нулю и мы будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Присоединяя к этим трем уравнениям два уравнения связей

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0,$$

получим систему пяти уравнений, откуда и определим величины x , y , z , λ_1 и λ_2 , соответствующие положению равновесия.

б) Если точка может покидать кривую (т. е. если связь *освобождающая*), то уравнения связи будут:

$$f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2,$$

причем δc_1 и δc_2 должны иметь определенные знаки. Условие Лагранжа для этого случая будет:

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = \delta \Delta, \quad \delta \Delta \leq 0. \quad (22)$$

Варьируя уравнения связи, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z &= \delta c_1, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z &= \delta c_2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Умножая обе части равенств (23) соответственно на λ_1 и λ_2 и складывая их с (22), будем иметь:

$$\begin{aligned} (F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}) \delta x + (F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}) \delta y + \\ + (F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}) \delta z = \delta \pi + \lambda_1 \delta c_1 + \lambda_2 \delta c_2. \end{aligned}$$

Считая перемещения неосвобождающими, получим прежнюю систему уравнений, из которых определим x , y , z , λ_1 , λ_2 , но к пяти ранее полученным уравнениям прибавляется еще одно условие, влияющее на выбор λ_1 и λ_2 , а именно:

$$\delta \pi + \lambda_1 \delta c_1 + \lambda_2 \delta c_2 = 0.$$

Допустим, что точка покидает первую связь, а вторую не покидает; тогда $\delta c_2 = 0$, и мы имеем:

$$\delta \pi + \lambda_1 \delta c_1 = 0.$$

Так как, когда связь освобождает, $\delta \pi < 0$, то

$$\lambda_1 \delta c_1 > 0,$$

следовательно, множитель λ_1 должен иметь тот же знак, что и δc_1 . Предположив, что точка покидает вторую связь, но остается на первой, получим $\delta c_1 = 0$; следовательно,

$$\delta \pi + \lambda_2 \delta c_2 = 0,$$

откуда, так как $\delta \pi < 0$, найдем:

$$\lambda_2 \delta c_2 > 0,$$

следовательно, знак λ_2 должен быть одинаков со знаком δc_2 .

3. Физический смысл множителей Лагранжа. Пусть точка находится на поверхности

$$f(x, y, z) = 0$$

и на нее действует сила $\mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$. Уравнения равновесия точки в этом случае будут иметь вид

$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Умножая эти уравнения соответственно на i , j , k и складывая, получим:

$$F_x i + F_y j + F_z k + \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \right) = 0$$

или

$$F + \lambda \operatorname{grad} f = 0.$$

Сравнивая с условием равновесия $F + N = 0$, где N есть нормальная реакция, находим:

$$N = \lambda \operatorname{grad} f,$$

откуда

$$\lambda = \pm \frac{N}{|\operatorname{grad} f|}.$$

Но так как

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2},$$

то

$$\lambda = \pm \frac{N}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Таким же образом, в случае равновесия точки на кривой, умножая обе части каждого из уравнений (21) соответственно на i , j , k и складывая их почленно, получим следующее векторное равенство:

$$F + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = 0.$$

Сравнивая это равенство с условием равновесия

$$F + N_1 + N_2 = 0,$$

где N_1 и N_2 — соответственно нормальные реакции поверхностей $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, найдем, что

$$\lambda_1 \operatorname{grad} f_1 = N_1, \quad \lambda_2 \operatorname{grad} f_2 = N_2,$$

т. е. произведения множителя Лагранжа на соответствующие $\operatorname{grad} f$ суть нормальные реакции поверхностей $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, пересечением которых является данная кривая.

Итак, множитель Лагранжа есть скалярная величина, пропорциональная реакции соответствующей связи.

4. Метод обобщенных координат. Для определения положения равновесия, кроме метода неопределенных множителей Лагранжа, можно пользоваться методом независимых параметров (обобщенных или криволинейных координат).

1) *Равновесие точки на поверхности.* Пусть на точку, находящуюся под действием активной силы $F(F_x, F_y, F_z)$, наложена неосвобождающая связь

$$f(x, y, z) = 0.$$

Тогда из трех координат x , y , z независимыми будут только две; следовательно, координаты точки или ее радиус-вектор можно представить как функции двух независимых параметров q_1 и q_2 любой размерности, которые можно принять за обобщенные координаты точки. Таким образом,

$$x = x(q_1, q_2), \quad y = y(q_1, q_2), \quad z = z(q_1, q_2),$$

или так как $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, то $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2)$.

Преобразуем условие равновесия (6)

$$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (24)$$

к координатам q_1 и q_2 . Для этого выразим вариацию $\delta \mathbf{r}$ через вариации криволинейных координат; получим:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \delta q_2.$$

Тогда равенство (24) дает:

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \delta q_2 = 0. \quad (25)$$

Выражение

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_1} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_1} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_1} = Q_1 \quad (26)$$

называется *обобщенной силой, отнесенной к координате q_1* ; аналогично

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_2} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_2} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_2} = Q_2 \quad (26')$$

называется *обобщенной силой, отнесенной к координате q_2* . В результате условие (25) примет вид

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 = 0. \quad (27)$$

Так как вариации δq_1 и δq_2 независимы, то отсюда следует, что при равновесии

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0. \quad (28)$$

Таким образом, условия равновесия состоят в том, что обобщенные силы, отнесенные к выбранным независимым координатам, должны быть равны нулю.

Если связь освобождающая, то уравнение связи имеет вид

$$f(x, y, z) = c,$$

где c имеет определенный знак. В этом случае \mathbf{r} будет функцией координат q_1 , q_2 и c , т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, c).$$

Так как освобождающее перемещение происходит при изменении c , то вариация радиуса-вектора r

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \delta q_2 + \frac{\partial r}{\partial c} \delta c.$$

Подставляя это выражение в условие равновесия (7)

$$F \cdot \delta r = \delta \pi, \quad \delta \pi \leq 0,$$

получим:

$$F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_1} \delta q_1 + F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_2} \delta q_2 + F \cdot \frac{\partial r}{\partial c} \delta c = \delta \pi$$

или

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 = \delta \pi - C \delta c,$$

где

$$C = F \cdot \frac{\partial r}{\partial c} = F_x \frac{\partial x}{\partial c} + F_y \frac{\partial y}{\partial c} + F_z \frac{\partial z}{\partial c}.$$

Так как неосвобождающие перемещения принадлежат к числу виртуальных, то для них $\delta l = 0$, $\delta c = 0$, и мы имеем:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0. \quad (28')$$

Кроме того, отсюда следует, что

$$\delta \pi - C \delta c = 0.$$

Так как для освобождающих перемещений $\delta l < 0$, то $C \delta c < 0$ и, следовательно, C и δc должны иметь различные знаки. Это условие добавляется к условиям (28) в случае освобождающих связей.

2) *Равновесие точки на кривой.* Ограничимся рассмотрением случая неосвобождающей связи. Пусть точка, на которую действует сила $F(F_x, F_y, F_z)$, принуждена остаться на кривой

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0.$$

В этом случае только одна координата будет независимой, поэтому координаты точки могут быть представлены как функции одного независимого параметра q , т. е.

$$x, y, z | q \quad \text{или} \quad r = r(q).$$

Тогда

$$\delta r = \frac{dr}{dq} \delta q.$$

Подставляя это в условие равновесия $F \cdot dr = 0$, будем иметь:

$$F \cdot \frac{dr}{dq} \delta q = 0 \quad \text{или} \quad Q \delta q = 0, \quad (29)$$

где

$$Q = F \cdot \frac{dr}{dq} = F_x \frac{dx}{dq} + F_y \frac{dy}{dq} + F_z \frac{dz}{dq} \quad (30)$$

есть обобщенная сила, отнесенная к координате q . В результате получаем следующее условие равновесия:

$$Q = 0. \quad (31)$$

Из выражения (30) видно, что обобщенная сила Q пропорциональна проекции силы F на касательную к кривой; следовательно, при равновесии проекция силы на касательную к кривой должна равняться нулю.

5. Обобщенные силы. Из предыдущего видно, что для определения условий равновесия методом обобщенных координат следует определить отнесенные к этим координатам обобщенные силы и приравнять их нулю. Обобщенные силы Q_i можно вычислять по формулам (26) или (30). При этом требуется установить в явном виде зависимость декартовых координат x, y, z от обобщенных q_i . Однако в ряде случаев оказывается более простым другой путь вычисления Q_i . В самом деле, из равенств (27) или (29) следует, что их левая часть представляет собой выражение элементарной работы приложенных к точке активных сил в обобщенных координатах, т. е.

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 \quad \text{или} \quad \delta A = Q \delta q. \quad (32)$$

Следовательно, если непосредственно вычислить выражение элементарной работы и представить его в виде (32), то коэффициенты при вариациях обобщенных координат и будут соответствующими обобщенными силами.

Заметим, что размерность обобщенной силы Q зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты, причем, как следует из (32),

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}. \quad (33)$$

Таким образом, если q — величина линейная, то Q имеет размерность обычной силы, если же q — угол, то размерность Q будет совпадать с размерностью момента силы и т. д.

Пример. Найдем положения равновесия тяжелой материальной точки на сфере (см. пример на стр. 286) методом обобщенных координат.

Считаем сначала связь неосвобождающей. Положение точки M на сфере можно определить широтой λ и полярным углом θ ($q_1 = \lambda, q_2 = \theta$). Изобразим меридиональное сечение сферы и направим из ее центра вертикально вверх ось z (рис. 296, угол λ между этим сечением и плоскостью xz на рисунке не показан). Рассматриваемая точка находится в однородном поле тяжести и для нее (см. § 27, п. 3) силовая функция

$$U = -mgz + \text{const} = -mgR \cos \theta + \text{const},$$

где R — радиус сферы. Следовательно, элементарная работа

$$\delta A = \delta U = mgR \sin \theta \delta \theta.$$

С другой стороны, согласно (32), должно быть:

$$\delta A = Q_1 \delta \lambda + Q_2 \delta \theta.$$

Отсюда заключаем, что

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = mgR \sin \theta.$$

Поскольку $q_2 = \theta$ — угол, то Q_2 в соответствии со сказанным выше представляет собой момент силы $p = mg$ относительно центра O .

При равновесии $Q_2 = 0$, т. е. $\sin \theta = 0$, откуда находим два положения равновесия: $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$.

Допустим теперь, что связь является освобождающей и точка может покидать сферу, например перемещаясь внутрь сферы. Тогда радиус-вектор r точки, покинувшей сферу, и ее координата z соответственно будут (см. рис. 296).

$$r = R + c, \quad z = R \cos \theta + c_z.$$

Отсюда

$$U = -mgR \cos \theta - mgc_z + \text{const}$$

и

$$\delta A = mgR \sin \theta \delta \theta - mg \delta c_z.$$

Здесь опять $Q_1 = 0$, $Q_2 = mgR \sin \theta$ и положения равновесия соответствуют $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$. Но из этих двух положений следует отобрать то, для которого C и δc_z имеют разные знаки, где C — коэффициент при δc_z в выражении δA . В данном случае $C = -mg < 0$. Следовательно, равновесие имеет место лишь в точке A (рис. 296), для которой $\delta c_z > 0$.

Если же точка может покидать сферу во внешнюю сторону, то $\delta c_z > 0$ в положении B , которое и будет положением равновесия.

Как видим, с помощью обобщенных координат положения равновесия определяются быстрее, чем с помощью множителей Лагранжа. Но зато, зная множитель λ , мы можем дополнительно найти реакцию сферы.

§ 30. Статика системы материальных точек

1. Принцип виртуальных перемещений. В применении к системе материальных точек принцип виртуальных перемещений состоит в следующем: для равновесия системы материальных точек со стационарными и идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил при всяком виртуальном перемещении системы была равна нулю (для связей неосвобождающих) или же была равна нулю или меньше нуля (для связей освобождающих), т. е. соответственно¹⁾

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = 0 \quad (1)$$

¹⁾ Для освобождающих связей знак равенства в формуле (1') соответствует случаю, когда все перемещения δr_k являются неосвобождающими, а знак неравенства — случаю, когда хотя бы одно из перемещений δr_k является освобождающим. Это замечание относится и ко всем остальным формулам данного параграфа, содержащим неравенства.

или

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k \leq 0. \quad (1')$$

Этот принцип логически вытекает из *постулата идеальных связей*, согласно которому для идеальных связей сумма элементарных работ реакций этих связей при всяком виртуальном перемещении или равна нулю (если связи неосвобождающие), или же равна или больше нуля (если среди связей есть освобождающие), т. е. соответственно

$$\sum_{k=1}^n N_k \cdot \delta r_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^n N_k \cdot \delta r_k \geq 0. \quad (2)$$

По существу, каждое из соотношений (2) служит определением идеальных связей, и в дальнейшем под идеальными связями мы будем понимать такие, для которых это соотношение выполняется.

Покажем сначала, что даваемое принципом виртуальных перемещений условие равновесия является необходимым. Пусть некоторая механическая система, состоящая из n материальных точек, находится в равновесии. Рассмотрим какую-нибудь точку A_k системы; обозначим сумму всех действующих на нее активных сил через F_k , а сумму всех реакций связей — через N_k (рис. 297). Так как действие всех наложенных на точку A_k связей заменено их реакциями, то точку можно рассматривать как свободную. Если система находится в равновесии, то всякая точка системы A_k будет тоже в равновесии, поэтому для каждой из точек системы

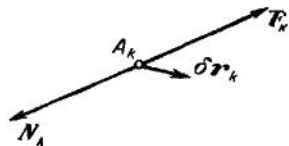


Рис. 297.

$$F_k + N_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Дадим каждой точке A_k виртуальное перемещение δr_k . Умножив обе части равенства (3) скалярно на δr_k , будем иметь:

$$F_k \cdot \delta r_k + N_k \cdot \delta r_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Складывая эти равенства почленно, получим:

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k + \sum_{k=1}^n N_k \cdot \delta r_k = 0. \quad (4)$$

Но, согласно постулату идеальных связей (здесь и далее для общности рассматриваем случай, когда среди связей имеются освобождающие),

$$\sum_{k=1}^n N_k \cdot \delta r_k \geq 0.$$

Тогда из равенства (4) вытекает, что если система находится в равновесии, то

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k \leq 0 \quad (5)$$

или

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = \delta \pi, \quad (5')$$

где $\delta \pi \leq 0$. Следовательно, условие (5), выражающее принцип виртуальных перемещений, необходимо.

Покажем, что это условие и достаточно, т. е. что если оно выполняется, то система будет в равновесии. Допустим, что к точкам

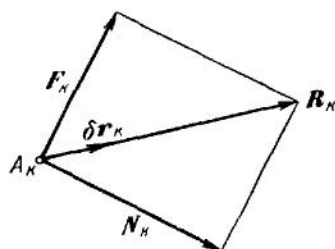


Рис. 298.

системы, первоначально находившейся в покое, приложили активные силы F_k , удовлетворяющие условию (5), и что при этом хотя бы одна из точек A_k системы пришла в движение. Тогда для нее равенство (3) выполняться не будет и силы F_k , N_k будут иметь равнодействующую R_k , отличную от нуля (рис. 298). Под действием этой силы точка совершит истинное перемещение dr_k , которое будет неосвобождающим

(так как полагается, что $N_k \neq 0$) и направленным вдоль R_k (так как движение начинается из состояния покоя). Поскольку связи стационарны, то одно из неосвобождающих виртуальных перемещений δr_k совпадает с dr_k и для него будет $R_k \cdot \delta r_k = (F_k + N_k) \cdot \delta r_k > 0$. В результате вместо (4) получим:

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k + \sum_{k=1}^n N_k \cdot \delta r_k > 0. \quad (6)$$

Допустим, что все остальные виртуальные перемещения также являются неосвобождающими. Тогда, согласно (2), должно быть $\sum N_k \cdot \delta r_k = 0$ и неравенство (6) даст $\sum F_k \cdot \delta r_k > 0$. Но это противоречит первоначальному допущению о том, что силы F_k удовлетворяют условию (5) при любых виртуальных перемещениях системы. Следовательно, при выполнении условия (5) система должна оставаться в равновесии. Таким образом, условие (5) действительно выражает необходимое и достаточное условие равновесия механической системы. В декартовых координатах оно имеет вид

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = \delta \pi, \quad \delta \pi \leq 0. \quad (7)$$

2. Исследование равновесия системы в декартовых координатах. Метод множителей Лагранжа. Пусть имеем систему n материальных точек, на которую наложены связи: неосвобождающие

$$f_{\alpha}(x, y, z) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l)$$

и освобождающие

$$\varphi_{\beta}(x, y, z) = c_{\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, m),$$

причем δc_{β} имеют определенные знаки (отсутствие индексов у координат обозначает, что под x, y, z подразумеваются координаты всех точек системы; следовательно, f_{α} и φ_{β} суть функции всех $3n$ координат).

Таким образом, на систему наложено $(l + m)$ геометрических связей и число независимых координат системы будет равно

$$[3n - (l + m)] = r.$$

Запишем условие равновесия системы:

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = \delta \pi, \quad \delta \pi \leq 0. \quad (7')$$

Вариации координат точек системы должны удовлетворять условиям, которые мы получим, варьируя уравнения связей, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_k} \delta z_k \right) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l) \\ \text{и} \\ \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial z_k} \delta z_k \right) &= \delta c_{\beta} \quad (\beta = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Так как $3n$ вариаций $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$ должны удовлетворять $(l + m)$ условиям (8), то независимых из них будет $3n - (l + m) = r$, т. е. столько же, сколько независимых координат.

Умножая обе части равенств (8) соответственно на λ_{α} и μ_{β} и складывая их почленно с (7'), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left[\left(F_{kx} + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_k} + \sum_{\beta=1}^m \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial x_k} \right) \delta x_k + \right. \\ \left. + \left(F_{ky} + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y_k} + \sum_{\beta=1}^m \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial y_k} \right) \delta y_k + \right. \\ \left. + \left(F_{kz} + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial z_k} + \sum_{\beta=1}^m \mu_{\beta} \frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial z_k} \right) \delta z_k \right] = \delta \pi + \sum_{\beta=1}^m \mu_{\beta} \delta c_{\beta}. \quad (9) \end{aligned}$$

Мы имеем $(l + m)$ зависимых вариаций. Выберем множители Лагранжа λ_α и μ_β таким образом, чтобы коэффициенты при зависимых вариациях обратились в нуль; тогда коэффициенты при независимых вариациях будут также равны нулю, поскольку соотношение (9) должно выполняться и в случае, когда связи не освобождают, т. е. когда δl и все δc_β равны нулю. Таким образом, получим систему $3n$ уравнений:

$$\left. \begin{aligned} F_{kx} + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_k} + \sum_{\beta=1}^m \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_k} &= 0, \\ F_{ky} + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_k} + \sum_{\beta=1}^m \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial y_k} &= 0, \\ F_{kz} + \sum_{\alpha=1}^l \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_k} + \sum_{\beta=1}^m \mu_\beta \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z_k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (10)$$

из которых необходимо найти $3n + (l + m)$ величин: $3n$ координат x_k, y_k, z_k , определяющих положение равновесия системы и $(l + m)$ множителей $\lambda_\alpha, \mu_\beta$.

Присоединяя к уравнениям (10) еще $(l + m)$ уравнений связей

$$\left. \begin{aligned} f_\alpha(x, y, z) &= 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l), \\ \varphi_\beta(x, y, z) &= c_\beta \quad (\beta = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

будем иметь полную систему $3n + (l + m)$ уравнений.

Эффект освобождающих связей будет влиять на выбор множителей μ_β , которые, как видно из (9) и (10), должны удовлетворять условию

$$\delta l + \sum_{\beta=1}^m \mu_\beta \delta c_\beta = 0.$$

Предполагая, что освобождает только первая связь, а остальные не освобождают, получим отсюда:

$$\delta l + \mu_1 \delta c_1 = 0 \quad \text{или} \quad \mu_1 \delta c_1 > 0,$$

так как $\delta l < 0$. Следовательно, множитель μ_1 должен иметь знак, одинаковый с δc_1 , и т. д.

3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Обобщенные силы. Рассмотрим сначала случай неосвобождающих связей. Пусть на систему n материальных точек наложено l неосвобождающих геометрических связей

$$f_\alpha(x, y, z) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l).$$

Тогда число независимых координат системы будет $3n - l = r$, причем декартовы координаты x_k, y_k, z_k или векторные координаты r_k точек системы можно выразить в функциях r независимых параметров (обобщенных координат) q_1, q_2, \dots, q_r , т. е.

$$r_k = r_k(q_1, q_2, \dots, q_r).$$

Отсюда

$$\delta r_k = \sum_{\rho=1}^r \frac{\partial r_k}{\partial q_\rho} \delta q_\rho \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Подставив эти выражения δr_k в условие равновесия

$$\delta A = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = 0,$$

получим

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \sum_{\rho=1}^r F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_\rho} \delta q_\rho = 0.$$

Введем обозначение

$$Q_\rho = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_\rho} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_\rho} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_\rho} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_\rho} \right), \quad (12)$$

где Q_ρ будет обобщенная сила, отнесенная к координате q_ρ . Тогда получим условие равновесия в виде

$$\delta A = \sum_{\rho=1}^r Q_\rho \delta q_\rho = 0. \quad (13)$$

Из равенства (13) видно, что обобщенные силы Q_ρ представляют собой величины, равные коэффициентам при вариациях обобщенных координат в выражении элементарной работы. Размерность их, как уже указывалось, будет

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]}$$

и зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Так как координаты q_ρ независимы, то из равенства (13) получаем следующие условия равновесия:

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \quad \dots, \quad Q_r = 0. \quad (14)$$

Таким образом, для равновесия системы с неосвобождающими связями (стационарными и идеальными) необходимо и достаточно, чтобы обобщенные силы, отнесенные к выбранным обобщенным координатам, были равны нулю.

Если связи освобождающие, то уравнения связей будут иметь вид

$$f_{\alpha}(x, y, z) = c_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l),$$

причем δc_{α} будут иметь определенные знаки. Тогда радиусы-векторы r_k точек системы могут быть выражены в функциях $3n-l=r$ независимых параметров q_1, q_2, \dots, q_r и величин c_1, c_2, \dots, c_l , т. е.

$$r_k = r_k(q_1, q_2, \dots, q_r, c_1, c_2, \dots, c_l).$$

Отсюда

$$\delta r_k = \sum_{\rho=1}^r \frac{\partial r_k}{\partial q_{\rho}} \delta q_{\rho} + \sum_{\alpha=1}^l \frac{\partial r_k}{\partial c_{\alpha}} \delta c_{\alpha}.$$

Подставляя эти значения δr_k в условие равновесия

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = \delta \pi,$$

получим:

$$\sum_{k=1}^n \left[\sum_{\rho=1}^r F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_{\rho}} \delta q_{\rho} + \sum_{\alpha=1}^l F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial c_{\alpha}} \delta c_{\alpha} \right] = \delta \pi, \quad \delta \pi \leq 0.$$

Вводя обозначения

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_{\rho}} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_{\rho}} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_{\rho}} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_{\rho}} \right) = Q_{\rho},$$

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial c_{\alpha}} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial c_{\alpha}} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial c_{\alpha}} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial c_{\alpha}} \right) = C_{\alpha},$$

будем иметь:

$$\sum_{\rho=1}^r Q_{\rho} \delta q_{\rho} + \sum_{\alpha=1}^l C_{\alpha} \delta c_{\alpha} = \delta \pi,$$

или

$$\sum_{\rho=1}^r Q_{\rho} \delta q_{\rho} = \delta \pi - \sum_{\alpha=1}^l C_{\alpha} \delta c_{\alpha}. \quad (15)$$

Поскольку это соотношение должно выполняться и в случае, когда связи не освобождают, т. е. когда

$$\delta \pi = 0, \quad \delta c_{\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l),$$

то отсюда опять приходим к условиям равновесия (14):

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = 0, \dots, Q_r = 0.$$

Однако теперь к ним присоединится еще вытекающее из (15) добавочное условие:

$$\delta\pi - \sum_{\alpha=1}^n C_{\alpha} \delta c_{\alpha} = 0.$$

Рассуждая по предыдущему, находим в случае освобождающих связей следующие добавочные условия равновесия: каждая из величин C_{α} должна иметь знак, обратный знаку δc_{α} .

4. Некоторые частные случаи равновесия системы.

1) *Равновесие свободного абсолютно твердого тела.* Условия равновесия абсолютно твердого тела, выведенные в элементарной статике, вытекают из общего условия равновесия (условия Лагранжа) как частный случай. Пусть имеем свободное абсолютно твердое тело, на которое действуют силы F_k . Тогда при равновесии эти силы должны удовлетворять условию

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta r_k = 0, \quad (16)$$

где δr_k — виртуальные перемещения точек тела.

Известно, что всякое элементарное перемещение абсолютно твердого тела складывается из поступательного перемещения δz , общего для всех точек тела, и поворота около некоторой мгновенной оси на угол $\delta\varphi$ ¹⁾ (рис. 299); поэтому всякая точка тела M_k получит перемещение

$$\delta r_k = \delta z + \delta\varphi \times r_k,$$

где r_k есть радиус-вектор точки. Подставляя это выражение δr_k в условие равновесия (16), получим:

$$\sum_{k=1}^n F_k \cdot (\delta z + \delta\varphi \times r_k) = 0,$$

или

$$\delta A = \sum_{k=1}^n F_k \cdot \delta z + \sum_{k=1}^n F_k \cdot (\delta\varphi \times r_k) = 0. \quad (17)$$

Преобразуем второй член левой части:

$$F_k \cdot (\delta\varphi \times r_k) = (r_k \times F_k) \cdot \delta\varphi.$$

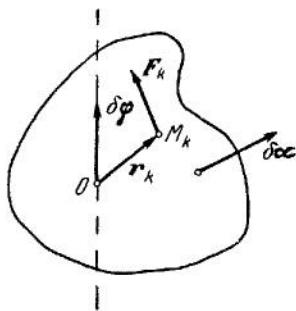


Рис. 299.

¹⁾ Под $\delta\varphi$ мы понимаем вектор, численно равный $\delta\varphi$ и направленный вдоль мгновенной оси в ту сторону, откуда поворот виден против хода часовой стрелки.

Тогда из (17), учитывая, что $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$ являются в первой и второй суммах соответственно общими множителями, получим:

$$\delta A = \left(\sum_{k=1}^n F_k \right) \cdot \delta\alpha + \left[\sum_{k=1}^n (r_k \times F_k) \right] \cdot \delta\varphi = 0, \quad (18)$$

Ввиду того, что $\delta\alpha$ и $\delta\varphi$ суть независимые вариации, находим отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_k &= 0, \\ \sum_{k=1}^n (r_k \times F_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Равенства (19) представляют собой известные из элементарной статики условия равновесия свободного абсолютно твердого тела в векторной форме. Заметим, что условия (19) необходимы для равновесия всякой системы материальных точек, потому что, предполагая эту систему отвердевшей, мы налагаем добавочные связи и не нарушаем равновесия системы, но достаточными эти условия будут только для абсолютно твердого тела.

2) *Равновесие твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения.* Такое тело имеет одну степень свободы — поворот вокруг оси вращения z ; за обобщенную координату можно выбрать угол поворота φ . Если к телу приложены активные силы F_k , то элементарную работу этих сил можно определить из равенства (18), полагая в нем $\delta\alpha = 0$, а вектор $\delta\varphi$ направленным вдоль оси z . Тогда, поскольку в данном случае $\delta\varphi_x = \delta\varphi_y = 0$, а $\delta\varphi_z = \delta\varphi$, будем иметь:

$$\delta A = \left[\sum (r_k \times F_k) \right] \cdot \delta\varphi = \sum (r_k \times F_k)_z \delta\varphi.$$

Но по определению $(r_k \times F_k)_z = \text{mom}_z F_k$, т. е. представляет собой момент силы F_k относительно оси z . Введем обозначение

$$M_z = \sum \text{mom}_z F_k, \quad (20)$$

где величина M_z называется вращающим моментом. Тогда получим:

$$\delta A = M_z \delta\varphi, \quad (21)$$

т. е. элементарная работа сил, приложенных к телу, имеющему неподвижную ось вращения, равна вращающему моменту, умноженному на элементарный угол поворота.

Из равенства (21) следует, что соответствующая координате φ обобщенная сила Q равна вращающему моменту M_z . Следовательно, условием равновесия тела, имеющего неподвижную ось вращения, будет:

$$M_z = \sum \text{mom}_z F_k = 0. \quad (22)$$

Такой же результат был найден методами геометрической статики.

3) *Равновесие системы, находящейся в однородном поле тяжести.* Пусть мы имеем систему материальных точек с идеальными связями и пусть действующими на нее активными силами являются только силы тяжести; следовательно, на каждую точку системы действует активная сила $m_k g$, где m_k — масса точки (рис. 300). Направим ось z вертикально вниз; элементарная работа силы тяжести при всяком виртуальном перемещении будет равна $m_k g \delta z_k$ и условие равновесия системы примет вид

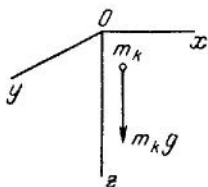


Рис. 300

$$\sum_{k=1}^n m_k g \delta z_k = 0 \quad \text{или} \quad \sum m_k \delta z_k = 0, \quad (23)$$

поскольку g , как общий множитель, можно вынести за знак суммы и на него сократить. Но

$$\sum_{k=1}^n m_k z_k = M z_0,$$

где M — масса системы, z_0 — координата центра масс. Тогда из (23) находим:

$$\sum_{k=1}^n m_k \delta z_k = \delta \sum_{k=1}^n m_k z_k = M \delta z_0 = 0.$$

Отсюда, так как $M \neq 0$, имеем:

$$\delta z_0 = 0, \quad z_0 = \text{station}, \quad (24)$$

т. е. координата центра масс при равновесии имеет стационарное значение.

Отсюда вытекает принцип Торричелли: *тяжелая система материальных точек с идеальными связями находится в равновесии только при том условии, что высота ее центра масс имеет стационарное значение.*

Сказанное можно пояснить примером, изображенным на рис. 301.

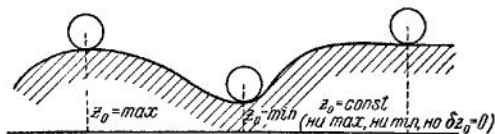


Рис. 301

4) *Равновесие системы под действием потенциальных сил.* Пусть силы, действующие на систему, имеют потенциал; связи предполагаем неосвобождающими.

В этом случае, если $U(x, y, z)$ есть потенциальная функция, то

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k};$$

подставляя эти значения в условие равновесия, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k) = \\ = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} \delta z_k \right) = \delta U(x, y, z) = 0, \quad (25) \end{aligned}$$

т. е. при равновесии первая вариация потенциальной функции U должна равняться нулю, или, что то же, система материальных точек будет находиться в равновесии тогда и только тогда, когда потенциальная функция U имеет стационарное значение.

Найдем выражение обобщенных сил через потенциальную функцию U . Так как

$$Q_\rho = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_\rho} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_\rho} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_\rho} \right),$$

а для потенциальных сил

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k},$$

то, полагая функцию U выраженной через обобщенные координаты q_i , т. е. считая $U = U(q_1, q_2, \dots, q_r)$, получим:

$$Q_\rho = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_\rho} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_\rho} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_\rho} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_\rho}. \quad (26)$$

Следовательно, обобщенная сила равна производной от силовой функции по соответствующей обобщенной координате.

Условие равновесия в обобщенных координатах имеет вид

$$\delta A = \sum Q_\rho \delta q_\rho = \sum_{\rho=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_\rho} \delta q_\rho = \delta U = 0,$$

откуда

$$U = \text{station.} \quad (27)$$

т. е. получаем тот же результат.

5. Задачи. Для механической системы с неосвобождающими связями (идеальными и стационарными) условие равновесия (5) имеет вид

$$\sum \delta A_k = 0, \quad (28)$$

где δA_k — элементарные работы активных сил, которые можно вычислять по одной из следующих формул:

$$\delta A_k = F_{kx} \delta x_k + F_{ky} \delta y_k + F_{kz} \delta z_k, \quad (29)$$

$$\delta A_k = F_k \delta s_k \cos(\widehat{F_k \delta r_k}), \quad (30)$$

$$\delta A_k = (\text{mom}_z F_k) \delta \varphi_k = m_z \delta \varphi_k. \quad (31)$$

Последняя формула (см. п. 4) относится к случаю, когда сила F_k (или пара с моментом m) действует на тело, имеющее неподвижную ось вращения z .

Если δA_k вычисляются по формулам (30) и (31), то при этом все перемещения δs_k и $\delta \varphi_k$ должны быть выражены через независимые (для системы с одной степенью свободы — через одно). Если же используется формула (29), то первоначально координаты x_k, y_k, z_k можно выразить через любое число параметров и, проварьировав эти выражения, найти $\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$; но затем также следует все вошедшие в выражения δA_k вариации параметров выразить через независимые. После этого уравнения для определения искомых величин находят, приравнявая нулю коэффициенты при независимых вариациях (т. е. обобщенные силы).

Для определения реакции какой-либо связи отбрасывают эту связь и заменяют ее соответствующей реакцией, которую включают в число активных сил. При этом у системы с отброшенной связью увеличивается число степеней свободы, т. е. число независимых вариаций координат, что дает дополнительные уравнения для определения искомой реакции.

В рассматриваемых ниже примерах весами всех звеньев (если веса не заданы), а также трением пренебрегаем.

1. В механизме, состоящем из шарнирно соединенных стержней, образующих n одинаковых параллелограммов (рис. 302), найти зависимость между силами P и Q при равновесии.

Механизм имеет одну степень свободы, так как его положение полностью определяется одним углом α .

Обозначая виртуальные перемещения точек A_1 и A_n через δs_1 и δs_n , имеем следующее условие равновесия:

$$P \delta s_n - Q \delta s_1 = 0.$$

Но при виртуальном перемещении диагонали всех параллелограммов удлиняются на одну и ту же величину δs ; следовательно, $\delta s_1 = \delta s, \delta s_n = n \delta s$ и мы получим $(nP - Q) \delta s = 0$, откуда, так как $\delta s \neq 0, Q = nP$.

Можно также, проведя из неподвижной точки O по вертикали вниз ось Ox , представить условие равновесия в виде $Q_x \delta x_1 + P_x \delta x_n = 0$. Вводя параметр α и обозначая сторону параллелограмма через a , имеем $x_1 = 2a \cos \alpha, x_n = 2na \cos \alpha$, откуда $\delta x_1 = -2a \sin \alpha \delta \alpha, \delta x_n = -2na \sin \alpha \delta \alpha$. Тогда, так

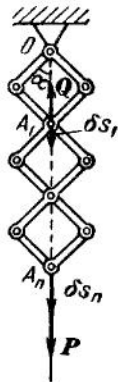


Рис 302.

как $Q_x = -Q$, $P_x = P$, получим $(Q - nP) 2a \sin \alpha \delta \alpha = 0$, откуда опять находим $Q = nP$.

2. В прессе, изображенном на рис. 303, $ABDE$ есть шарнирный параллелограмм, у которого $AB = DE = a$ и звено AE неподвижно. С звеном DE жестко связана рукоять EK длины l ; в точке K перпендикулярно к рукояти приложена сила P . Найти силу давления Q на поршень, если при данных углах α и β имеет место равновесие.

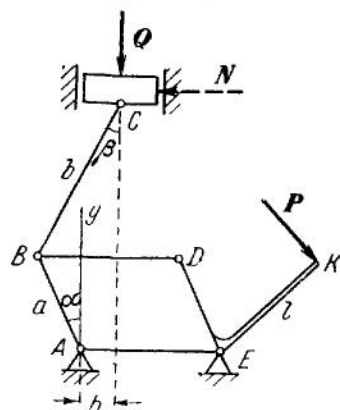


Рис. 303.

Эта система также имеет одну степень свободы, так как ее положение (зная длины стержней) можно определить одним углом α . По условию равновесия будет:

$$\delta A(P) + \delta A(Q) = 0. \quad (a)$$

Если звено AB при виртуальном перемещении повернется в сторону возрастания угла α на $\delta \alpha$, то звено ED параллелограмма и жестко связанная с ним рукоять повернутся около центра E также на угол $\delta \alpha$; следовательно, с учетом знака

$$\delta A(P) = -|\text{мом}_E P| \delta \alpha = -Pl \delta \alpha. \quad (б)$$

Для определения $\delta A(Q)$ проведем из неподвижной точки A вертикально вверх

ось y . Тогда $\delta A(Q) = Q_y \delta y_C$, где $Q_y = -Q$, $y_C = a \cos \alpha + b \cos \beta$ и $\delta y_C = -(a \sin \alpha \delta \alpha + b \sin \beta \delta \beta)$.

Но так как система имеет одну степень свободы, то углы α и β должны быть связаны некоторым соотношением. Из рисунка легко видеть, что это соотношение будет $b \sin \beta - a \sin \alpha = h = \text{const}$, откуда, варьируя, находим $b \cos \beta \delta \beta - a \cos \alpha \delta \alpha = 0$ и

$$\delta \beta = \frac{a \cos \alpha}{b \cos \beta} \delta \alpha.$$

В результате будем иметь:

$$\delta A(Q) = Qa (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta) \delta \alpha, \quad (в)$$

и условие равновесия (а) принимает вид

$$[-Pl + Qa (\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \beta)] \delta \alpha = 0.$$

Отсюда получаем

$$Q = \frac{Pl}{a \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)} = \frac{Pl \cos \beta}{a \sin (\alpha + \beta)}.$$

Если надо дополнительно найти реакцию направляющей на поршень, то, отбрасывая эту связь, заменяем ее действие искомой реакцией N . При этом система может получить дополнительное (независимое от первого) виртуальное перемещение в виде поворота стержня BC вместе с поршнем вокруг центра B на некоторый угол $\delta \varphi$ (при $\alpha = \text{const}$). Сообщая системе такое перемещение и приравнявая сумму работ сил Q и N на этом перемещении нулю, получим:

$$(Nb \cos \beta - Qb \sin \beta) \delta \varphi = 0,$$

откуда

$$N = Q \operatorname{tg} \beta.$$

3. Четыре одинаковых соединенных шарнирами стержня расположены в вертикальной плоскости так, что $\angle CBD = \angle CDB$ (рис. 304); при этом конец A первого стержня закреплен шарнирно, а конец E последнего стержня опирается на гладкую горизонтальную плоскость. В точках B , C и D к стержням приложены три одинаковые вертикальные силы ($P_1 = P_2 = P_3 = P$), а в точке E — горизонтальная сила Q . Определить углы α и β при равновесии.

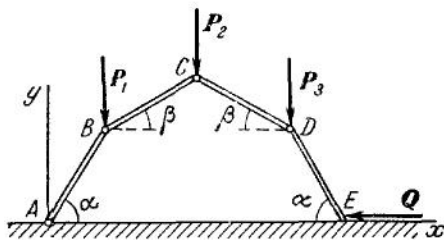


Рис. 304.

Конфигурация системы, при условии, что $\angle CBD = \angle CDB$, определяется двумя независимыми между собой углами α и β (перемещая точку E вдоль плоскости, можно изменить угол α , не меняя угла β , и наоборот). Следовательно, для определения искомых величин можно получить два уравнения, как для системы с двумя степенями свободы.

Проведем через неподвижную точку A координатные оси x и y . Так как проекции сил P_1 , P_2 и P_3 на ось x и силы Q на ось y равны нулю, то условие равновесия имеет вид

$$P_{1y} \delta y_B + P_{2y} \delta y_C + P_{3y} \delta y_D + Q_x \delta x_E = 0 \quad (a)$$

Обозначая длину стержня через a , имеем:

$$y_B = y_D = a \sin \alpha, \quad y_C = a \sin \alpha + a \sin \beta, \quad x_E = 2a \cos \alpha + 2a \cos \beta,$$

откуда

$$\delta y_B = \delta y_D = a \cos \alpha \delta \alpha, \quad \delta y_C = a (\cos \alpha \delta \alpha + \cos \beta \delta \beta), \\ \delta x_E = -2a (\sin \alpha \delta \alpha + \sin \beta \delta \beta).$$

Кроме того, $P_{1y} = P_{2y} = P_{3y} = -P$, $Q_x = -Q$. Подставляя все эти значения в равенство (a) и выделяя коэффициенты при $\delta \alpha$ и $\delta \beta$, будем иметь:

$$(-3P \cos \alpha + 2Q \sin \alpha) a \delta \alpha + (-P \cos \beta + 2Q \sin \beta) a \delta \beta = 0. \quad (б)$$

Поскольку, как было указано, $\delta \alpha$ и $\delta \beta$ между собой независимы, то коэффициенты при них должны быть порознь равны нулю. Отсюда находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3P}{2Q}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{P}{2Q}.$$

Интересно отметить, что при любых значениях сил P и Q углы α и β будут связаны соотношением $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

4. Для механизмов с одной степенью свободы часто бывает удобно ввести в условие (28) так называемые виртуальные скорости; при этом определение зависимости между силами, действующими на звенья механизма при равновесии, сводится к чисто кинематической задаче — определению зависимости между скоростями этих звеньев при возможном их движении (передаточного числа).

Пусть, например, на звено I механизма (ведущее), которое может совершать чисто вращательное движение, действует пара с моментом m (или сила,

момент которой относительно оси вращения равен m), а на звено 2 (ведомое), которое может совершать только поступательное движение, действует сила F (рис. 305). Тогда при равновесии

$$m \delta\varphi + F \delta s \cos(\widehat{F, \delta r}) = 0.$$

Но при стационарных связях истинное перемещение является одним из виртуальных. Следовательно, если при возможном движении механизма звено 1 будет иметь некоторую угловую скорость ω , а звено 2 — поступательную скорость v (ω и v называют виртуальными скоростями), то можно принять $\delta\varphi = \omega dt$, $\delta s = v dt$. Тогда предыдущее равенство дает:

$$m\omega + Fv \cos(\widehat{Fv}) = 0,$$

откуда, так как $F \cos(\widehat{Fv}) = F_v$ есть проекция силы на направление виртуальной скорости v , находим:

$$\left| \frac{m}{F_v} \right| = \frac{v}{\omega}. \quad (32)$$

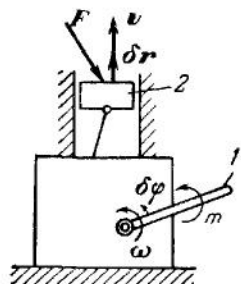


Рис. 305

Аналогично, если оба звена какого-либо механизма могут иметь или только поступательные, или чисто вращательные движения и на эти звенья действуют или силы F_1, F_2 , или пары с моментами m_1, m_2 , то при равновесии будет:

$$\left| \frac{F_{1u}}{F_{2v}} \right| = \frac{v}{u} \quad \text{и} \quad \left| \frac{m_1}{m_2} \right| = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (33)$$

Из полученных равенств видно, что действующие на звенья механизма при равновесии силы (или моменты пар) обратно пропорциональны соответствующим виртуальным скоростям. Это является отражением известного еще древним «Золотого правила механики» — «то, что выигрывается в силе, теряется в скорости».

Поясним изложенное двумя примерами.

а) Пусть в механизме, изображенном на рис. 108 (стр. 113), на стержни OA и DC действуют соответственно пары с моментами, равными по модулю m_{OA} и m_{DC} . Тогда по второй из формул (33) при равновесии будет:

$$\frac{m_{OA}}{m_{DC}} = \frac{\omega_{DC}}{\omega_{OA}}.$$

Но из решения рассмотренной на стр. 113 задачи следует, что у данного механизма для положения, показанного на рис. 108, $\omega_{DC} = \frac{v_C}{DC} = \frac{v_C}{r} = 2\omega_{OA}$.

Следовательно, при равновесии $m_{OA} = 2m_{DC}$.

б) Применим этот метод к решению рассмотренного выше примера 2. По формуле (32) будет (см. рис. 303):

$$\frac{Q}{Pl} = \frac{\omega_{EK}}{v_C}.$$

В данном случае $\omega_{EK} = \omega_{ED} = \omega_{AB}$. Чтобы найти связь между ω_{AB} и v_C , рассмотрим скорость точки B . По модулю $v_B = \omega_{AB} \cdot a$; при этом вектор v_B

перпендикулярный к AB , образует со стержнем BC , как легко подсчитать, угол, равный $[90^\circ - (\alpha + \beta)]$. Вектор же v_C образует с BC угол β . Тогда по известной теореме кинематики $v_B \cos [90^\circ - (\alpha + \beta)] = v_C \cos \beta$ или $\omega_{AB} a \sin (\alpha + \beta) = v_C \cos \beta$, откуда

$$\frac{\omega_{AB}}{v_C} = \frac{\omega_{EK}}{v_C} = \frac{\cos \beta}{a \sin (\alpha + \beta)}$$

и

$$Q = \frac{Pl \cos \beta}{a \sin (\alpha + \beta)}.$$

Рассмотренные примеры показывают, что при применении принципа виртуальных перемещений для определения условий равновесия механизма надо знать только соответствующее передаточное число, которое, в частности, можно определить экспериментально, не зная всех деталей механизма. Методами геометрической статики определить условие равновесия механизма, не зная всех его деталей, принципиально невозможно.

§ 31. О равновесии гибкой и нерастяжимой нити

1. Натяжение нити. Под гибкой нерастяжимой нитью мы будем подразумевать систему материальных точек, непрерывно расположенных по кривой, причем расстояния между точками системы, считая вдоль кривой, остаются неизменными.

Пусть имеем такую идеальную нить, закрепленную в точках A и B (рис. 306, а), на которую действуют некоторые активные силы; под действием их нить принимает вообще форму определенной кривой, являющуюся фигурой равновесия нити.

Если мы мысленно разрежем нить в произвольной точке C и удалим часть CB , то для удержания оставшейся части нити в равновесии необходимо будет приложить некоторую силу T , направленную по касательной к нити в точке C ; эта сила называется *натяжением* нити в данной точке.

2. Уравнения равновесия нити. Пусть нить AB находится в равновесии под действием сил, которые действуют на все точки нити. Обозначим силу, действующую на единицу длины нити, через F ; эта сила вообще есть функция координат точки, на которую она действует. Длину отрезка нити от начальной точки A до некоторой произвольной точки a (рис. 306, б) будем обозначать через s . При этом за положительное направление отсчета s принимаем направление

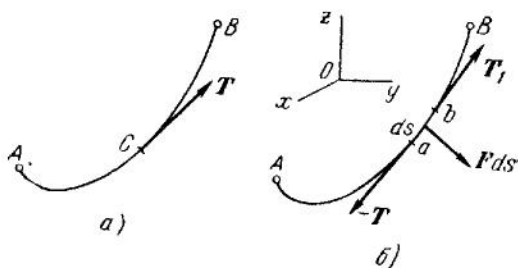


Рис. 306.

от A к B ; таким же считаем направление вектора T в любой точке нити.

Рассмотрим равновесие элемента нити $ab = ds$. Обозначим натяжение нити в точке a через T , а в точке b через T_1 (оба эти вектора направлены по принятому условию в направлении положительного отсчета s). Тогда на элемент ab действуют следующие силы: 1) натяжение $-T$ в точке a , 2) натяжение T_1 в точке b , 3) приложенная извне сила $F ds$.

Условие равновесия этого элемента будет:

$$F ds + T_1 + (-T) = 0.$$

Так как $T_1 = T + dT$, то отсюда находим:

$$F ds + dT = 0,$$

или

$$F + \frac{dT}{ds} = 0. \quad (1)$$

Равенство (1) выражает дифференциальное уравнение равновесия нити в векторной форме.

Представим это уравнение в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$. Так как косинусы углов, которые касательная к кривой в точке $a(x, y, z)$ образует с осями координат, равны

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

то

$$T_x = T \frac{dx}{ds}, \quad T_y = T \frac{dy}{ds}, \quad T_z = T \frac{dz}{ds}.$$

Тогда, проектируя обе части равенства (1) на оси координат, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + F_x &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + F_y &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + F_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{ds} \frac{dx}{ds} + T \frac{d^2x}{ds^2} + F_x &= 0, \\ \frac{dT}{ds} \frac{dy}{ds} + T \frac{d^2y}{ds^2} + F_y &= 0, \\ \frac{dT}{ds} \frac{dz}{ds} + T \frac{d^2z}{ds^2} + F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Этими уравнениями обычно и пользуются при решении конкретных задач.

Найдем теперь уравнения равновесия нити в проекциях на оси построенного в точке a естественного трехгранника (см. рис. 58). Обозначим орты касательной, главной нормали и бинормали соответственно через τ^0 , n^0 и b^0 . Тогда $T = T\tau^0$ и мы получим:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d}{ds}(T\tau^0) = \frac{dT}{ds}\tau^0 + T\frac{d\tau^0}{ds}.$$

Но

$$\frac{d\tau^0}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}n^0 = \frac{n^0}{\rho},$$

где ρ есть радиус кривизны кривой в точке a ; следовательно,

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{ds}\tau^0 + T\frac{n^0}{\rho}$$

и уравнение равновесия (1) дает:

$$F + \frac{dT}{ds}\tau^0 + \frac{T}{\rho}n^0 = 0. \quad (4)$$

Так как $F = F_\tau\tau^0 + F_n n^0 + F_b b^0$, то равенство (4) можно представить в виде

$$\frac{dT}{ds}\tau^0 + T\frac{n^0}{\rho} = -F_\tau\tau^0 - F_n n^0 - F_b b^0.$$

Отсюда получаем следующие уравнения равновесия нити в проекциях на оси естественного трехгранника:

$$\frac{dT}{ds} = -F_\tau, \quad \frac{T}{\rho} = -F_n, \quad F_b = 0. \quad (5)$$

Из уравнений (5) видно, что производная от натяжения нити по дуге равна взятой с обратным знаком проекции действующей силы на касательную, а произведение натяжения нити в данной точке на кривизну той кривой, по которой нить располагается в равновесии, равняется взятой с обратным знаком проекции силы на главную нормаль (под силой всюду понимается сила, отнесенная к единице длины нити). Из равенства же $F_b = 0$ следует, что при равновесии нить располагается так, что проекция действующей силы на бинормаль есть нуль; другими словами, при равновесии нити действующая сила лежит в соприкасающейся плоскости кривой, по которой располагается нить.

3. Случай параллельных сил. Пусть силы, действующие на нить, параллельны, т. е. $F = F F^0$, где $F^0 = \text{const}$; следовательно, при переходе от точки к точке сила изменяется только по модулю. Дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{dT}{ds} + F = 0 \quad (6)$$

преобразуем, умножая его векторно на единичный вектор F^0 ; получим:

$$\frac{dT}{ds} \times F^0 + F \times F^0 = 0.$$

Второй член равен нулю, так как перемножаемые векторы коллинеарны; следовательно,

$$\frac{dT}{ds} \times F^0 = 0$$

или, так как $F^0 = \text{const}$,

$$\frac{d}{ds}(T \times F^0) = 0,$$

откуда

$$T \times F^0 = \text{const}.$$

Это означает, что нить располагается в одной плоскости, параллельной силам.

Возьмем теперь в плоскости нити направление h^0 , перпендикулярное к F^0 . Умножив обе части равенства (6) скалярно на h^0 , получим:

$$\frac{dT}{ds} \cdot h^0 + F \cdot h^0 = 0.$$

Скалярное произведение $F \cdot h^0 = 0$, так как, по условию, векторы F и h^0 взаимно перпендикулярны; следовательно,

$$\frac{dT}{ds} \cdot h^0 = 0.$$

Но так как $h^0 = \text{const}$, то

$$\frac{dT}{ds} \cdot h^0 = \frac{d}{ds}(T \cdot h^0) = 0,$$

откуда

$$T \cdot h^0 = \text{const}.$$

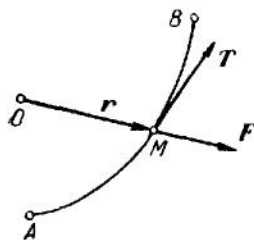


Рис. 307.

Следовательно, проекция натяжения нити на направление, перпендикулярное к силам, есть величина постоянная.

4. Случай центральных сил. Найдем фигуру равновесия идеальной нити под действием центральных сил, т. е. таких, направление которых проходит через одну точку O (рис. 307).

Взяв начало в центре сил O , умножим основное уравнение равновесия (1) векторно на векторную координату r точки M нити; получим:

$$\frac{dT}{ds} \times r + F \times r = 0.$$

В случае центральных сил векторы F и r коллинеарны, поэтому $F \times r = 0$ и, следовательно,

$$\frac{dT}{ds} \times r = 0. \quad (7)$$

Но

$$\frac{dT}{ds} \times r = \frac{d}{ds} (T \times r) - T \times \frac{dr}{ds}.$$

Так как $|dr| = ds$, то

$$\frac{dr}{ds} = \tau^0,$$

где τ^0 есть единичный вектор касательной. Поэтому, учитывая, что векторы T и τ^0 коллинеарны, получим:

$$T \times \frac{dr}{ds} = 0.$$

Следовательно, условие равновесия (7) примет вид

$$\frac{d}{ds} (T \times r) = 0,$$

или, интегрируя,

$$T \times r = \text{const.}$$

Таким образом, под действием центральных сил нить расположится по плоской кривой, плоскость которой проходит через центр сил.

5. Случай потенциальных сил. Пусть сила F имеет потенциал, т. е.

$$F = \text{grad } U,$$

где потенциальная функция U , как и сила F , отнесена к единице длины нити. Тогда основное уравнение (1) примет вид

$$\frac{dT}{ds} + \text{grad } U = 0.$$

Умножив обе части этого уравнения скалярно на единичный вектор касательной τ^0 , получим:

$$\frac{dT}{ds} \cdot \tau^0 + \text{grad } U \cdot \tau^0 = 0. \quad (8)$$

Но

$$\frac{dT}{ds} \cdot \tau^0 = \frac{d}{ds} (T \cdot \tau^0) - T \cdot \frac{d\tau^0}{ds}$$

или

$$\frac{dT}{ds} \cdot \tau^0 = \frac{d}{ds} (T \cdot \tau^0), \quad (9)$$

поскольку векторы $\mathbf{T} = T \boldsymbol{\tau}^0$ и $d\boldsymbol{\tau}^0$ взаимно перпендикулярны. На основании равенства (9) условие равновесия (8) примет вид

$$\frac{d}{ds} (T \cdot \boldsymbol{\tau}^0) + \text{grad } U \cdot \boldsymbol{\tau}^0 = 0. \quad (10)$$

Так как $\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$, а $\boldsymbol{\tau}^0 = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j} + \frac{dz}{ds} \mathbf{k}$, то

$$\text{grad } U \cdot \boldsymbol{\tau}^0 = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{dU}{ds}.$$

Кроме того, $T \cdot \boldsymbol{\tau}^0 = T$ и уравнение (10) принимает вид

$$\frac{dT}{ds} + \frac{dU}{ds} = 0 \quad \text{или} \quad d(T + U) = 0,$$

откуда имеем:

$$T + U = \text{const.} \quad (11)$$

Равенство (11) есть интеграл уравнения (8), т. е. интеграл основного уравнения (1) при условии существования потенциала сил.

6. Цепная линия. Найдем форму кривой, по которой расположится однородная идеальная нить в поле тяжести (рис. 308). Пусть вес единицы длины нити равен γ ; так как нить однородна, то $\gamma = \text{const}$. Вследствие того, что нить находится под действием параллельных сил, каковыми являются силы тяжести, фигура равновесия нити будет плоской кривой, лежащей в вертикальной плоскости; примем эту плоскость за плоскость xu , причем ось y направим вертикально вверх. Тогда, поскольку в данном

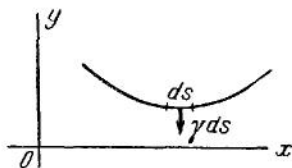


Рис. 308.

случае $F_x = 0$, $F_y = -\gamma$, уравнения равновесия нити (2) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) &= \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Из первого уравнения следует, что

$$T \frac{dx}{ds} = T_0 = \text{const}, \quad (13)$$

т. е. проекция натяжения на ось x есть величина постоянная. Из (13) имеем:

$$T = T_0 \frac{ds}{dx}.$$

Подставляя это выражение T во второе уравнение системы (12), получим:

$$\frac{d}{ds} \left(T_0 \frac{ds}{dx} \frac{dy}{ds} \right) = \gamma,$$

или

$$d \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) = \gamma ds.$$

Но

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

Следовательно,

$$d \left(T_0 \frac{dy}{dx} \right) = \gamma \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx. \quad (14)$$

Для интегрирования полагаем $\frac{dy}{dx} = p$; тогда уравнение (14) примет вид

$$T_0 dp = \gamma \sqrt{1 + p^2} dx.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\gamma}{T_0} dx,$$

или, полагая $\frac{T_0}{\gamma} = a$,

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{dx}{a}.$$

Интегрируя, найдем

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = \frac{x}{a} + c_1.$$

Положим, что при $p = \frac{dy}{dx} = 0$ $x = 0$, т. е. проведем ось y через ту точку кривой, где касательная параллельна оси x . При этом условии $c_1 = 0$, и мы будем иметь:

$$p + \sqrt{1 + p^2} = e^{\frac{x}{a}}.$$

Для определения p возьмем обратную величину

$$-p + \sqrt{1 + p^2} = e^{-\frac{x}{a}}$$

и вычтем из первого выражения второе. Получим:

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right) = \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Так как $p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}$, то

$$dy = \operatorname{sh} \frac{x}{a} dx,$$

откуда, интегрируя, найдем:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + c_2.$$

Пусть при $x=0$ $y=a$; тогда, так как $\operatorname{ch} 0 = 1$, $c_2 = 0$ и

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad (15)$$

т. е. однородная идеальная нить расположится в однородном поле тяжести по цепной линии (рис. 309).

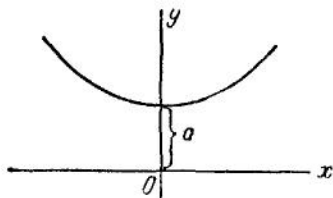


Рис. 309.

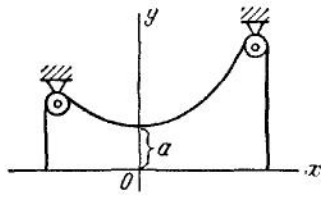


Рис. 310.

Так как силы тяжести имеют потенциал $U = -\gamma y$, то в этом случае, согласно (11), $T + U = \text{const.}$ или

$$T - \gamma y = T_0 - \gamma a,$$

но поскольку $\frac{T_0}{\gamma} = a$, то $T_0 - \gamma a = 0$ и, следовательно,

$$T = \gamma y. \quad (16)$$

Итак, натяжение в каждой точке тяжелой однородной нити равно весу отрезка той же нити, длина которого равна ординате этой точки.

Из этого результата следует, в частности, что нить, перекинута через два лишенных трения блока (рис. 310), будет в равновесии тогда, когда свободные концы ее опустятся до оси x .

Примечание. Галилей предполагал, что тяжелая однородная нить располагается в поле тяжести по параболе. Это предположение с известной точностью оправдывается, если $x < a$. В самом деле,

$$e^{\frac{x}{a}} = 1 + \frac{x}{a} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots,$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = 1 - \frac{x}{a} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{x}{a} \right)^3 + \dots$$

отсюда

$$\frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = \operatorname{ch} \frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{x}{a} \right)^4 + \dots$$

следовательно, уравнение цепной линии принимает вид

$$y = a \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{a^4} + \dots \right).$$

Если $x < a$, то, удерживая члены до второго порядка включительно, получим уравнение

$$y - a = \frac{1}{2} \frac{x^2}{a},$$

т. е. уравнение параболы.

7. Параболическая нить. Пусть нить находится под действием непрерывной вертикальной нагрузки, равномерно распределенной по длине проекции нити на горизонтальную ось ab и приложенной во всех точках нити. Такой случай нагрузки встречается в висячих мостах. Найдем форму кривой, по которой расположится нить при этой нагрузке (рис. 311).

Так как силы, действующие на нить, параллельны, то нить расположится в вертикальной плоскости xu . Направим ось x горизонтально, а ось y вертикально вверх. Тогда на элемент нити ds будет действовать сила, равная γdx , где γ есть нагрузка, приходящаяся на единицу длины ab . Поэтому в данном случае $F = \frac{\gamma dx}{ds}$ и уравнения равновесия нити (2) примут вид

$$d \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

$$d \left(T \frac{dy}{ds} \right) - \gamma dx = 0.$$

Из первого уравнения имеем, как и в предыдущем случае:

$$T \frac{dx}{ds} = T_0 = \text{const},$$

откуда

$$T = T_0 \frac{ds}{dx}.$$

Подставляя это значение T во второе уравнение, получим:

$$d \left(T_0 \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} \right) = \gamma dx,$$

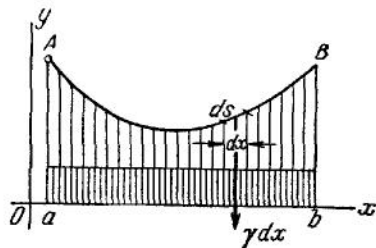


Рис. 311.

или

$$T_0 \frac{d^2 y}{dx^2} = \gamma.$$

Полагая $\frac{T_0}{\gamma} = a$, будем иметь:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{a},$$

откуда, интегрируя, найдем:

$$y = \frac{x^2}{2a} + c_1 x + c_2,$$

где c_1 и c_2 суть постоянные интегрирования. Отсюда следует, что в этом случае нить расположится по параболе, ось которой вертикальна.

РАЗДЕЛ III ДИНАМИКА

ГЛАВА ШЕСТАЯ ДИНАМИКА ТОЧКИ

§ 32. Дифференциальные уравнения движения и решение задач динамики точки

1. Основной закон динамики. Задачи динамики точки. Динамика представляет собой часть кинетики, посвященную изучению движения материальных тел (или вообще механических систем) в зависимости от действующих на них сил. Движение тела определяется движением всех материальных точек (или частиц) его составляющих; поэтому естественно начать изучение динамики с изучения движения материальной точки. Как указывалось ¹⁾, под материальной точкой мы понимаем тело столь малых размеров, что различием в движении его частиц можно пренебречь. Материальную точку можно рассматривать как точку (геометрическую), имеющую массу. В дальнейшем часто для краткости материальную точку будем называть просто точкой.

Основным законом динамики является второй закон Ньютона: *производная по времени от количества движения материальной точки равна действующей на нее силе*, т. е.

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = F. \quad (1)$$

Считая массу постоянной, можно представить предыдущее уравнение в виде

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = F \quad \text{или} \quad m\boldsymbol{\omega} = F, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ есть ускорение точки. Отсюда вторая формулировка закона: *произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на точку силе*. Эта формулировка второго закона Ньютона предполагает, что масса движущейся точки постоянна.

¹⁾ См. введение в кинетику (§ 14), являющееся одновременно введением в динамику; в этом введении рассмотрены понятия силы и массы, изложены законы (аксиомы) динамики и даны основные сведения о применяемых в механике системах единиц

Задачами динамики точки являются:

1) зная закон движения материальной точки, определить, под действием какой силы такое движение может происходить, и 2) зная действующие на материальную точку силы, а также ее начальное положение и начальную скорость, определить закон движения точки. Вторая задача является в динамике основной.

2. Дифференциальные уравнения движения точки. Задачи динамики точки решаются с помощью соответствующих дифференциальных уравнений, связывающих координаты движущейся точки с действующими на нее силами. Эти уравнения получаются из второго (основного) закона динамики. Представим уравнение (2), выражающее второй закон Ньютона, в виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (3)$$

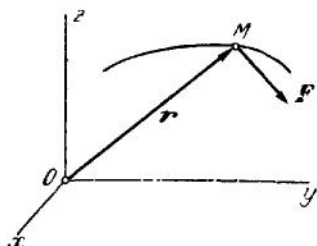


Рис. 312.

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$ (рис. 312), $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_k$ — равнодействующая приложенных к точке сил. Уравнение (3)

есть дифференциальное уравнение движения свободной материальной точки в векторной форме.

Проектируя обе части равенства (3) на оси $Oxyz$, получим дифференциальные уравнения движения свободной материальной точки в прямоугольных декартовых координатах:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Дифференциальные уравнения движения могут составляться также в любых криволинейных координатах. Такие уравнения будут рассмотрены в § 40. Иногда пользуются уравнениями в проекциях на оси естественного трехгранника. Проектируя обе части равенства (2) на касательную τ , главную нормаль n и бинормаль b и учитывая, что $\omega_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$, $\omega_n = \frac{v^2}{\rho}$, где ρ — радиус кривизны траектории и $\omega_b = 0$, будем в этих осях иметь:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = F_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_n, \quad 0 = F_b. \quad (5)$$

Последнее уравнение показывает, что траектория движущейся под действием силы F свободной точки такова, что соприкасающаяся плоскость всегда содержит в себе силу F .

3. Решение первой задачи динамики. Эта задача состоит в том, чтобы, зная закон движения точки, т. е. кинематические уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (6)$$

найти действующую силу, т. е. F_x , F_y , F_z . Задача, как видим, легко решается с помощью уравнений (4) и сводится к вычислению вторых производных по времени от заданных функций (6).

Пример. Пусть точка массы m движется по закону, определяемому уравнениями

$$x = a \sin kt, \quad y = b \cos kt, \quad z = 0. \quad (a)$$

Очевидно, траекторией точки является эллипс с полуосями a и b . Из уравнений (4) находим, что проекции действующей на движущуюся точку силы равны

$$F_x = m\ddot{x} = -mk^2a \sin kt, \quad F_y = m\ddot{y} = -mk^2b \cos kt, \quad F_z = 0.$$

Исключая отсюда с помощью уравнений движения параметры a и b , получим:

$$F_x = -mk^2x, \quad F_y = -mk^2y \quad \text{или} \quad F = -mk^2r. \quad (6)$$

Последний результат дает закон изменения силы, под действием которой точка может описывать любой из эллипсов семейства (а). Как видим, такое движение возможно под действием центральной силы, направленной в центр эллипса и изменяющейся пропорционально расстоянию точки от этого центра.

4. Решение второй (основной) задачи динамики. Эта задача состоит в том, чтобы, зная действующую силу F , найти закон движения точки, т. е. кинематические уравнения (6). Сила F может вообще зависеть от времени, от положения точки в пространстве и от скорости ее движения¹⁾, т. е.

$$F | t, r, v,$$

а следовательно,

$$F_x, F_y, F_z | t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z},$$

где x, y, z суть координаты точки; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ — проекции ее скорости.

¹⁾ На практике примером силы, зависящей от времени, может служить периодически изменяющаяся сила, вызывающая колебания (вибрации) частей двигателя с плохо центрированным валом; примером силы, зависящей от положения точки, является ньютонова сила тяготения, или упругая сила пружины, а пример сил, зависящих от скорости движения, дают силы сопротивления среды (воздуха, воды и др.).

Поэтому дифференциальные уравнения (4) будут в общем случае иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Правые части этих уравнений будем считать однозначными и конечными функциями указанных аргументов (за исключением, быть может, конечного числа особых точек).

Нахождение закона движения данной точки сводится к интегрированию системы (7), т. е. системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых неизвестными функциями являются координаты движущейся точки x , y , z , а аргументом — время t . Проинтегрировав эту систему дифференциальных уравнений, получим x , y , z в функциях времени и шести произвольных постоянных, т. е. найдем общее решение (общие интегралы) системы (7) в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ y &= y(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ z &= z(t, c_1, c_2, \dots, c_6). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Наличие в правых частях уравнений (8) произвольных постоянных указывает на то, что под действием данной силы точка может совершать не какое-то вполне определенное движение, а целый класс движений, имеющих разные законы при разных значениях постоянных c_1, c_2, \dots, c_6 .

Физически этот результат объясняется тем, что точка, на которую начинает действовать некоторая сила, будет двигаться по-разному в зависимости от так называемых начальных условий, т. е. от начального положения и начальной скорости этой точки. Например, движение свободной материальной точки под действием силы тяжести может быть прямолинейным или криволинейным в зависимости от направления ее начальной скорости.

Чтобы сделать соответствующую задачу динамики определенной, надо, кроме действующих сил, задать начальные условия, т. е. для некоторого момента времени $t = t_0$ (начальный момент) задать:

$$\begin{aligned} &\text{начальное положение точки } x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 \\ &\text{и начальную скорость точки } \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0. \end{aligned}$$

По этим начальным условиям определяются постоянные интегрирования c_1, c_2, \dots, c_6 . Для этого, взяв производные по времени от уравнений (8), находим проекции скорости:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ \dot{y} &= \dot{y}(t, c_1, c_2, \dots, c_6), \\ \dot{z} &= \dot{z}(t, c_1, c_2, \dots, c_6). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Подставив затем в уравнения (8) и (9) начальные данные, получим шесть алгебраических уравнений, которые будут содержать слева данные величины $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, а справа — данную величину t_0 и искомые постоянные c_1, c_2, \dots, c_6 . Решая эту систему уравнений, мы можем найти из нее значения постоянных интегрирования, соответствующие заданным начальным условиям, т. е. найти

$$c_k = f_k(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (10)$$

Последнее следует из того, что функциональный определитель системы

$$\Delta = \frac{\partial (x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)}{\partial (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6)}$$

не равен нулю, так как при $\Delta = 0$ начальное положение и начальная скорость точки, друг от друга не зависящие, оказались бы связанными некоторым соотношением.

Заменив теперь в уравнениях (8) все c_k их значениями из равенств (10), мы получим частное решение системы дифференциальных уравнений (7), удовлетворяющее заданным начальным условиям, в виде

$$\left. \begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Уравнения (11) и определяют закон движения точки под действием заданных сил при данных начальных условиях, т. е. дают решение соответствующей задачи динамики. Конкретные примеры отыскания таких решений будут рассмотрены в §§ 34—37.

Решение основной задачи динамики можно еще свести к отысканию *первых интегралов* системы дифференциальных уравнений (7), т. е. соотношений вида

$$\Phi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, c) = 0$$

или

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = c, \quad (12)$$

которые в силу уравнений (7) имеют место при любых начальных условиях и дают связь между временем, координатами точки, ее скоростью и произвольной постоянной.

Если общее решение системы (7) известно, т. е. известны уравнения (8) и (9), то, разрешая их относительно произвольных постоянных c_k , можно получить шесть первых интегралов уравнений движения

$$f_k(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (12')$$

Наоборот, определив каким-либо путем шесть независимых между собой первых интегралов, мы можем получить из них общее решение уравнений движения в виде (8). Отыскание первых интегралов имеет еще то важное значение, что для решения ряда конкретных задач механики оказывается достаточным найти только некоторые из этих интегралов (иногда даже один), что существенно упрощает процесс решения.

Во многих случаях первые интегралы уравнений движения могут определяться из так называемых общих теорем динамики, которые для точки являются следствием основного закона (2). К рассмотрению этих теорем мы сейчас и перейдем.

§ 33. Общие теоремы динамики точки

1. Теорема об изменении количества движения точки. Количеством движения точки называется, как известно, величина $m\mathbf{v}$, равная произведению массы точки на вектор ее скорости. Основной закон динамики можно представить в виде

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (1)$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\frac{d(m\dot{x})}{dt} = F_x, \quad \frac{d(m\dot{y})}{dt} = F_y, \quad \frac{d(m\dot{z})}{dt} = F_z. \quad (1')$$

Умножая обе части равенства (1) на dt , получим:

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} dt. \quad (2)$$

Величина $d\mathbf{S} = \mathbf{F} dt$ называется *элементарным импульсом силы*. Равенство (2) выражает следующую теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: *дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы*¹⁾.

¹⁾ Если на точку действует несколько сил, то под «силой», здесь и всюду далее будем понимать равнодействующую приложенных сил.

Проинтегрируем уравнение (2), беря при этом справа определенный интеграл от некоторого начального момента t_0 до произвольного момента времени t ; получим:

$$mv = \int_{t_0}^t F dt + c.$$

Примем в качестве начальных условий, что при $t = t_0$ $v = v_0$. Подставляя эти условия в полученное равенство, найдем, что $c = mv_0$, и окончательно будем иметь:

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^t F dt \quad (3)$$

или

$$mv - mv_0 = S, \quad (3')$$

где величина

$$S = \int_{t_0}^t F dt \quad (4)$$

называется *импульсом силы* за конечный промежуток времени $t - t_0$.

Равенство (3) выражает теорему об изменении количества движения точки в конечной (интегральной) форме: *изменение количества движения точки за некоторый конечный промежуток времени равняется импульсу действующей силы за тот же промежуток времени.*

В проекциях на оси координат равенство (3) дает три скалярных уравнения:

$$m\dot{x} - m\dot{x}_0 = S_x, \quad m\dot{y} - m\dot{y}_0 = S_y, \quad m\dot{z} - m\dot{z}_0 = S_z, \quad (5)$$

где

$$S_x = \int_{t_0}^t F_x dt, \quad S_y = \int_{t_0}^t F_y dt, \quad S_z = \int_{t_0}^t F_z dt \quad (6)$$

— проекции импульса на оси координат.

Если сила действует в течение очень малого промежутка времени τ , то

$$mv - mv_0 = \int_0^{\tau} F dt,$$

или, по теореме о среднем значении интеграла, имеем:

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \tau \mathbf{F}^*,$$

$$\text{где } \mathbf{F}^* = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \mathbf{F} dt.$$

Предположим, что при бесконечно малом τ количество движения изменяется на конечную величину. Для того чтобы $\tau \mathbf{F}^*$ было конечной величиной при бесконечно малом τ , необходимо, чтобы сила \mathbf{F}^* была бесконечно велика (порядка $\frac{1}{\tau}$). Отсюда следует, что бесконечно большая сила, действующая на материальную точку в течение бесконечно малого промежутка времени, изменяет количество движения точки на конечную величину. Такая сила называется *ударной силой*, а самое явление носит название *удара*.

Рассмотрим случай, когда теорема об изменении количества движения дает первые интегралы уравнений движения точки.

а) Пусть $\mathbf{F} = 0$; тогда из уравнения (2) сразу находим векторный интеграл

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (7)$$

или, в проекциях на оси, три скалярных первых интеграла

$$\dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = c_2, \quad \dot{z} = c_3. \quad (7')$$

Этот результат выражает тот факт, что при отсутствии силы свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно, т. е. по инерции (здесь, как и везде ранее, движение рассматривается по отношению к инерциальной системе отсчета).

б) Пусть на точку действует сила постоянного направления, например параллельная все время оси z . Тогда $F_x = 0$, $F_y = 0$ и теорема (2) дает, очевидно, два первых интеграла:

$$\dot{x} = c_1, \quad \dot{y} = c_2. \quad (8)$$

Геометрически эти интегралы означают, что траекторией точки в данном случае будет плоская кривая, лежащая в плоскости, параллельной оси z , т. е. линии действия силы. В самом деле, из равенств (8) имеем $c_1 \dot{y} = c_2 \dot{x}$ или $c_1 dy - c_2 dx = 0$, откуда, интегрируя, найдем:

$$c_1 y - c_2 x = \text{const}. \quad (9)$$

Но уравнение (9) есть уравнение плоскости, параллельной оси z , т. е. силе. Так как координаты x и y точки все время удовлетворяют этому уравнению, то, следовательно, точка действительно движется в этой плоскости.

в) Если сила все время перпендикулярна к какой-либо оси, например оси x , то $F_x = 0$ и теорема (2) дает один первый интеграл

$$\dot{x} = c_1, \quad (10)$$

т. е. движение точки при этом происходит так, что проекция ее скорости на ось, перпендикулярную к силе, остается величиной постоянной.

В случаях, отличных от рассмотренных, для получения из теоремы об изменении количества движения первых интегралов надо вычислить импульс \mathbf{S} или его проекции S_x, S_y, S_z . Поскольку вообще $F = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$, то, как видно из равенства (6), для вычисления импульса надо знать $x(t), y(t), z(t)$, т. е. общее решение уравнений движения точки. Но если известно общее решение, то использование уравнений (3) или (5) для отыскания первых интегралов утрачивает смысл.

Однако если действующая сила постоянна ($F = \text{const}$) или зависит только от времени, т. е. $F = F(t)$, то интеграл (4) непосредственно вычисляется и теорема дает один векторный или, в проекциях на оси координат, три скалярных первых интеграла уравнений движения точки. Эти первые интегралы выражаются равенствами (3) или (5), где стоящие справа импульсы \mathbf{S} или S_x, S_y, S_z будут (после вычисления соответствующих определенных интегралов) известными функциями времени.

Примеры 1. Рассмотрим точку, которая движется вблизи земной поверхности в безвоздушном пространстве под действием только силы тяжести $P = mg$. Так как сила F постоянно направлена по вертикали вниз, то мы заключаем (согласно случаю б), что траектория точки будет плоской кривой, лежащей в вертикальной плоскости. Проводя в этой плоскости оси Oxy (Ox горизонтально, Oy по вертикали вверх), будем иметь $P_x = 0$; следовательно, здесь имеет место интеграл (10)

$$\dot{x} = c_1.$$

Далее, так как $P_y = -P = -mg = \text{const}$, то $S_y = -mg(t - t_0)$ и из (5) находим еще один первый интеграл

$$\dot{y} + gt = \dot{y}_0 + gt_0 = c_2.$$

Заметим, наконец, что поскольку траектория точки лежит в плоскости Oxy , то интегралом движения будет также $z = c_3$. Дальнейшее решение этой задачи не вызывает затруднений (см. § 36, п. 1).

2. Точка массы m начинает двигаться из состояния покоя прямолинейно под действием силы, изменяющейся по закону $F = F_0(1 - kt)$. Найти скорость точки в момент, когда сила обращается в нуль, а также определить тот момент времени, отличный от начального, когда скорость точки обращается в нуль.

Направим вдоль траектории точки координатную ось x и будем обозначать $v_x = v$, $S_x = S$. Тогда

$$S = \int_0^t F dt = F_0 \int_0^t (1 - kt) dt = F_0 t \left(1 - \frac{k}{2} t\right).$$

Подставляя это значение S в первое из уравнений (5), т. е. в уравнение $mv_x - mv_{0x} = S_x$, и учитывая что $v_0 = 0$, найдем отсюда

$$v = \frac{F_0}{m} t \left(1 - \frac{k}{2} t\right).$$

Так как $F = 0$ в момент $t_1 = \frac{1}{k}$, то, следовательно, в этот момент $v_1 = \frac{F_0}{2mk}$.

В свою очередь $v = 0$ в момент $t_2 = \frac{2}{k} = 2t_1$.

2. Теорема об изменении момента количества движения точки (теорема моментов) и закон площадей. Возьмем основное уравнение динамики

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}.$$

Умножая векторно обе части этого уравнения на \mathbf{r} , получим:

$$m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (11)$$

но

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \end{aligned}$$

так как $\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$. Отсюда имеем:

$$m \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}),$$

и уравнение (11) окончательно принимает вид

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (12)$$

Величина $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ представляет собой, как известно, момент силы \mathbf{F} относительно центра O (рис. 313). Аналогично величина $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ является моментом количества движения $m\mathbf{v}$ относительно того же центра. Таким образом, уравнение (12) выражает собой следующую теорему об изменении момента количества движения точки: *производная по времени от момента количества движения точки относительно какого-либо центра равна моменту действующей силы относительно того же центра.*

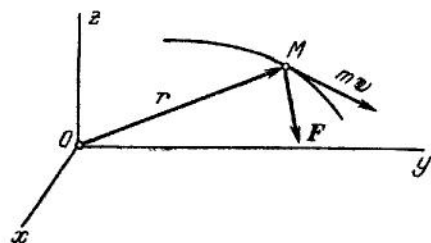


Рис. 313.

В проекциях на оси координат равенство (12) дает три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} m (y\dot{z} - z\dot{y}) &= yF_z - zF_y \equiv \text{мом}_x \mathbf{F}, \\ \frac{d}{dt} m (z\dot{x} - x\dot{z}) &= zF_x - xF_z \equiv \text{мом}_y \mathbf{F}, \\ \frac{d}{dt} m (x\dot{y} - y\dot{x}) &= xF_y - yF_x \equiv \text{мом}_z \mathbf{F}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Рассмотрим случай, когда теорема моментов дает первые интегралы.

а) Пусть $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$; это возможно или когда сила $\mathbf{F} = 0$, или же тогда, когда линия действия силы все время проходит через одну и ту же точку O . Такая сила называется *центральной силой*, а точка O , через которую проходит линия действия силы, — центром силы. В этом случае имеем:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = 0;$$

следовательно,

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}, \quad (14)$$

т. е. момент количества движения в случае центральной силы есть величина постоянная. Равенство (14) можно еще представить в виде

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c} \quad (15)$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\left. \begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_4, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_5, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_6. \end{aligned} \right\} \quad (15')$$

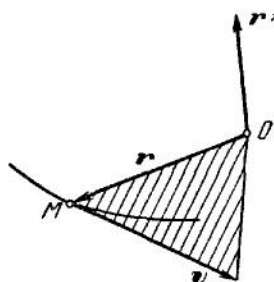


Рис. 314.

Таким образом, при движении под действием центральной силы теорема об изменении момента количества движения дает один векторный или три скалярных первых интеграла уравнений движения.

Этим интегралам можно дать наглядную геометрическую интерпретацию. Так как вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$, перпендикулярный к плоскости, проходящей через векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} , имеет, согласно равенству (15), постоянное направление (рис. 314), то векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} должны все время лежать в одной плоскости, проходящей через центр O . Следовательно, траектория точки, движущейся под действием центральной силы, есть плоская кривая. Это можно доказать еще следующим

образом. Векторный интеграл (15) дает в проекциях на оси координат три скалярных первых интеграла (15'). Умножая равенства (15') соответственно на x , y , z и складывая их почленно, получим, что координаты движущейся точки будут все время удовлетворять уравнению плоскости

$$c_4x + c_5y + c_6z = 0,$$

проходящей через центр силы O , т. е. что траектория точки есть плоская кривая.

Далее, как было установлено в кинематике (см. § 6, п. 6), момент скорости \boldsymbol{v} равен удвоенной секторной скорости; поэтому из (15) имеем, что

$$\text{мом}_O(\boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}| = 2 \frac{d\sigma}{dt} = c, \quad (16)$$

т. е. секторная скорость в данном случае постоянна. Интегрируя уравнение (16), получим:

$$\sigma = \frac{c}{2} t + \sigma_0, \quad (16')$$

т. е. площади, описываемые радиусом-вектором точки, растут пропорционально времени. Итак, в случае движения точки под действием центральной силы траектория точки есть плоская кривая, а площади, описываемые радиусом-вектором, пропорциональны временам. Этот результат выражает так называемый *интеграл* или *закон площадей*.

Покажем справедливость обратного вывода, т. е. что если $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \text{const}$, то сила, действующая на точку, будет центральной. Действительно, пусть $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \text{const}$. Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = 0. \quad (17)$$

Но

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}.$$

Умножая обе части этого равенства на m и учитывая (17), будем иметь:

$$\boldsymbol{r} \times m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = 0.$$

Следовательно, если $\boldsymbol{F} \neq 0$, то направление силы все время должно проходить через точку O , т. е. сила является центральной.

б) Если момент силы относительно какой-либо оси равен нулю (т. е. сила пересекает ось или ей параллельна), то момент скорости

относительно той же оси есть величина постоянная. Действительно, пусть

$$\text{mom}_x \mathbf{F} = 0,$$

тогда на основании уравнений (15') имеем:

$$y\dot{z} - z\dot{y} = \text{mom}_x(\mathbf{v}) = c_4. \quad (18)$$

Таким образом, теорема дает в этом случае один скалярный первый интеграл, который можно еще представить в виде (см. § 6, п. 6)

$$2 \frac{d\sigma_{yz}}{dt} = c_4. \quad (18')$$

Пример. Движение планеты происходит под действием силы притяжения ее к Солнцу, т. е. силы центральной. Следовательно, это движение подчинено закону площадей. Траекторией планеты является эллипс, в одном из фокусов C которого находится Солнце (рис. 315). Найдем, как связаны между собой скорости планеты в перигелии P (точке, ближайшей к Солнцу) и в афелии A (точке, наиболее удаленной от Солнца). Согласно уравнению (16), имеем:

$$\text{mom}_C(\mathbf{v}_P) = \text{mom}_C(\mathbf{v}_A) \text{ или } v_P \cdot CP = v_A \cdot CA,$$

откуда

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{CA}{CP}.$$

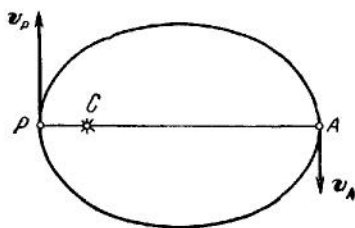


Рис. 315.

В перигелии скорость планеты будет наибольшей, а в афелии — наименьшей.

8. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Скалярная величина $\frac{mv^2}{2}$, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, называется *кинетической энергией* (или, по старой терминологии, *живой силой*) точки.

Найдем, чем обусловлено при движении точки изменение ее кинетической энергии. Для этого обратимся опять к основному уравнению $m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$ и умножим обе его части скалярно на \mathbf{v} . Тогда будем иметь:

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Но так как масса m постоянна, а $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2$, то

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right)$$

и окончательно получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}. \quad (19)$$

Величина $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, т. е. равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения, называется *мощностью*. Таким образом, мы нашли, что производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности.

Обычно уравнение (19) представляют в ином виде, вводя вместо мощности величину, характеризующую действие силы на некотором перемещении и называемую *работой* силы.

Пусть точка, на которую действует сила \mathbf{F} , совершает элементарное перемещение $d\mathbf{r}$ (рис. 316). Тогда элементарной работой силы называют величину, равную скалярному произведению силы \mathbf{F} на элементарное перемещение $d\mathbf{r}$, т. е. ¹⁾

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (20)$$

или

$$d'A = F ds \cos(\widehat{\mathbf{F}d\mathbf{r}}) = F_\tau ds. \quad (20')$$

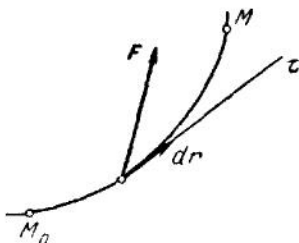


Рис. 316.

Работа силы на конечном перемещении M_0M определяется как сумма соответствующих элементарных работ, т. е. как криволинейный интеграл от элементарной работы, взятый вдоль дуги $\widehat{M_0M}$ траектории

$$A_{\widehat{M_0M}} = \int_{\widehat{M_0M}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{M_0M}} F_\tau ds. \quad (21)$$

Мощность и работа связаны соотношением

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{F \cdot d\mathbf{r}}{dt},$$

т. е. мощность равна работе, совершаемой в единицу времени.

Единицей измерения работы в системе СИ является *джоуль* (1 дж = 1 нм), а в технической системе — 1 кгм. Мощность измеряют соответственно в *ваттах* (1 вт = 1 дж/сек) и в *кгм/сек*. В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила = 75 кгм/сек \approx 736 вт.

¹⁾ О значении символа d' см. сноску на стр. 273.

Обратимся теперь к равенству (19). Умножая обе его части на dt и учитывая, что $\mathbf{v} dt = d\mathbf{r}$, получим следующее выражение теоремы об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (22)$$

т. е. *дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе, действующей на точку силы.*

Если рассмотреть конечное перемещение точки из положения M_0 , где ее скорость равна \mathbf{v}_0 , в положение M , где скорость равна \mathbf{v} (рис. 317), то, беря от обеих частей равенства (22) соответствующие интегралы, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{M_0 M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (23)$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0 M}. \quad (23')$$

Равенство (23) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной (интегральной) форме: *изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно работе действующей силы на том же перемещении.*

Для решения основной задачи динамики доказанная теорема, как и две предыдущие, играет существенную роль в случае, когда она дает первый интеграл уравнений движения точки.

Если $\mathbf{F} = 0$, то из равенства (22) сразу находим $\mathbf{v} = c$ — результат, являющийся следствием известного интеграла (7). Для получения нетривиального интеграла, даваемого теоремой, а именно интеграла энергии, надо рассмотреть ряд вопросов, связанных с теорией силового поля.

4. Работа силы. Силовое поле. Элементарная работа силы определяется равенствами

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F ds \cos(\widehat{\mathbf{F}d\mathbf{r}}) = F_\tau ds. \quad (24)$$

Если силу \mathbf{F} выразить через ее проекции F_x, F_y, F_z на оси координат, а перемещение $d\mathbf{r}$ — через дифференциалы координат x, y, z точки приложения силы, то, раскрывая скалярное произведение $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, мы представим элементарную работу в виде

$$d'A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (25)$$

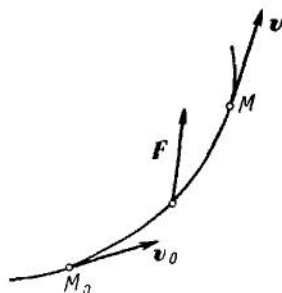


Рис. 317.

Работа силы на конечном перемещении M_0M_1 вычисляется как криволинейный интеграл от элементарной работы, взятый вдоль дуги M_0M_1 траектории

$$A_{\widetilde{M_0M_1}} = \int_{\widetilde{M_0M_1}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widetilde{M_0M_1}} F_x ds \quad (26)$$

или

$$A_{\widetilde{M_0M_1}} = \int_{\widetilde{M_0M_1}} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (27)$$

В общем случае F_x , F_y , F_z зависят от времени t , координат точки x , y , z и ее скорости \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} . Следовательно, для вычисления интеграла (27) надо знать $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, т. е. закон движения точки. Тогда, выражая все переменные через время t , получим под знаком интеграла выражение вида $\Phi(t) dt$ и

$$A_{\widetilde{M_0M_1}} = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t) dt, \quad (28)$$

где t_0 и t_1 — моменты времени, соответствующие положениям M_0 и M_1 движущейся точки.

Таким образом, в общем случае работа силы зависит не только от вида траектории движущейся точки, но и от закона движения этой точки и может быть вычислена лишь тогда, когда этот закон известен.

Для получения из теоремы об изменении кинетической энергии первого интеграла уравнений движения надо, очевидно, найти класс сил, работу которых можно вычислить, не зная закона движения точки, на которую действует сила. Из вида правой части равенства (27) следует, что к такого рода силам могут относиться так называемые позиционные силы, т. е. силы, зависящие только от координат точки, для которых $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ или

$$F_x = F_x(x, y, z), \quad F_y = F_y(x, y, z), \quad F_z = F_z(x, y, z). \quad (29)$$

Область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует определенная сила, являющаяся однозначной, ограниченной и дифференцируемой функцией координат этой точки, называется *силовым полем*. Равенства (29) при условии, что стоящие справа функции удовлетворяют указанным требованиям, определяют стационарное (не изменяющееся со временем) силовое поле.

Направление сил поля характеризуется *силовыми линиями*, т. е. линиями, у которых касательная в каждой точке совпадает

с направлением силы, действующей в этой точке (рис. 318). Дифференциальное уравнение силовой линии будет:

$$\frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)}. \quad (30)$$

Пусть в силовом поле дана какая-нибудь кривая уравнениями $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$. Тогда из трех координат точки, перемещающейся вдоль этой кривой, независимой будет одна. Вводя криволинейную координату q , можно найти $x(q)$, $y(q)$, $z(q)$ и представить интеграл (27) в виде

$$A_{M_0 M_1} = \int_{M_0 M_1} \left[F_x(q) \frac{dx}{dq} + F_y(q) \frac{dy}{dq} + F_z(q) \frac{dz}{dq} \right] dq = \int_{q_0}^{q_1} Q(q) dq, \quad (31)$$

где q_0 и q_1 — значения координаты q , соответствующие точкам M_0 и M_1 , а величина $Q(q)$ называется обобщенной силой. Таким образом, зная $Q(q)$, мы вычислим работу. При этом работа позиционной силы, кроме начального и конечного положения точки, будет зависеть еще и от траектории, так как с изменением траектории меняется вид функций $x(q)$, $y(q)$, $z(q)$.

Если траектория точки будет известна заранее (что, например, может иметь место при несвободном движении), то, вычислив работу, мы найдем из (23) первый интеграл уравнений движения точки.

Заметим, что если известна траектория, то работу силы F можно еще подсчитать в случае, когда $F_\tau = \text{const}$; при этом мы из равенства (26) найдем, что $A_{M_0 M_1} = F_\tau s$, где s — длина дуги $M_0 M_1$. В частности, если сила F будет все время перпендикулярна к перемещению точки, то $F_\tau = 0$ и работа силы на любом перемещении будет равна нулю.

Однако при движении свободной точки ее траектория заранее не известна (она будет зависеть от действующих сил и начальных условий). Поэтому для свободной точки мы в рассмотренных случаях первого интеграла из уравнения (23) не получим.

5. Потенциальное силовое поле. Рассмотрим такой частный вид силового поля, для которого стоящий в равенстве (27) под знаком интеграла дифференциальный трехчлен (элементарная работа) является полным дифференциалом некоторой функции U от координат точки, т. е.

$$F \cdot dr \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x, y, z). \quad (32)$$

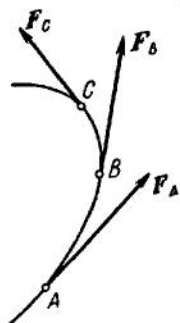


Рис. 318.

Функция $U(x, y, z)$, дифференциал которой равен элементарной работе, называется *потенциальной* или *силовой функцией*. Сила или силовое поле, для которых существует такая функция, называются *потенциальными*.

Так как

$$dU(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz, \quad (33)$$

то, как легко видеть, соотношение (32) эквивалентно трем равенствам:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (34)$$

устанавливающим, что в потенциальном силовом поле проекции силы равны частным производным от силовой функции по соответствующим координатам.

В самом деле, если соотношение (32) выполняется, то, заменяя в нем dU его выражением (33) и учитывая, что dx , dy , dz между собой независимы, мы приходим к равенствам (34). Наоборот, если имеют место равенства (34), то из них вытекает соотношение (32), которое мы получим, заменив в выражении элементарной работы $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ проекции сил их значениями из (34) и учтя равенство (33).

Найдем, каким условиям должны удовлетворять силы поля, чтобы оно было потенциальным. Для этого возьмем от обеих частей равенств (34) частные производные по соответствующим координатам. Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} \text{ и т. д.,}$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Отсюда следует, что условия (35) необходимы для того, чтобы силовое поле, заданное уравнениями (29), было потенциальным. Можно доказать (см., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, гл. II, § 3), что эти условия являются и достаточными.

Представим полученные результаты в терминах векторного анализа, относящихся к любым потенциальным полям. Если проекции некоторого вектора выражаются через функцию $U(x, y, z)$ равен-

ствами вида (34), то такой вектор называют градиентом скалярной функции U , т. е.

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla U, \quad (36)$$

где ∇ (набла) — дифференциальный оператор Гамильтона, представляющий собой символический операторный вектор

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, в потенциальном силовом поле

$$\mathbf{F} = \text{grad } U, \quad (37)$$

Далее, если левые части равенств (35) принять за проекции некоторого нового вектора, то последний будет называться *ротацией* вектора \mathbf{F} ; таким образом,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}, & \mathbf{j}, & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x, & F_y, & F_z \end{vmatrix} \quad (38)$$

или

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (38')$$

Введя это понятие, мы можем условия (35) представить в виде $\text{rot } \mathbf{F} = 0$. Следовательно, чтобы векторная функция $\mathbf{F}(x, y, z)$ имела потенциал или, что то же, была градиентом скалярной функции $U(x, y, z)$, необходимо и достаточно, чтобы ротация \mathbf{F} равнялась нулю.

Если существование силовой функции установлено, то сама функция $U(x, y, z)$ определяется, как это следует из (32), с точностью до произвольной аддитивной постоянной равенством

$$U = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) + \text{const}. \quad (39)$$

Потенциальную функцию с фиксированной аддитивной постоянной называют еще потенциалом.

Рассмотрим некоторые свойства потенциального силового поля. Поверхность

$$U(x, y, z) = c, \quad (40)$$

на которой потенциальная функция U имеет постоянное значение, называется *эквипотенциальной поверхностью* или *поверхностью уровня*. Для данного поля эти поверхности образуют семейство с параметром c ; давая постоянному c разные значения, мы будем

получать разные поверхности уровня, которые в случае, когда функция U однозначна, не могут пересекаться и будут разделять силовое поле на слои (рис. 319). Соответственно этому такое поле называют ламеллярным или слоистым (пластинчатым).

Уравнение силовой линии (30), если учесть равенства (34), можно представить в виде

$$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}.$$

Так как $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ пропорциональны косинусам нормали к поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$, т. е. к поверхности уровня, то отсюда следует, что силовые линии поля ортогональны к эквипотенциальным поверхностям (см. рис. 319), а сила в любой точке поля

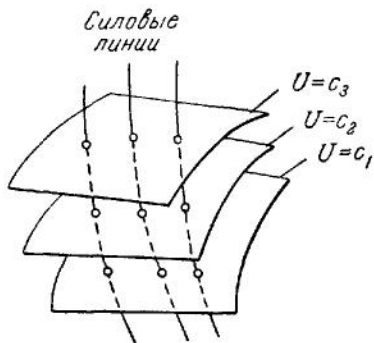


Рис 319

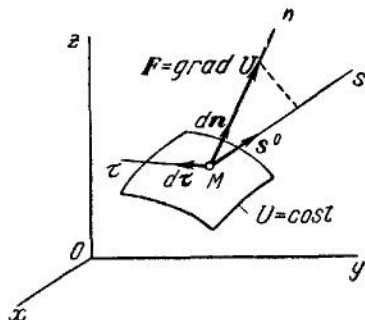


Рис. 320

направлена по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Последний результат вытекает также из соотношения (32) $F \cdot dr = dU$. В самом деле, если рассмотреть элементарное перемещение $dr = d\tau$, направленное по касательной τ к поверхности уровня в некоторой ее точке M (рис. 320), то для этого перемещения, так как на поверхности уровня $U = \text{const}$, будет $F \cdot dr = dU = 0$. Отсюда следует, что сила $F = \text{grad } U$ направлена перпендикулярно к $d\tau$, т. е. по нормали к поверхности уровня. С другой стороны, если рассмотреть перемещение $dr = dn$, направленное в сторону действия силы, то на этом перемещении $F \cdot dn > 0$, а следовательно, и $dU > 0$, т. е. в направлении действия силы U возрастает. Итак, вектор силы F (или $\text{grad } U$) направлен в любой точке поля по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, в сторону возрастания потенциала U .

Найдем теперь выражение для проекции силы, действующей в точке M поля, на какое-нибудь направление s , проходящее через эту точку и характеризующееся единичным вектором \mathbf{s}^0 (см. рис. 320). Так как проекции \mathbf{s}^0 и силы $\mathbf{F} = \text{grad } U$ на оси координат соответственно равны

$$\mathbf{s}^0 \left(\frac{ds}{dx}, \frac{ds}{dy}, \frac{ds}{dz} \right), \quad \mathbf{F} \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right),$$

то

$$F_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}^0 = \text{grad } U \cdot \mathbf{s}^0 = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial U}{\partial s},$$

т. е. проекция силы \mathbf{F} (или $\text{grad } U$) на некоторое направление s равна производной от потенциальной функции U по этому направлению

$$F_s = \text{grad } U \cdot \mathbf{s}^0 = \frac{\partial U}{\partial s}. \quad (41)$$

Если взять проекцию силы (или градиента) на направление положительной нормали к соответствующей поверхности уровня (т. е. нормали, направленной в сторону возрастания U), то мы получим $F_n = F$. Отсюда, согласно (41), будем иметь:

$$F = |\text{grad } U| = \frac{\partial U}{\partial n}, \quad (42)$$

т. е. в каждой точке поля модуль силы (градиента) равен производной от силовой функции по направлению положительной нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Последние результаты можно наглядно представить геометрически, если на векторе $\mathbf{F} = \text{grad } U$, как на диаметре, описать сферу (рис. 321) и через точку M (начало вектора) провести лучок прямых¹⁾. Тогда отсекаемые сферой отрезки этих прямых будут равны проекциям силы (градиента) на соответствующие направления или, что то же, производным от силовой функции по этим направлениям. Отсюда видно, в частности, что сила (или $\text{grad } U$) имеет направление быстрого возрастания функции U .

Пусть $U = c$ некоторая поверхность уровня. Давая c последовательно приращения $dc, 2dc, \dots$, получим семейство поверхностей уровня $U = c, U = c + dc, U = c + 2dc, \dots$ При переходе с любой

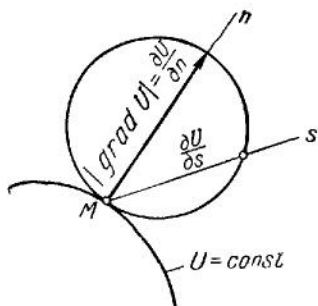


Рис. 321.

¹⁾ На рис. 321 показано сечение поверхности уровня $U = \text{const}$ плоскостью, проходящей через нормаль Mn . Аналогичные сечения изображены на рис. 322 и 323.

из этих поверхностей на соседнюю U получает одно и то же приращение $dU = dc$. Тогда из равенства (42) следует, что сила (или градиент) будет больше в тех точках поля, где расстояние dn между соседними поверхностями уровня меньше (рис. 322), т. е. где поверхности уровня проходят гуще (теорема Кельвина).

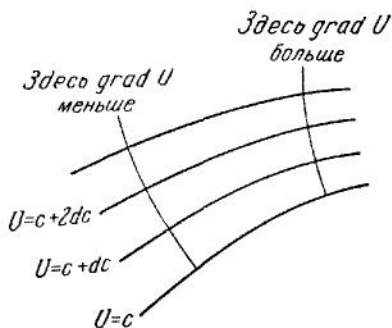


Рис. 322

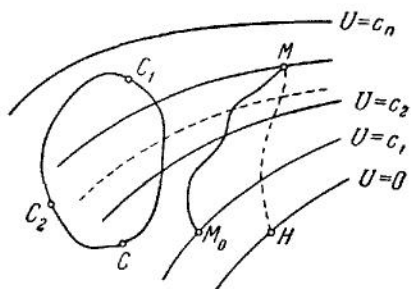


Рис. 323

6. Работа потенциальной силы. Потенциальная энергия. Пусть мы имеем потенциальное силовое поле. Тогда элементарная работа

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = dU,$$

а работа силы на конечном перемещении из точки M_0 в точку M поля (рис. 323) будет:

$$A_{M_0 M} = \int_{M_0 M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0 M} dU = U_M - U_{M_0}. \quad (43)$$

Следовательно, *работа потенциальной силы равна разности значений силовой функции в конечной и начальной точках пути*; она зависит только от положения начальной и конечной точек и не зависит от вида траектории, по которой перемещается точка приложения силы [если, как мы все время предполагаем, функция $U(x, y, z)$ однозначна]. Этот результат выражает основное свойство потенциального силового поля. Более точно можно сказать, что работа потенциальной силы зависит лишь от того, с какой поверхности уровня и на какую перемещается точка.

Если, в частности, перемещение происходит по замкнутому контуру CC_1C_2C , то, как видно из (43), работа потенциальной силы будет равна нулю. Криволинейный интеграл

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

от векторной функции $\mathbf{F}(x, y, z)$ по замкнутому контуру называется *циркуляцией* вектора \mathbf{F} . Таким образом, когда потенциальная функ-

ция однозначна, то циркуляция потенциального вектора равна нулю [вообще циркуляция будет равна нулю по любому замкнутому контуру, который можно стянуть в одну точку, не проходя при этом через особые точки функции $U(x, y, z)$].

В потенциальном силовом поле можно ввести понятие о потенциальной энергии частицы как о запасе работы, которую могут совершить силы поля при перемещении частицы из занимаемого ею положения на какую-нибудь поверхность уровня, условно принимаемую за нулевую. Выберем в равенстве (39) аддитивную постоянную так, чтобы на нулевой поверхности было $U_H = 0$ (см. рис. 323). Тогда по определению потенциальная энергия V в любой точке M поля будет равна работе на перемещении MH или, согласно (43), $V = U_H - U$, где U — значение силовой функции в точке M . Так как $U_H = 0$, то окончательно имеем:

$$V(x, y, z) = -U(x, y, z), \quad (44)$$

т. е. величина потенциальной энергии в любой точке поля равна значению силовой функции в этой точке, взятому с обратным знаком.

7. Интеграл энергии. Если все действующие на материальную точку силы являются потенциальными, то $F \cdot dr = dU = -dV$ и уравнение (22) принимает вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -dV,$$

откуда, интегрируя, находим:

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h, \quad (45)$$

где h — постоянная интегрирования. Равенство (45) дает первый интеграл уравнений движения точки, называемый *интегралом энергии*. Оно выражает собой следующий закон сохранения механической энергии: *при движении точки под действием потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергии точки, т. е. ее полная механическая энергия, остается величиной постоянной*. По этой причине потенциальное силовое поле, для которого имеет место данный закон, называют еще консервативным (от латинского conservare — сохранять).

Значение постоянной h определяется по начальным данным. Если в некоторой точке поля x_0, y_0, z_0 частица имеет начальную скорость v_0 , то

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + V(x_0, y_0, z_0), \quad (45')$$

т. е. постоянная h равна начальной энергии частицы.

При решении задач или непосредственно пользуются равенством (45), или используют теорему кинетической энергии в интегральной форме (23'), вычисляя всякий раз по заданным силам их работу на рассматриваемом перемещении.

Из равенства (45) видно, что при движении в консервативном поле скорость материальной точки является функцией только ее положения. В частности, точка, движущаяся в консервативном поле по замкнутому пути, будет, приходя в данное положение C_1 (см. рис. 323) иметь в нем всегда одну и ту же скорость v_1 , сколько бы циклов (оборотов) точка ни совершила. Отсюда вытекает невозможность построения вечного двигателя (perpetuum mobile), т. е. машины, которая могла бы передавать движение другому объекту (совершать работу) вечно, без притока энергии извне.

В земных условиях на движущееся тело наряду с потенциальными силами неизбежно действуют различные непотенциальные силы в виде сил сопротивления среды, трения и др. Это приводит к тому, что полная механическая энергия точки с течением времени убывает (рассеивается), переходя в соответствии с общим физическим законом сохранения энергии в другие формы энергии, например в тепло. По этой причине указанные силы сопротивления называют еще диссипативными. Пусть, например, точка движется под действием потенциальной силы с потенциалом U в среде, оказывающей сопротивление, пропорциональное скорости точки. Тогда на точку действует еще диссипативная сила $R = -kv$ и по теореме (22), учитывая, что $U = -V$, будем иметь:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dU - kv \cdot dr = -dV - kv \cdot dr.$$

Так как $v \cdot dr = v \cdot v dt = v^2 dt$, то отсюда

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} + V \right) = -kv^2$$

или

$$\frac{dE}{dt} = -2D, \quad (46)$$

где $E = \frac{mv^2}{2} + V$ есть полная механическая энергия точки, а $2D = kv^2$.

Так как $D > 0$, то из равенства (46) видно, что полная механическая энергия точки будет в данном случае с течением времени убывать.

Функцию $D(v)$, численно равную половине механической энергии, убывающей в единицу времени, называют *диссипативной функцией*

или *функцией рассеивания*. Так как в нашем случае $D = \frac{1}{2} kv^2$, то отсюда $\frac{dD}{dv} = kv$, т. е. величина диссипативной силы определяется как производная от диссипативной функции по скорости.

8. Примеры потенциальных силовых полей. В том, что данное силовое поле является потенциальным, можно убедиться или по условиям (35), или установив непосредственно, что элементарная работа сил поля является полным дифференциалом некоторой функции координат точек поля.

1) Рассмотрим силовое поле, в котором проекции силы F на оси координат являются функциями только соответствующей координаты, т. е.

$$F_x = F_x(x), \quad F_y = F_y(y), \quad F_z = F_z(z), \quad (47)$$

где, в частности, правые части могут быть постоянными. Очевидно, что условия (35) в этом случае выполняются и элементарная работа $F_x dx + F_y dy + F_z dz = dU(x, y, z)$,

откуда

$$U = \int F_x(x) dx + \int F_y(y) dy + \int F_z(z) dz + \text{const.} \quad (48)$$

√ 2) Рассмотрим *однородное поле тяжести*. Если вблизи земной поверхности выделить область, размеры которой малы по сравнению с радиусом Земли, то во всех точках этой области можно считать силу тяжести $P = mg$ по модулю и направлению постоянной. Такое силовое поле называется *однородным*. Направляя координатную ось z вертикальновверх (рис. 324), будем иметь:

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

Очевидно, это поле потенциально, так как является частным случаем поля (47). Для него

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -mg dz.$$

Отсюда, интегрируя, получим:

$$U = -mgz + \text{const},$$

или, считая $U = 0$ при $z = 0$,

$$U = -mgz, \quad V = mgz. \quad (49)$$

Поверхностями уровня будут плоскости $z = c$, т. е. горизонтальные плоскости, так как ось z вертикальна. Силы поля направлены, как видим, по нормали к поверхностям уровня в сторону возрастания U .

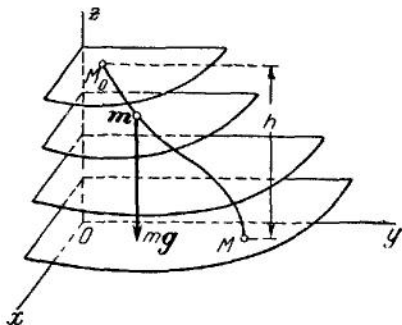


Рис. 324

Работа силы тяжести на перемещении M_0M будет.

$$A_{M_0M} = U_M - U_{M_0} = mg(z_0 - z) = \pm mgh, \quad (50)$$

где $h = |z_0 - z|$ — разность высот точек M_0 и M (знак плюс в последнем равенстве соответствует случаю, когда точка M_0 выше точки M , а знак минус — когда ниже).

Если точка перемещается из положения M_0 с начальной скоростью v_0 , то скорость в любом положении M найдется по теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0M} = mg(z_0 - z),$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)} = \sqrt{v_0^2 \pm 2gh},$$

где знак плюс соответствует случаю, когда точка M ниже точки M_0 .

В частности, если начальная скорость $v_0 = 0$, то точка может двигаться только вниз ($z < z_0$), и мы получим известную формулу Галилея

$$v = \sqrt{2gh}.$$

3) Рассмотрим поле центральной силы, т. е. силы, линия действия которой проходит все время через данный центр O (рис. 325). Пусть при этом величина силы, действующей на движущуюся в этом поле точку

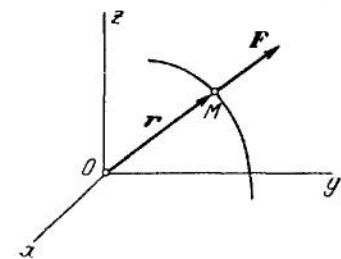


Рис 325.

M , зависит только от расстояния $MO = r$. Тогда

$$\mathbf{F} = F_r(r) \mathbf{r}^0 = F_r(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где F_r — проекция силы на направление радиуса-вектора \mathbf{r} , причем $F_r = F$ для отталкивающей силы и $F_r = -F$ для силы притягивающей. Элементарная работа силы \mathbf{F} будет:

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r(r) \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r} = F_r(r) dr, \quad (51)$$

так как из равенства $r^2 = r^2$, если его продифференцировать, следует, что $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$.

Отсюда можно заключить, что для данного поля существует силовая функция $U(r)$, так как элементарную работу можно представить в виде дифференциала такой функции

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_r(r) dr = dU(r).$$

Интегрируя, найдем потенциальную функцию поля центральной силы:

$$U(r) = \int F_r(r) dr + \text{const.} \quad (52)$$

Выражение $U(x, y, z)$ можно получить, учитывая, что $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Так как при $r = \text{const}$ функция $U(r)$ принимает постоянное значение, то поверхностями уровня в центральном силовом поле будут концентрические сферы с центром в центре сил O . Сила, как видим, здесь также направлена по нормали к поверхностям уровня в сторону возрастания U .

Рассмотрим два частных примера центрального поля.

а) *Квазиупругая сила*. Квазиупругой называют центральную силу, линейно зависящую от r , для которой

$$F_r(r) = -c(r - a), \quad (53)$$

где c и a — положительные константы, причем, в частности, может быть $a = 0$. При $r > a$ квазиупругая сила будет притягивающей, а при $r < a$ — отталкивающей.

Примером такой силы служит упругая сила пружины (пока она подчиняется закону Гука), если один конец пружины закреплен неподвижно в точке O ; при этом $r - a$ будет удлинением (сжатием) пружины, а c — так называемым коэффициентом жесткости.

Из равенства (52), так как $d(r - a) = dr$, найдем, что для квазиупругой силы

$$U = -\frac{c}{2}(r - a)^2 + \text{const.}$$

или, считая, что $U = 0$ при $r = a$, т. е. когда $F = 0$, получим:

$$U = -\frac{c}{2}(r - a)^2, \quad V = \frac{c}{2}(r - a)^2. \quad (54)$$

Работа квазиупругой силы на перемещении из некоторого положения M_0 в положение M_1 будет:

$$A_{M_0 M_1} = U_{M_1} - U_{M_0} = \frac{c}{2} [(r_0 - a)^2 - (r_1 - a)^2]. \quad (55)$$

Эта работа положительна, когда $|r_1 - a| < |r_0 - a|$, т. е. когда точка, на которую действует сила, приближается к поверхности $r = a$, на которой $F = 0$, и отрицательна, когда точка удаляется от этой поверхности. Для пружины $(r_0 - a)$ и $(r_1 - a)$ представляют собой соответственно начальное и конечное удлинение (сжатие) пружины.

Заметим, что рассмотренное силовое поле представляет собой, по существу, сопряжение двух полей, одного в области $r > a$, где сила является притягивающей, и другого в области $r < a$, где сила

будет отталкивающей. Поэтому в нем U (или V) может иметь одинаковые значения на двух разных поверхностях уровня, из которых одна находится в первой, а другая — во второй из указанных областей, например на сферах $r = a + h$ и $r = a - h$, где $h < a$. Физически это означает, что потенциальная энергия пружины, сжатой или растянутой на одну и ту же величину h , одинакова. Отсюда следует также, что в данном поле работа может быть равна нулю при перемещении не только по замкнутому контуру, но и с одной из упомянутых выше сфер $r = a + h$ и $r = a - h$ на другую.

Пример. К концу B_0 вертикальной пружины (рис. 325) подвешивают груз весом P и отпускают без начальной скорости. Пружина в начальный момент не напряжена, а ее жесткость равна c . Пренебрегая массой пружины и всеми сопротивлениями, найти скорость груза, когда он опустится на высоту h .

По теореме об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{B_0B}.$$

На груз действуют две потенциальные силы: сила тяжести P и упругая сила $F = c(r - a)$, где $r = AB$, а $a = AB_0$ — длина ненапряженной пружины. Работа этих сил на перемещении B_0B будет соответственно равна Ph и $-\frac{c}{2}h^2$, так как в данном случае начальное удлинение пружины $(r_0 - a) = 0$, а конечное удлинение $(r_1 - a) = h$. Поскольку $v_0 = 0$, то будем иметь:

Рис. 326

$$\frac{P}{g} \frac{v^2}{2} = Ph - \frac{c}{2} h^2 \quad \text{или} \quad v^2 = gh \left(2 - \frac{c}{P} h \right).$$

Если бы груз, висающий на данной пружине, находился в покое, то он растянул бы пружину на величину δ_0 , называемую *статическим удлинением пружины*. Так как при равновесии будет $P = F_{ст} = c\delta_0$, то

$$\delta_0 = \frac{P}{c}.$$

Введя эту величину в полученный результат, найдем окончательно, что

$$v = \sqrt{gh \left(2 - \frac{h}{\delta_0} \right)}.$$

Так как подкоренное выражение не может быть отрицательным, то наибольшее удлинение пружины $h_{\max} = 2\delta_0$, т. е. равно удвоенному статическому удлинению; скорость груза при $h = h_{\max}$ обращается в нуль.

√6) *Сила тяготения.* Действующая на материальную точку сила тяготения будет по закону Ньютона центральной силой, пропорциональной массе m точки и обратно пропорциональной квадрату ее расстояния от притягивающего центра. Следовательно, для этой силы

$$F_r(r) = -\frac{\mu m}{r^2} \quad (56)$$

и из равенства (52) будем иметь:

$$U = \frac{\mu m}{r} + \text{const.},$$

или, полагая, что $U = 0$ при $r = \infty$,

$$U = \frac{\mu m}{r}, \quad V = -\frac{\mu m}{r}. \quad (57)$$

Работа силы тяготения на перемещении из положения M_0 в положение M_1 будет:

$$A_{M_0 M_1} = U_{M_1} - U_{M_0} = \mu m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right). \quad (58)$$

Работа положительна, когда $r_1 < r_0$, т. е. когда точка, на которую действует сила, приближается к притягивающему центру.

Поверхности уровня для любого центрального поля, в том числе и для двух рассмотренных полей, являются сферами. Однако если их построить, меняя U через равные интервалы, т. е. давая U значения $U = c$, $U = 2c$, $U = 3c$ и т. д., то расположение этих сфер для разных центральных полей в соответствии с теоремой Кельвина будет разным; в частности, в поле квазиупругой силы расстояние между поверхностями сфер с удалением от центра O будет убывать (если $a = 0$), а в поле силы тяготения — возрастать.

Пример. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найдем, какую наименьшую направленную вертикально вверх начальную скорость v_0 надо сообщить точке, находящейся на поверхности Земли, чтобы она удалась от этой поверхности на расстоянии H , а также какую скорость будет иметь точка, свободно падающая с высоты H , достигнув поверхности Земли.

Сила земного тяготения определяется равенством (56), где $r = OM$ — расстояние от центра Земли O (рис. 327). Выразим сначала значение постоянной μ поля земного тяготения через ускорение g силы тяжести на земной поверхности и радиус R Земли. Так как на поверхности Земли $r = R$, а $F_r = -mg$, то, подставляя это в равенство (56), получим $mg = \frac{\mu m}{R^2}$, откуда

$$\mu = gR^2. \quad (a)$$

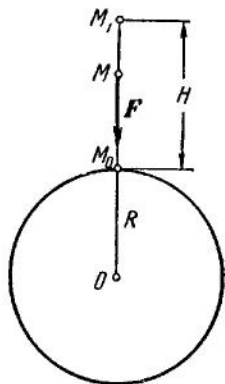


Рис. 327.

По теореме об изменении кинетической энергии будем иметь:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0 M_1}. \quad (6)$$

При движении точки, брошенной из M_0 вертикально вверх, она имеет в наивысшем положении M_1 скорость $v_1 = 0$. Вычисляя работу по формуле (58), где в нашем случае $r_0 = R$, а $r_1 = R + H$, получим:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = \mu m \left(\frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{\mu m H}{R(R+H)}.$$

Заменяя здесь μ его значением (а), найдем окончательно:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}. \quad (в)$$

При падении точки без начальной скорости из положения M_1 в M_0 (см. рис. 327) слагаемые в левой части равенства (б) поменяются местами, но одновременно будет $A_{M_1, M_0} = -A_{M_0, M_1}$. Следовательно, скорость точки, упавшей на Землю с высоты H , также определяется формулой (в).

Рассмотрим два предельных случая.

а) Если H много меньше R , то, деля в подкоренном выражении равенства (в) числитель и знаменатель на R , получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{1+H/R}} \approx \sqrt{2gH}, \quad (г)$$

т. е. приходим в пределе при $H/R \rightarrow 0$ к формуле Галилея.

б) Найдем, при какой начальной скорости v_0 точка может удалиться в бесконечность (или, наоборот, какую скорость будет иметь точка, упавшая на Землю из бесконечности). Деля числитель подкоренного выражения в равенстве (в) на H , получим:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gR}{1+R/H}}. \quad (д)$$

Отсюда, считая $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$, а средний радиус Земли $R \approx 6370 \text{ км}$, получим при $H = \infty$

$$v_0 = \sqrt{2gR} \approx 11,2 \text{ км/сек}. \quad (е)$$

Эта начальная скорость, при которой материальная точка может удалиться неограниченно далеко от центра Земли, называется *второй космической скоростью*, или скоростью освобождения от поля земного тяготения. Одновременно равенство (е) определяет примерную величину скорости, с которой входят в земную атмосферу метеориты.

9. Устойчивость равновесия точки в потенциальном силовом поле. Теорема об изменении кинетической энергии дает возможность определить достаточное условие устойчивости равновесия материальной точки в потенциальном поле сил.

Для равновесия точки необходимо и достаточно, чтобы действующая на нее сила равнялась нулю. Если поле потенциально, то $F = \text{grad } U$ и из условия $F = 0$ следует, что в положении равновесия

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (59)$$

т. е. материальная точка будет находиться в равновесии в тех точках поля, где силовая функция U (или потенциальная энергия $V = -U$) имеет стационарное значение.

Покажем, что если потенциальная энергия в данной точке A поля имеет минимум, т. е. $V_A = V_{\text{min}}$, то равновесие частицы, находящейся в этой точке, будет устойчивым. Так как силовая функция U определяется с точностью до постоянной, то мы всегда можем принять,

что на поверхности уровня, проходящей через точку A , значение $U_A = 0$, а следовательно, и $V_A = 0$. Поскольку в точке A потенциальная энергия имеет минимум и значение V_{\min} выбрано равным нулю, то в некоторой достаточно малой области, содержащей точку A , величина V будет положительна ($V > 0$) и будет по мере удаления от точки A возрастать. Опишем в этой области вокруг точки A сферу радиуса ρ , где ρ — малая величина, отличная от нуля, и сообщим нашей частице некоторую начальную энергию

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + V_0, \quad (60)$$

т. е. сместим частицу из положения A в точку, где $V = V_0 > 0$, и сообщим ей начальную скорость v_0 . Тогда если при данном ρ можно выбрать такое, сколь угодно малое, но не равное нулю значение h , что во все последующее время частица не выйдет за пределы сферы радиуса ρ , то положение равновесия в точке A называется устойчивым (по Ляпунову). Покажем теперь, что если $V_A = V_{\min}$, то равновесие в точке A устойчиво. В самом деле, когда точка, выведенная из состояния равновесия, придет в движение, то для нее, согласно интегралу энергии (45), будет:

$$\frac{mv^2}{2} + V = h \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{2} = h - V,$$

где h — начальная энергия. Допустим, что наименьшее значение, которое величина V принимает на поверхности сферы радиуса ρ , равно V_1 , и примем $h = V_1$. Тогда, поскольку с удалением от точки A значение V возрастает, то если при выбранном h частица могла бы выйти за пределы данной сферы, для нее оказалось бы $V > V_1$, т. е. $V > h$, и кинетическая энергия частицы стала бы отрицательной, что невозможно. Таким образом, мы доказали, что если потенциальная энергия в точке A поля имеет минимум, то равновесие материальной частицы, находящейся в этой точке, будет устойчивым, т. е. доказали достаточность этого условия.

Определение необходимых условий устойчивости равновесия представляет собой задачу, значительно более сложную; в этой части курса мы на ней останавливаться не будем.

Рассмотрим в качестве примера поле квазиупругой силы, для которого, согласно равенству (54), потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{2} c (r - a)^2.$$

Тогда из условия

$$\frac{dV}{dr} = c (r - a) = 0$$

находим, что свободная частица будет в этом поле в равновесии при $r = a$, т. е. в любой точке на поверхности сферы радиуса a . Так как $\frac{d^2V}{dr^2} = c > 0$, то в положении равновесия V имеет минимум и равновесие будет устойчивым.

§ 34. Прямолинейное движение материальной точки

1. Условия прямолинейности движения. Чтобы движение свободной материальной точки было прямолинейным, необходимо и достаточно, чтобы действующая сила имела постоянное направление, а начальная скорость была направлена по силе или равна нулю.

Пусть траектория точки совпадает с осью x , тогда

$$y = z = 0 \quad \text{и} \quad \dot{y} = \dot{z} = 0,$$

т. е. скорость точки во все время движения направлена по оси x , следовательно, и начальная скорость точки должна быть направлена по оси x или равна нулю. Далее, так как $\ddot{y} = \ddot{z} = 0$, то из уравнений движения следует, что

$$F_y = F_z = 0,$$

т. е. что сила должна быть направлена по оси x . Итак, высказанные условия необходимы. Докажем их достаточность.

Пусть сила направлена по оси x , тогда из уравнений движения имеем $\ddot{y} = 0$, $\ddot{z} = 0$ и, интегрируя их, получим:

$$\dot{y} = c_1, \quad \dot{z} = c_2.$$

Если начальная скорость направлена по оси x , то $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, следовательно,

$$\dot{y} = 0, \quad \dot{z} = 0.$$

Интегрируя второй раз, получим $y = c_3$, $z = c_4$. Если в начальный момент точка находилась на оси x , то $c_3 = c_4 = 0$ и

$$y = 0, \quad z = 0,$$

т. е. траекторией точки будет ось x .

Покажем, что если сила — центральная и начальная скорость направлена по силе или равна нулю, то движение прямолинейно.

Возьмем за плоскость движения плоскость Oxy , и пусть O будет центр сил (рис. 328). Так как сила — центральная, то будет иметь место закон площадей, т. е. момент количества движения или момент скорости относительно центра O есть величина постоянная; следовательно,

$$\text{пот}_O(\mathbf{v}) = x\dot{y} - y\dot{x} = c.$$

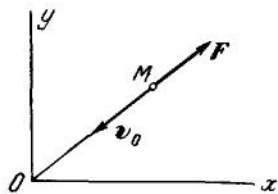


Рис. 328.

Так как начальная скорость проходит через центр сил (или равна нулю), то момент ее будет равен нулю, т. е. в начале движения $c = 0$. Следовательно, $\dot{x}y - y\dot{x} = 0$, или

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{x}}{x}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\ln y = \ln x + \ln c_1,$$

или

$$y = c_1 x,$$

т. е. траектория точки есть прямая, проходящая через центр сил.

2. Дифференциальное уравнение прямолинейного движения. Прямолинейное (вдоль оси x) движение свободной материальной точки определяется одним дифференциальным уравнением второго порядка

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x(t, x, \dot{x}), \quad (1)$$

где сила может быть функцией времени, координаты и скорости. Интегрируя его, получим общее решение

$$\dot{x} = x(t, c_1, c_2); \quad (2)$$

взяв производную по времени, будем иметь:

$$\ddot{x} = \dot{x}(t, c_1, c_2). \quad (3)$$

Определяя из равенств (2) и (3) постоянные интегрирования, получим два первых интеграла:

$$\Phi_1(t, x, \dot{x}) = c_1,$$

$$\Phi_2(t, x, \dot{x}) = c_2.$$

Уравнение (2) определяет целый класс движений, происходящих под действием данной силы F . Для нахождения закона данного движения необходимо задать начальные условия. Пусть

$$\text{при } t = t_0 \left\{ \begin{array}{l} x = x_0, \\ \dot{x} = v_0; \end{array} \right.$$

вставив эти значения в уравнения (2) и (3), будем иметь:

$$x_0 = x(t_0, c_1, c_2), \quad v_0 = \dot{x}(t_0, c_1, c_2).$$

Из этих двух алгебраических уравнений найдем постоянные интегрирования c_1 и c_2 и, подставив их в уравнение (2), получим частное

решение, соответствующее данным начальным условиям, в виде

$$x = x(t, t_0, x_0, v_0). \quad (4)$$

Уравнение (4) и дает искомый закон движения точки.

3. Общие теоремы динамики для прямолинейного движения точки. В ряде случаев первые интегралы уравнения (2) могут быть получены из теорем об изменении количества движения или кинетической энергии (§ 33). Представив уравнение (2) в виде

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x \text{ или } d(mv_x) = F_x dt, \quad (5)$$

получим для прямолинейного движения теорему об изменении количества движения в дифференциальной форме.

Интегрируя уравнение (5) и полагая, что при $t=0$ скорость $v_x = v_{0x}$, найдем выражение той же теоремы в интегральной (конечной) форме:

$$mv_x - mv_{0x} = S_x, \quad (6)$$

где

$$S_x = \int_0^t F_x dt \quad (7)$$

есть проекция импульса равнодействующей приложенных к точке сил на ось x .

Если сила будет функцией одного только времени, т. е. $F_x = F_x(t)$, или когда сила постоянна ($F_x = \text{const}$), импульс S_x непосредственно вычисляется и теорема (6) дает первый интеграл уравнения движения (2).

Вторую теорему можно получить, преобразовав первое из уравнений (5) к аргументу x . Так как

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx},$$

то дифференциальное уравнение прямолинейного движения точки примет вид

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = F_x. \quad (8)$$

Отсюда, так как $v_x^2 = v^2$, получим:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F_x dx. \quad (9)$$

Уравнение (9) выражает для прямолинейного движения теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме; величина $F_x dx$ будет в данном случае элементарной работой равнодействующей приложенных к точке сил.

Интегрируя уравнение (9) и полагая, что при $x = x_0$ скорость $v = v_0$, получим выражение теоремы в интегральной форме

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0M}, \quad (10)$$

где

$$A_{M_0M} = \int_{x_0}^x F_x dx \quad (11)$$

есть работа действующих сил на перемещении из $M_0(x_0)$ в $M(x)$.

В случае, когда сила зависит только от расстояния, т. е. $F_x = F_x(x)$, или постоянна ($F_x = \text{const}$), работа (11) непосредственно вычисляется и теорема (10) дает первый интеграл уравнения движения (2).

Заметим, что если сила постоянного направления зависит только от расстояния, то она будет потенциальной; в этом случае элементарная работа $F_x(x) dx = dU(x)$ и потенциальная функция

$$U(x) = \int F_x(x) dx + \text{const}.$$

4. Интегрирование уравнения прямолинейного движения в некоторых частных случаях. Покажем, что если сила есть функция только одного переменного, то дифференциальное уравнение прямолинейного движения интегрируется методом разделения переменных.

1) *Сила — функция только времени.* Пусть

$$F_x = F_x(t).$$

Тогда теорема об изменении количества движения (6) сразу дает первый интеграл:

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t F_x(t) dt,$$

откуда

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + \frac{1}{m} \int_0^t F_x(t) dt.$$

Интегрируя дальше, получим:

$$x = \int_0^t \left[v_{0x} + \frac{1}{m} \int_0^t F_x(t) dt \right] dt + x_0.$$

2) *Сила — функция только расстояния.* Пусть

$$F_x = F_x(x).$$

Тогда по теореме об изменении кинетической энергии будет:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{x_0}^x F_x(x) dx = f(x),$$

или

$$mv^2 = mv_0^2 + 2f(x).$$

Из этого уравнения, учитывая, что при прямолинейном движении $v_x = \pm v$, находим:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}.$$

Знак перед радикалом определяется по знаку v_x ; разделив переменные, получим:

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2}{m} f(x)}} = dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим x как функцию времени, т. е. закон движения.

3) Сила — функция только скорости. Пусть

$$F_x = F_x(v_x).$$

Тогда из уравнения

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_x(v_x),$$

разделяя переменные, получим:

$$m \frac{dv_x}{F_x(v_x)} = dt.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$m \int_{v_0}^{v_x} \frac{dv_x}{F_x(v_x)} = t - t_0,$$

или

$$\varphi(v_x) = t. \quad (12)$$

Если из этого уравнения можно определить v_x как функцию t , т. е.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \Psi(t),$$

то, интегрируя, найдем:

$$x = \int \Psi(t) dt + c.$$

Если из уравнения (12) нельзя определить v_x как функцию t , то можно применить другой способ интегрирования. Представим дифференциальное уравнение движения в виде (8)

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = F_x(v_x);$$

разделяя переменные, будем иметь:

$$\frac{mv_x dv_x}{F_x(v_x)} = dx,$$

откуда, интегрируя, получим:

$$\chi(v_x) = x - x_0. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (12) и (13) v_x , найдем зависимость x от t :

$$x = f(t),$$

т. е. искомый закон движения.

Из изложенного видно, что, когда сила зависит только от времени t или только от расстояния x , для решения задач можно пользоваться первыми интегралами, которые в этих случаях дают соответственно теоремы об изменении количества движения и кинетической энергии точки. Примеры таких решений рассмотрены в § 33 (п. 1 и п. 8). Если же сила зависит от скорости движения, то общие теоремы первых интегралов не дают, и для решения соответствующей задачи необходимо непосредственно интегрировать дифференциальное уравнение движения. Пример такого случая мы сейчас рассмотрим.

Б. Движение в сопротивляющейся среде.

Пусть в воздухе падает вертикально некоторое тело. На тело будут действовать сила тяжести mg и сила сопротивления воздуха R (рис. 329).

Если ось x направим вертикально вниз и будем рассматривать тело как материальную точку, то уравнение его движения, так как при падении все время $v_x = v$, будет ¹⁾:

$$m \frac{dv}{dt} = mg - R. \quad (14)$$

Закон сопротивления среды довольно сложен, так как сопротивление среды зависит от формы и размеров движущегося тела, от свойств самой среды и от скорости тела относительно среды. Найдено, что при малых скоростях

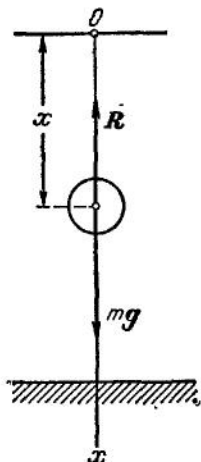


Рис. 329.

¹⁾ Как будет показано в динамике системы, уравнение (14) описывает движение центра тяжести тела.

(до 0,1 м/сек) сопротивление среды можно считать пропорциональным первой степени скорости; при дозвуковых скоростях (примерно до 240 м/сек) сопротивление будет пропорционально второй степени скорости. При больших (околозвуковых и сверхзвуковых) скоростях зависимость сопротивления среды от скорости имеет более сложный характер.

В аэродинамике принято считать:

$$R = \frac{1}{2} c_x \rho S v^2, \quad (15)$$

где ρ — плотность воздуха; S — площадь так называемого миделевого сечения тела (от английского middle — середина), т. е. площадь проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению его скорости (рис. 330); для шара, например, S будет площадь большого

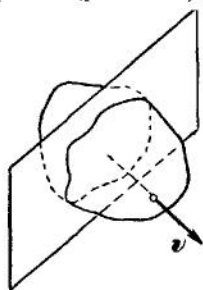


Рис. 330.

круга; c_x — безразмерный коэффициент сопротивления, зависящий от формы тела. При упоминавшихся выше дозвуковых скоростях величину c_x можно считать постоянной.

Будем в дальнейшем рассматривать случай падения тела без начальной скорости ($v_0 = 0$). Установим сначала одно свойство такого движения, справедливое при любом виде зависимости $R(v)$. Представим силу сопротивления в виде

$$R = mgf(v), \quad (16)$$

где $f(v)$ есть сила сопротивления, отнесенная к весу тела. Тогда уравнение (14) примет вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg - mgf(v) \quad (17)$$

или, после сокращения на m ,

$$\frac{dv}{dt} = g[1 - f(v)]. \quad (17')$$

По данным опыта функция $f(v)$ обладает в рассматриваемом случае следующими свойствами: при $v = 0$ (когда тело относительно среды покоится) $f(0) = 0$; с увеличением v величина $f(v)$ возрастает до известного предела; предельное значение $f(v)$ равно единице, так как мы не считаем возможным, чтобы сила сопротивления R , действующая на падающее без начальной скорости тело, стала больше силы тяжести mg (см. рис. 329). То значение скорости v , при котором $f(v) = 1$, будем называть предельной скоростью $v_{пр}$.

Таким образом, тело, падающее в воздухе (или вообще в сопротивляющейся среде) без начальной скорости, движется ускоренно, но

притом так, что скорость его не может стать больше некоторой величины $v_{\text{пр}}$. Значение $v_{\text{пр}}$ определяется из условия

$$R_{\text{пр}} = mg \text{ или } f(v_{\text{пр}}) = 1.$$

Разделим в уравнении (17') переменные и проинтегрируем его, полагая, что при $t=0$ скорость $v=0$. Тогда получим:

$$t = \frac{1}{g} \int_0^v \frac{dv}{1-f(v)}.$$

При $v=v_{\text{пр}}$ будет $f(v_{\text{пр}})=1$ и подынтегральная функция обратится в бесконечность. Если интеграл при этом расходится, то скорость v будет равна $v_{\text{пр}}$ при $t=\infty$, т. е. скорость падения будет стремиться к своему предельному значению асимптотически. Практически, как показывает опыт, приближение к предельной скорости происходит довольно быстро, если только коэффициент сопротивления не слишком мал.

Рассмотрим теперь конкретный случай, когда сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, и положим

$$f(v) = k^2 v^2. \quad (18)$$

Тогда из уравнения (17'), разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{1-k^2 v^2} = g dt,$$

и, интегрируя, найдем:

$$\frac{1}{2k} \ln \frac{1+kv}{1-kv} = gt + c.$$

Так как по начальным условиям при $t=0$ скорость $v=0$, то $c=0$, и мы будем иметь:

$$\frac{1}{2k} \ln \frac{1+kv}{1-kv} = gt, \quad (19)$$

или

$$\frac{1+kv}{1-kv} = e^{2kgt}.$$

Определяя из этого уравнения v , получим:

$$v = \frac{1}{k} \frac{e^{2kgt} - 1}{e^{2kgt} + 1} = \frac{1}{k} \frac{e^{kgt} - e^{-kgt}}{e^{kgt} + e^{-kgt}}, \quad (20)$$

или

$$v = \frac{1}{k} \text{th}(kgt). \quad (20')$$

Так как $\text{th}(\infty) = 1$, что непосредственно видно из равенства (20), если представить его в виде

$$v = \frac{1}{k} \text{th}(kgt) = \frac{1}{k} \frac{1 - e^{-2kgt}}{1 + e^{-2kgt}},$$

то, следовательно, при $t \rightarrow \infty$ скорость v стремится к предельному значению $1/k$, т. е.

$$v_{\text{пр}} = \frac{1}{k}. \quad (21)$$

Этот результат следует и из предыдущих общих рассуждений, так как соотношение $f(v_{\text{пр}}) = 1$, определяющее предельную скорость, дает в данном случае, согласно равенству (18), $k^2 v_{\text{пр}}^2 = 1$.

Выразим $v_{\text{пр}}$ через коэффициенты формулы (15), считая в ней ρ и c_x постоянными, что будет иметь место, когда высота падения не очень велика, а скорость не близка к звуковой. В нашем случае $f(v) = k^2 v^2$. Подставляя это значение в формулу (16) и приравнивая ее правую часть правой части равенства (15), найдем соответствующее значение k и получим, что

$$v_{\text{пр}} = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2mg}{c_x \rho S}}. \quad (22)$$

Таким образом, предельная скорость растет с увеличением веса тела и с уменьшением коэффициента сопротивления, плотности среды и площади мишеля.

Скорость приближается к своему предельному значению асимптотически. Однако можно считать, что, начиная с некоторого момента, когда, например, $v = 0,99v_{\text{пр}}$ (т. е. когда скорость отличается от предельной менее чем на 1%), тело практически движется равномерно со скоростью $v = v_{\text{пр}}$.

Этот момент t_1 найдем из равенства (19), полагая в нем $v/v_{\text{пр}} = kv = 0,99$; получим:

$$t_1 = \frac{1}{2kg} \ln \frac{1+0,99}{1-0,99} = \frac{v_{\text{пр}}}{2g} \ln 199 \approx 2,65 \frac{v_{\text{пр}}}{g}. \quad (23)$$

Следовательно, время t_1 тем меньше, чем меньше $v_{\text{пр}}$.

Найдем теперь закон движения падающего тела. Из равенства (20') имеем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} \text{tg}(kgt),$$

откуда

$$dx = \frac{1}{k} \frac{\text{sh}(kgt)}{\text{ch}(kgt)} dt.$$

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание, что по начальным условиям при $t=0$ координата $x=0$, найдем окончательно:

$$x = \frac{1}{k^2 g} \ln \operatorname{ch}(kgt). \quad (24)$$

Примеры. 1. Пусть два однородных шара одинакового диаметра, но разной плотности падают свободно в воздухе. Найдем отношение их предельных скоростей. Для рассматриваемых шаров величины c_x и S одинаковы, а массы m_1 и m_2 разные; одной и той же будет и плотность воздуха ρ . Тогда формула (22) дает:

$$\frac{v_{\text{пр}}^{(1)}}{v_{\text{пр}}^{(2)}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}},$$

где μ_1 и μ_2 — плотности шаров. Таким образом, предельные скорости двух геометрически равных однородных шаров прямо пропорциональны корням квадратным из их плотностей. Этот результат был впервые получен Мариоттом.

2. Найдем предельную скорость падения парашютиста при затяжном прыжке и с открытым парашютом, полагая вес парашютиста $P = mg = 75 \text{ кГ}$, а плотность воздуха $\rho = \frac{1}{8} \frac{\text{кГсек}^2}{\text{м}^4}$.

При затяжном прыжке можно считать для парашютиста $c_x = 1,0$ и $S = 0,4 \text{ м}^2$, тогда по формуле (22) получим $v_{\text{пр}} \approx 55 \text{ м/сек}$. Из равенства (23) найдем, что $t_1 \approx 15 \text{ сек}$, т. е. уже через 15 сек скорость падения (при $v_0 = 0$) отличается от предельной на 1%.

При падении с открытым парашютом, примем для него $c_x = 1,4$, $S = 36 \text{ м}^2$. Тогда соответственно получим $v_{\text{пр}} = 5 \text{ м/сек}$ и $t_1 \approx 1,4 \text{ сек}$, т. е. если парашют раскрывается сразу, то примерно через 1,5 сек $v = 0,99v_{\text{пр}}$.

§ 35. Прямолинейные колебания точки

1. Свободные колебания точки при отсутствии сопротивления (гармонические колебания). Рассмотрим прямолинейное движение точки с массой m под действием центральной силы $F = -cr$, направленной к неподвижному центру O (рис. 331) и пропорциональной расстоянию от этого центра (квазиупругая сила). К таким силам относятся, например, упругие силы, подчиняющиеся закону Гука.

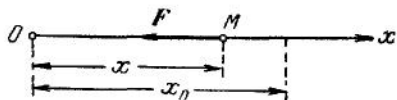


Рис. 331.

Силу F называют еще восстанавливающей силой, так как она стремится вернуть точку в равновесное положение O , где $F=0$, т. е. восстановить равновесие.

Если начальная скорость точки M равна нулю или направлена вдоль линии OM , то, как было установлено в § 34, движение под действием центральной силы F , будет прямолинейным. Покажем, что это движение представляет собой простое гармоническое колебание.

Направим вдоль OM координатную ось x (см. рис. 331). Тогда

$$F_x = -cx, \quad (1)$$

где c — постоянный коэффициент (для пружины этот коэффициент называется коэффициентом жесткости; он численно равен силе, которая удлиняет пружину на 1 см). Составляя дифференциальное уравнение движения точки, получим:

$$m\ddot{x} = -cx.$$

Отсюда, деля обе части на m и полагая

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad (2)$$

будем иметь:

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть дифференциальное уравнение простого гармонического колебания. Его общее решение, как известно, имеет вид

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (4)$$

где λ_1 и λ_2 суть корни характеристического уравнения. Чтобы составить характеристическое уравнение, делаем в уравнении (3) подстановку

$$x = e^{\lambda t}.$$

Тогда $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ и мы получим:

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + k^2) = 0,$$

откуда находим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + k^2 = 0.$$

Решая его, получаем:

$$\lambda_1 = +ik, \quad \lambda_2 = -ik.$$

Подставляя значения λ_1 и λ_2 в общее решение (4), будем иметь:

$$x = c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$$

или, так как

$$e^{ikt} = \cos(kt) + i \sin(kt), \quad e^{-ikt} = \cos(kt) - i \sin(kt),$$

найдем, что

$$x = (c_1 + c_2) \cos(kt) + i(c_1 - c_2) \sin(kt).$$

Полагая здесь

$$c_1 + c_2 = A, \quad i(c_1 - c_2) = B,$$

получим общее решение в виде

$$x = A \cos(kt) + B \sin(kt), \quad (5)$$

где A и B суть постоянные интегрирования.

Введем новые постоянные a и α , полагая:

$$A = a \sin \alpha, \quad B = a \cos \alpha.$$

Тогда получим:

$$x = a [\sin \alpha \cos(kt) + \cos \alpha \sin(kt)]$$

или

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (6)$$

Уравнение (6) есть также общее решение дифференциального уравнения (3), но в другой форме. Постоянными интегрирования здесь являются a и α . Решение (6) показывает, что точка движется по закону синуса (или косинуса). Такое движение носит название

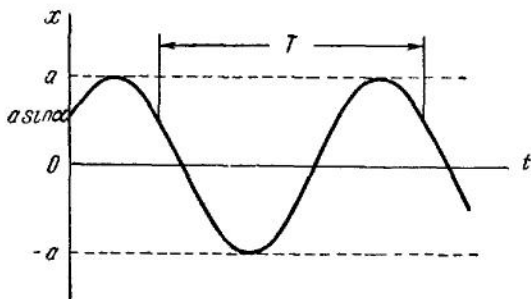


Рис. 332.

простого гармонического колебания; график его показан на рис. 332. Скорость точки в этом движении будет:

$$v_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha). \quad (7)$$

Поскольку $|\sin(kt + \alpha)| \leq 1$, то постоянная a определяет наибольшее отклонение точки от центра колебаний O ; ее называют *амплитудой колебаний*. Величина $kt + \alpha$, определяющая, как видно из (6) и (7), положение и скорость точки в данный момент времени, называется *фазой колебаний*; следовательно, постоянная α есть *начальная фаза*.

Из уравнения (6) видно, что движение является периодическим. Периодом колебаний называется промежуток времени T , в течение которого точка совершает одно полное колебание. Так как через

период, т. е. в момент $t+T$, точка должна прийти в то же положение x и иметь ту же скорость v_x , что и в момент t , то величина T найдется из условий:

$$\sin [k(t+T) + \alpha] = \sin (kt + \alpha), \quad \cos [k(t+T) + \alpha] = \cos (kt + \alpha).$$

Наименьшее значение T , при котором выполняются эти условия, определяется равенством $kT = 2\pi$, откуда период

$$T = \frac{2\pi}{k}. \quad (8)$$

Величина ν , обратная периоду, определяет число колебаний, совершаемых за одну секунду; ее называют *частотой колебаний*:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \quad (9)$$

Величина k , пропорциональная ν , носит название *круговой* или *собственной* (а также *циклической*) частоты. Важно отметить, что частота и период колебаний от начальных условий не зависят.

Постоянные a и α определяются из начальных условий. Пусть

$$\text{при } t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0, \\ \dot{x} = v_0; \end{cases} \quad (10)$$

тогда, подставляя эти значения в равенства (6) и (7), получим:

$$x_0 = a \sin \alpha, \quad v_0 = ak \cos \alpha,$$

откуда, возводя эти равенства почленно в квадрат и складывая, а затем деля их почленно друг на друга, найдем:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 k}{v_0}. \quad (11)$$

Таким образом, амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий. Из равенств (11) видно, что если начальная скорость равна нулю ($v_0 = 0$), то амплитуда равна начальному расстоянию x_0 , а $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и закон движения точки будет:

$$x = a \cos kt. \quad (12)$$

Если же $v_0 \neq 0$, то амплитуда будет больше x_0 .

Часто общее решение уравнения (3) берут в форме (5):

$$x = A \cos(kt) + B \sin(kt).$$

Тогда

$$\dot{x} = k(-A \sin kt + B \cos kt).$$

Подставляя в эти равенства начальные данные (10), получим $x_0 = A$, $v_0 = Bk$, откуда

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{k}.$$

Окончательно закон движения будет иметь следующий вид:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt. \quad (13)$$

При $v_0 = 0$ получаем ранее найденный закон (12). Если же $x_0 = 0$, то будем иметь:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin(kt + \alpha). \quad (14)$$

Такой же результат при $x_0 = 0$ получим и из равенств (6) и (11).

Из полученных результатов следует, что, на каком бы расстоянии x_0 от центра колебаний точка ни находилась в момент, когда ее скорость равна нулю, она придет в этот центр через $\frac{1}{4}$ периода. Движение, обладающее таким свойством, называют *таутохронным*. Одновременно, поскольку период T не зависит от величины размахов (амплитуды), это движение является *изохронным*.

Пример. Висящий на вертикальной пружине груз растягивает ее на величину δ_0 (статическое удлинение пружины). Пренебрегая сопротивлением среды, найдем закон вертикальных колебаний груза, отклоненного от равновесного положения на расстояние h и отпущенного без начальной скорости.

Пусть AB длина ненапряженной пружины; δ_0 — статическое удлинение (рис. 333). Возьмем начало координат в точке O (положение статического равновесия) и направим ось x по вертикали вниз. Тогда в произвольном положении на груз действуют сила тяжести $P = mg$ и упругая сила $F = c|\Delta l|$, где в нашем случае удлинение пружины $\Delta l = \delta_0 + x$. Составляя дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x , получим:

$$m\ddot{x} = mg - c(\delta_0 + x). \quad (a)$$

Рис. 333.

Но так как в равновесном положении пружина растянута на δ_0 и ее упругая сила уравнивает силу тяжести, то $P = mg = c\delta_0$. Тогда, производя в уравнении (a) соответствующее сокращение и вводя обозначение

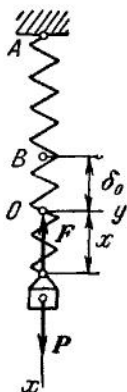
$$\frac{c}{m} = \frac{g}{\delta_0} = k^2, \quad (b)$$

получим дифференциальное уравнение колебаний груза в виде

$$\ddot{x} + k^2x = 0. \quad (b)$$

Отсюда сразу находим, что период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_0}{g}}, \quad (r)$$



т. е. период колебаний пропорционален корню квадратному из статического удлинения пружины. Этот результат справедлив и в случае, когда роль пружины играет упругая балка, если δ_0 — статический прогиб балки.

Интегрируя уравнение (в), получим:

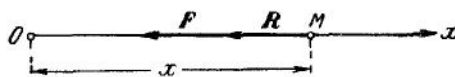
$$x = A \cos kt + B \sin kt.$$

По начальным условиям при $t=0$ $x = h$, $v_0 = 0$. Тогда, как мы видели, $A = h$, $B = 0$ и закон движения примет вид

$$x = h \cos kt.$$

Таким образом, центром колебаний будет равновесное положение O . Отсюда видно, что действие постоянной силы P не меняет характер колебаний, происходящих под действием упругой силы F , а только смещает центр этих колебаний в сторону действия силы P на величину δ_0 (см. ниже, п. 4).

2. Свободные затухающие колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости. Пусть на точку с массой m ,



кроме восстанавливающей силы $F = -cx$, направленной к центру O , действует сила сопротивления $R = -\mu v$, пропорциональная скорости и направленная против движения (рис. 334).

Рис. 334.

Тогда $F_x = -cx$, $R_x = -\mu \dot{x}$ и дифференциальное уравнение движения точки будет:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Переносим все члены в левую часть, деля на m и полагая

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2b, \quad (15)$$

получим дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний в виде

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0. \quad (16)$$

Это линейное и однородное дифференциальное уравнение, как и уравнение (3), имеет общее решение

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (17)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения. Подставляя в уравнение (16)

$$x = e^{\lambda t}, \quad \dot{x} = \lambda e^{\lambda t}, \quad \ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

получим:

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2b\lambda + k^2) = 0.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0. \quad (18)$$

Решая его, определим λ :

$$\lambda = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}.$$

Окончательный вид решения зависит от соотношения между b и k .

а) Пусть $b < k$. Тогда, обозначив

$$\sqrt{k^2 - b^2} = k_1, \quad (19)$$

будем иметь:

$$\lambda_1 = -b + ik_1, \quad \lambda_2 = -b - ik_1,$$

и общее решение (17) примет вид

$$x = c_1 e^{(-b+ik_1)t} + c_2 e^{(-b-ik_1)t} = e^{-bt} (c_1 e^{ik_1 t} + c_2 e^{-ik_1 t}).$$

Преобразуя выражение в скобках так же, как в п. 1, получим решение уравнения (16) в одном из следующих двух видов:

$$x = e^{-bt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t) \quad (20)$$

или

$$x = e^{-bt} a \sin(k_1 t + \alpha), \quad (21)$$

где A и B или a и α — постоянные интегрирования, определяемые по начальным условиям.

Из вида уравнения (21) следует, что описываемое им движение будет колебательным, так как синус есть функция периодическая. Эти колебания называют *затухающими*, поскольку благодаря наличию множителя e^{-bt} размахи колебаний будут со временем убывать, стремясь к нулю.

Величину

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}, \quad (22)$$

являющуюся периодом тригонометрической части уравнения (21), называют периодом затухающих колебаний. Сравняя эту величину с периодом незатухающих колебаний (8), мы видим, что наличие сопротивления несколько увеличивает период или уменьшает частоту колебаний. Если величина b очень мала по сравнению с k , то практически можно считать $k_1 \approx k$ и $T_1 \approx T$.

Чтобы установить закон затухания размахов колебаний, отметим, что промежуток времени между двумя последовательными максимальными отклонениями колеблющейся точки вправо (или влево) равен периоду T_1 , так как моменты t_i , когда точка имеет эти наибольшие

отклонения, определяются из уравнения

$$\dot{x} = e^{-bt} a [k_1 \cos(k_1 t + \alpha) - b \sin(k_1 t + \alpha)] = 0$$

или

$$\operatorname{tg}(k_1 t + \alpha) = \frac{k_1}{b}. \quad (23)$$

Следовательно, если уравнение (23) удовлетворяется в момент t_i , то оно удовлетворяется и в момент $t_{i+1} = t_i + T_1$. Поэтому величины x_i и x_{i+1} двух последовательных максимальных отклонений, например, вправо будут:

$$\begin{aligned} x_i &= a e^{-bt_i} \sin(k_1 t_i + \alpha), \quad x_{i+1} = \\ &= a e^{-b(t_i + T_1)} \sin(k_1 t_i + k_1 T_1 + \alpha) = x_i e^{-bT_1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{-bT_1}, \quad (24)$$

т. е. полуразмахи колебаний убывают по закону геометрической прогрессии, знаменатель которой e^{-bT_1} называется *декрементом колебаний*. Соответственно величину

$$D = |\ln e^{-bT_1}| = bT_1$$

называют *логарифмическим декрементом*. Графически закон затухающего колебания изображен на рис. 335.

б) Пусть $b > k$. Тогда, обозначив

$$\sqrt{b^2 - k^2} = n^2, \quad (25)$$

найдем, что корни характеристического уравнения (18) будут действительные числа:

$$\lambda_1 = -b + n, \quad \lambda_2 = -b - n,$$

и общее решение (17) примет вид

$$x = e^{-bt} (c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}). \quad (26)$$

Учитывая, что

$$e^{nt} = \operatorname{ch}(nt) + \operatorname{sh}(nt), \quad e^{-nt} = \operatorname{ch}(nt) - \operatorname{sh}(nt),$$

мы можем получить другую форму общего решения:

$$x = e^{-bt} [A \operatorname{ch}(nt) + B \operatorname{sh}(nt)], \quad (26')$$

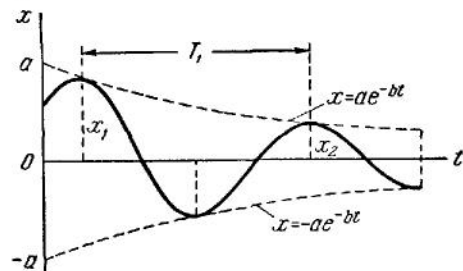


Рис. 335

где A и B — новые постоянные интегрирования. Уравнения (26) и (26') указывают, что x будет функцией аperiодической, т. е. колебаний в этом случае не будет.

Так как $n < b$, то из уравнения (26) видно, что x с течением времени неограниченно убывает, стремясь к нулю, т. е. точка со временем асимптотически приближается к притягивающему центру. График этого движения, который можно построить по уравнению (26), имеет в зависимости от величины и знака начального отклонения x_0 и начальной скорости v_0 форму одной из кривых, изображенных на рис. 336 (или им симметричных относительно оси абсцисс).

в) В случае, когда $b = k$, корни характеристического уравнения (18) будут $\lambda_1 = \lambda_2 = -b$ и общее решение уравнения (16) примет вид

$$x = e^{-bt}(c_1 + c_2 t).$$

Так как e^{-bt} убывает быстрее, чем растет t , то картина движения в этом случае будет качественно такой же, как показанная на рис. 336. Движение будет неколебательным (аperiодическим) затухающим.

3. Вынужденные колебания точки. Резонанс. Колебания материальной точки называются вынужденными, если на точку, кроме направленной к центру O восстанавливающей силы, действует некоторая изменяющаяся со временем сила $Q(t)$, называемая возмущающей. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда возмущающая сила является гармонической, т. е. изменяется по закону

$$Q = Q_0 \sin(pt). \quad (27)$$

Исследуем сначала вынужденные колебания точки при отсутствии сопротивления. Пусть на точку M массы m (рис. 337) действуют восстанавливающая сила $F = -cx$ и гармоническая возмущающая сила (27). Тогда дифференциальное уравнение движения точки, если считать $Q_{0x} = Q_0$, будет

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt).$$

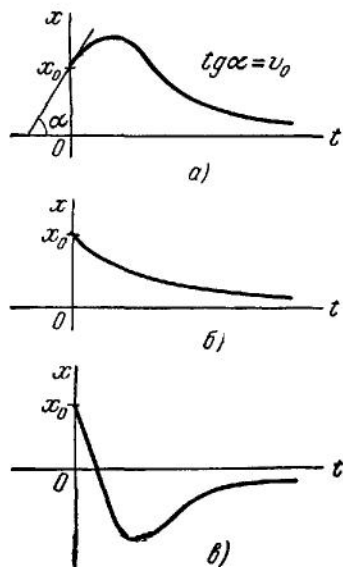


Рис. 336



Рис. 337.

Деля обе его части на m и полагая

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{Q_0}{m} = P,$$

получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний точки при отсутствии сопротивления в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = P \sin(pt). \quad (28)$$

Уравнение (28) есть неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решение такого уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Будем искать частное решение уравнения (28) в виде

$$\xi = A \sin(pt). \quad (29)$$

Для определения A подставляем в уравнение (28) вместо x выражение ξ ; получим тождество

$$A(k^2 - p^2) \sin(pt) = P \sin(pt). \quad (30)$$

Отсюда, полагая, что $p \neq k$, найдем:

$$A = \frac{P}{k^2 - p^2}.$$

Следовательно, частное решение уравнения (28) будет:

$$\xi = \frac{P}{k^2 - p^2} \sin(pt). \quad (31)$$

Соответствующее уравнению (28) однородное уравнение

$$\ddot{x} + k^2 x = 0$$

имеет общее решение

$$x = a \sin(kt + \alpha),$$

поэтому общее решение уравнения (28) будет:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P}{k^2 - p^2} \sin(pt), \quad (32)$$

где a и α суть произвольные постоянные, определяемые начальными условиями.

Из уравнения (32) следует, что при действии возмущающей силы точка совершает сложное колебание, которое является результатом суперпозиции (наложения) двух колебаний: собственных колебаний с частотой k и вынужденных колебаний с частотой p , равной частоте возмущающей силы. Заметим, что амплитуда вынужденных колебаний

$\frac{P}{k^2 - p^2}$ (в отличие от амплитуды a собственных колебаний) от начальных условий не зависит. С увеличением частоты возмущающей силы p амплитуда вынужденных колебаний стремится к нулю; следовательно, действие возмущающей силы, частота которой очень велика по сравнению с частотой собственных колебаний, почти не нарушает режима собственных колебаний.

Если частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний, т. е. если $p = k$, то, как видно из (30), частного решения вида (29) у уравнения (28) не существует. Рассмотрим тогда другое частое решение

$$\xi_1 = \frac{P}{k^2 - p^2} [\sin(pt) - \sin(kt)],$$

которое получается из общего решения (32) при значении произвольных постоянных:

$$a = -\frac{P}{k^2 - p^2}, \quad \alpha = 0.$$

При $p = k$ это частное решение обращается в неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскрывая которую, получим:

$$\xi_1 = P \left\{ \frac{\frac{d}{dp} [\sin(pt) - \sin(kt)]}{\frac{d}{dp} (k^2 - p^2)} \right\}_{p=k} = -\frac{Pt}{2k} \cos(kt).$$

Следовательно, общее решение уравнения (28) при $p = k$ будет:

$$x = -\frac{Pt}{2k} \cos(kt) + a \sin(kt + \alpha). \quad (33)$$

Отсюда видно, что в том случае, когда частота возмущающей силы делается равной частоте собственных колебаний, амплитуда вынужденных колебаний будет с течением времени неограниченно возрастать. Такое явление носит название *резонанса* и играет большую роль в акустике, радиотехнике и при динамическом расчете сооружений. Картина вынужденных колебаний при резонансе показана на рис. 338.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания точки при сопротивлении, пропорциональном скорости. Пусть действующие на точку M с массой m восстанавливающая сила F , сила сопротивления среды R и возмущающая сила Q (рис. 339) соответственно равны: $F = -cr$,

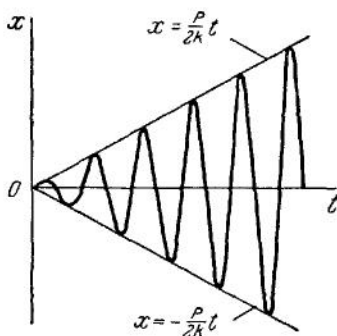



Рис. 338.

$R = -\mu v$ и $Q = Q_0 \sin pt$. Тогда дифференциальное уравнение движения точки в проекции на ось Ox будет:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x} + Q_0 \sin(pt).$$

Деля обе его части на m , получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при сопротивлении, пропорциональном скорости, в виде



$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = P \sin(pt), \quad (34)$$

Рис. 339,

где

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2b, \quad \frac{Q_0}{m} = P. \quad (35)$$

Уравнение (34) есть неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Как известно, общее решение этого уравнения будет:

$$x = X + \xi,$$

где X есть общее решение уравнения без правой части, а ξ — какое-либо частное решение всего уравнения.

Общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0$$

мы нашли выше, рассматривая затухающие колебания. В случае, когда $k > b$, оно имеет вид (21)

$$X = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

где a и α — произвольные постоянные, а

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}.$$

Будем искать частное решение уравнения (34) в виде

$$\xi = A \sin(pt - \beta).$$

Значения A и β найдем, подставляя ξ в уравнение (34). Для этого вычислим первую и вторую производные ξ по времени, полагая для сокращения записи $pt - \beta = \theta$; получим:

$$\dot{\xi} = Ap \cos \theta; \quad \ddot{\xi} = -Ap^2 \sin \theta.$$

Подставляя это вместе со значением ξ в уравнение (34), будем иметь:

$$-Ap^2 \sin \theta + 2bAp \cos \theta + k^2A \sin \theta = P \sin(\theta + \beta),$$

или

$$-Ap^2 \sin \theta + 2Abp \cos \theta + Ak^2 \sin \theta = P(\sin \theta \cos \beta + \cos \theta \sin \beta).$$

В этом уравнении левая и правая части тождественно равны друг другу; следовательно, коэффициенты при переменных $\cos \theta$ и $\sin \theta$ должны быть одинаковы, т. е.

$$\begin{aligned} A(k^2 - p^2) &= P \cos \beta, \\ 2bpA &= P \sin \beta. \end{aligned}$$

Возводя оба эти равенства в квадрат и складывая их почленно, получим:

$$A^2 [(k^2 - p^2)^2 + 4p^2b^2] = P^2,$$

откуда

$$A = \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2b^2}}. \quad (36)$$

Далее, деля почленно второе из полученных равенств на первое, найдем:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2bp}{k^2 - p^2}, \quad (37)$$

или

$$\beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{2bp}{k^2 - p^2} \right). \quad (37')$$

Следовательно,

$$\xi = \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2b^2}} \sin(pt - \beta), \quad (38)$$

а общее решение уравнения (34) будет:

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1t + \alpha) + \frac{P}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4p^2b^2}} \sin(pt - \beta), \quad (39)$$

где a и α — произвольные постоянные, определяемые по начальным данным.

Решение (39) показывает, что при одновременном воздействии на точку восстанавливающей и возмущающей сил точка совершает сложное колебательное движение. Первый член правой части уравнения (39) выражает собой собственные колебания точки, а второй член определяет так называемые *вынужденные* колебания, т. е. колебания точки под действием возмущающей силы.

Если сопротивление среды отсутствует, то $b = 0$ и колебания, как было найдено ранее, совершаются по закону

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P}{k^2 - p^2} \sin(pt). \quad (39')$$

Частота собственных колебаний равна k_1 или k [формулы (19) и (2)] в зависимости от наличия или отсутствия сопротивления; амплитуда a и начальная фаза α этих колебаний зависят от начальных условий. При наличии сопротивления собственные колебания будут

затухающими, так как множитель e^{-bt} со временем уменьшается, стремясь к нулю. Поэтому практически (так как наличие сопротивлений неизбежно) можно считать, что по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом установления, точка будет совершать только вынужденные колебания.

Частота вынужденных колебаний равна частоте p гармонической возмущающей силы (эта сила как бы «навязывает» системе свою частоту колебаний).

Вынужденные колебания являются незатухающими; их амплитуда A , а также величина β , характеризующая сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы, от начальных условий не зависят и определяются равенствами (36) и (37).

Разделим в правых частях равенств (36) и (37) числитель и знаменатель на k^2 и введем обозначения

$$\frac{P}{k} = \lambda, \quad \frac{b}{k} = h, \quad \frac{P}{k^2} = \frac{Q_0}{c} = A_0. \quad (40)$$

Величина A_0 есть так называемое «статическое отклонение»; она определяет, на каком расстоянии от притягивающего центра O точка будет находиться в равновесии под действием восстанавливающей силы $F_x = -cx$ и постоянной силы $Q_x = Q_0$ (при равновесии $cx_{\text{рав}} = Q_0$, т. е. $x_{\text{рав}} = \frac{Q_0}{c} = A_0$).

Тогда формулы (36) и (37) примут вид

$$A = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2}}, \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2h\lambda}{1 - \lambda^2}. \quad (42)$$

Отсюда видно, что амплитуда A вынужденных колебаний и сдвиг фаз β зависят от двух безразмерных параметров λ и h , где λ есть отношение частоты возмущающей силы к частоте собственных колебаний, а h — величина, пропорциональная коэффициенту сопротивления μ .

Исследуем, как будет изменяться амплитуда вынужденных колебаний в зависимости от изменения λ и h . Для этого рассмотрим подкоренное выражение

$$f(\lambda) = (1 - \lambda^2)^2 + 4h^2\lambda^2.$$

При $\lambda = 0$ будет $f(0) = 1$ и $A = A_0$ независимо от значения h . Далее, вычисляя производную $f'(\lambda)$, будем иметь:

$$f'(\lambda) = 4\lambda[\lambda^2 - (1 - 2h^2)]. \quad (43)$$

Пусть сопротивление не очень велико и $2h^2 \ll 1$. Тогда при возрастании λ от нуля для малых λ будет $f'(\lambda) < 0$; следовательно,

знаменатель выражения (41) убывает, а амплитуда A растет. Приравняв правую часть выражения (43) нулю, найдем, что при $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \sqrt{1 - 2h^2}$ (значения $\lambda < 0$ мы не рассматриваем) функция $f(\lambda)$ имеет экстремум. По знаку второй производной легко проверить, что когда $2h^2 < 1$, то $f(\lambda_1) = f_{\max}$, а $f(\lambda_2) = f_{\min}$. Следовательно, при $\lambda = 0$ амплитуда A имеет минимум ($A = A_0$), а при

$$\lambda_2 = \sqrt{1 - 2h^2} \quad (44)$$

амплитуда A имеет максимум, т. е. при $\lambda = \lambda_2$ наступает резонанс.

Из равенства (44) видно, что значение λ , при котором имеет место резонанс, тем меньше отличается от единицы, чем меньше h . В случаях, когда h очень мало (что обычно имеет место на практике), можно считать $\lambda_2 = 1$, т. е. что резонанс наступает тогда, когда частота возмущающей силы равна частоте собственных колебаний ($p = k$).

Когда $\lambda > \lambda_2$, то с увеличением λ амплитуда A убывает, стремясь к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, если частота возмущающей силы будет очень велика по сравнению с частотой собственных колебаний ($p \gg k$), то амплитуда вынужденных колебаний будет близка к нулю.

Что касается зависимости A от h , то, как видно из (41), величина A при данном λ будет тем меньше, чем больше h . Вид зависимости $A(\lambda)$ при разных h , даваемый формулой (41), показан на рис. 340. Кривая $h = 0$ соответствует случаю отсутствия сопротивления. При этом надо иметь в виду, что когда $h = 0$ и $p = k$, формула (41) утрачивает смысл, а закон колебаний определяется уравнением (33), из которого следует, что, когда $h = 0$, амплитуда вынужденных колебаний при резонансе будет со временем неограниченно возрастать.

Характер зависимости сдвига фаз β от λ и h , даваемой равенством (42), представлен на рис. 341. Как видно из формулы (42), при $\lambda = 0$ будет $\beta = 0$; при $\lambda = 1$, т. е. при резонансе, $\text{tg } \beta = \infty$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$; при $\lambda > 1$ $\text{tg } \beta < 0$, а $\beta > \frac{\pi}{2}$ и, когда λ стремится к беско-

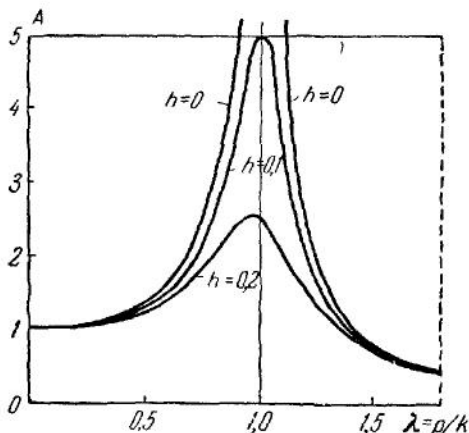


Рис. 340.

нечности, β стремится к π . Следовательно, при малых λ фазы вынужденных колебаний и возмущающей силы примерно совпадают, при резонансе эти фазы сдвинуты на 90° , а при больших значениях λ сдвиг фаз приближается к 180° . Если сопротивление отсутствует ($h=0$), то при любом $\lambda < 1$ $\beta=0$, при $\lambda=1$ $\beta=90^\circ$ и при любом $\lambda > 1$ $\beta=180^\circ$.

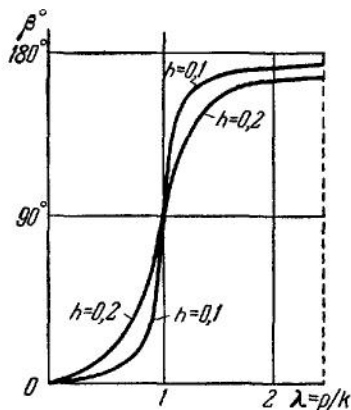


Рис 341.

Теория вынужденных колебаний имеет много важных приложений в разных областях физики и техники (акустика, радиотехника, сейсмография, проблема виброзащиты различных сооружений и др.). При этом широко используется явление резонанса, позволяющее даже при малой величине возмущающей силы (т. е. когда Q_0 мало) получить интенсивные вынужденные колебания за счет совпадения частот p и k , а также другое важное свойство этих колебаний, позволяющее, наоборот, даже при больших значениях возмущающей силы сделать амплитуду вынужденных колебаний очень малой за счет такого подбора соотношения между частотами p и k , при котором p много больше k .

Примеры. 1. Пусть статический прогиб балки под действием веса стоящего на ней мотора равен δ_0 . Тогда из примера, рассмотренного ранее (см. стр 363), следует, что период и частота собственных колебаний балки (если пренебречь ее массой) будут соответственно

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_0}{g}}, \quad k = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}}.$$

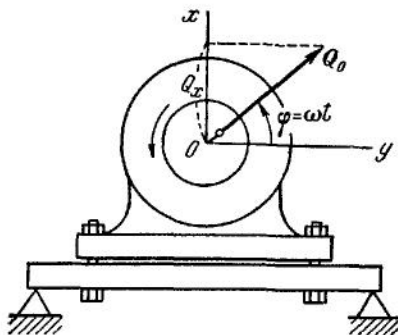


Рис 342

Вследствие неизбежного эксцентриситета вала мотора возникнет направленная от оси так называемая центробежная сила Q_0 , проекция которой на ось Ox (рис. 342) будет $Q_x = Q_0 \sin \omega t$, где ω — угловая скорость вращения вала. Сила Q_x и будет действующей на балку возмущающей силой; частота ее $p = \omega$. Следовательно, при $p = k$, т. е. при

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}}$$

наступит резонанс. Величина $\omega_{кр}$ называется критической угловой скоростью

(например, при $\delta_0 = 1$ см $\omega_{кр} \approx 31,3$ 1/сек или критическое число оборотов в минуту $n_{кр} = \frac{30\omega_{кр}}{\pi} \approx 300 \frac{об}{мин}$).

Так как наступление резонанса в подобных случаях крайне нежелательно, то рабочее число оборотов вала мотора следует подбирать таким, чтобы оно было значительно больше $n_{кр}$; тогда будет $p \gg k$ и амплитуда вынужденных колебаний системы будет близка к нулю.

2. Пренебрегая сопротивлениями, исследуем вынужденные колебания груза, подвешенного к вертикальной пружине DB , верхний конец D которой колеблется по закону $\xi_D = a_0 \sin(pt)$.

Пусть в начальный момент пружина с висящим на ней грузом находится в покое (рис. 343, а) и пружина при этом имеет статическое удлинение

$$\delta_0 = \frac{P}{c},$$

где P — вес груза, c — коэффициент жесткости пружины. Будем отсчитывать координату x груза от равновесного положения B_0 и направим ось B_0x по вертикали вниз. В произвольный момент времени t (рис. 343, б) пружина получит удлинение $\Delta l = \delta_0 + x - \xi_D$; тогда $F_x = -c(\delta_0 + x - \xi_D)$, $P_x = P = c\delta_0$ и дифференциальное уравнение движения груза будет:

$$m\ddot{x} = F_x + P_x = -cx + c\xi_D,$$

или, полагая $\frac{c}{m} = k^2$,

$$\ddot{x} + k^2x = k^2a_0 \sin pt.$$

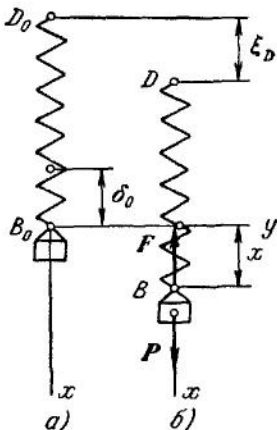


Рис. 343.

Полученное уравнение, как легко видеть, совпадает с уравнением (28) или с уравнением (34) при $b = 0$; следовательно, движение груза складывается из собственных и вынужденных колебаний.

Частота вынужденных колебаний груза равна частоте p колебаний верхнего конца пружины. Амплитуда колебаний и сдвиг фаз при $p \neq k$ будут:

$$A = \frac{k^2 a_0}{|k^2 - p^2|} = \frac{a_0}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|},$$

$$\beta = 0 \quad (\text{при } p < k), \quad \beta = \pi \quad (\text{при } p > k).$$

Следовательно, если $p \ll k$ (конец D пружины колеблется очень медленно), то $A \approx a_0$, а сдвиг фаз $\beta = 0$, т. е. груз колеблется почти так, как если пружина была бы жестким стержнем. Если $p > k$, то с возрастанием частоты p амплитуда A убывает, при этом сдвиг фаз $\beta = 180^\circ$, т. е. когда конец D пружины идет вниз, груз поднимается вверх, и наоборот; если $p \gg k$, то амплитуда $A \approx 0$ и можно практически считать, что груз остается в покое в положении статического равновесия B_0 (частота колебаний конца D пружины столь велика, что груз не успевает за ними следовать). Наконец, при $p = k$ наступает резонанс и размахи вынужденных колебаний будут со временем возрастать, согласно уравнению (33).

4. Влияние постоянной силы на свободные колебания точки. Пусть на точку, кроме восстанавливающей силы $F = -cr$, направленной к центру O , действует еще постоянная сила $Q = \text{const}$ (рис. 344). Поместим начало координат в положение статического равновесия O_1 и направим вправо координатную ось O_1x_1 . Статическое смещение $OO_1 = \delta_0$ от притягивающего центра O определится из равенства $c\delta_0 = Q$. Тогда будем иметь $F_x = -c(x_1 + \delta_0)$ и

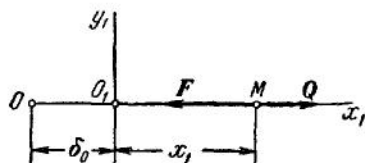


Рис. 344.

$F_x + Q_x = -cx_1 - c\delta_0 + Q = -cx_1$; следовательно, дифференциальное уравнение колебаний, если ввести обозначение (2), примет вид

$$m\ddot{x}_1 = -cx_1 \text{ или } \ddot{x}_1 + k^2x_1 = 0. \quad (45)$$

Уравнение (45) в точности совпадает с уравнением (3), следовательно, совпадут и законы этих колебаний, с той лишь разницей, что центром колебаний, описываемых уравнением (3), является точка O , а для колебаний, описываемых уравнением (45), центром колебаний будет точка O_1 (амплитуда и начальная фаза колебаний определяются в каждом случае своими начальными условиями). При другом направлении силы Q центр O_1 будет левее точки O .

Таким образом, влияние постоянной силы Q на свободные колебания точки сводится к тому, что центр колебаний смещается в сторону действия силы на величину

$$\delta_0 = \frac{Q}{c}. \quad (46)$$

Частота, а следовательно, и период колебаний при этом не изменяются.

5. Затухающие колебания при постоянном трении. Рассмотрим часто встречающийся на практике случай колебаний точки под действием восстанавливающей (упругой) силы $F_x = -cx$ и направленной против движения постоянной силы трения fN , где f — динамический коэффициент трения, N — нормальное давление. Примером могут служить колебания груза, прикрепленного к горизонтальной пружине и скользящего вдоль шероховатой горизонтальной плоскости.

Пусть в начальный момент точка находится в положении M_0 на расстоянии a_0 от притягивающего центра O (конца ненапряженной пружины) и начинает движение без начальной скорости (рис. 345, а). Во все время движения точки до крайнего левого положения M_1 на нее, кроме упругой силы, действует постоянная сила fN , направленная вправо. Следовательно, согласно результатам п. 4, движение точки на отрезке M_0M_1 будет гармоническим колебанием около

центра O_1 , который, согласно равенству (46), смещен от центра O вправо на величину

$$\delta_0 = \frac{fN}{c}. \quad (47)$$

Частота этого колебания определяется формулой (2).

Вычислим расстояние $OM_1 = a_1$ от притягивающего центра O до крайнего левого положения, куда придет точка в конце первого размаха колебаний. Так как центром этого колебания является O_1 , то $O_1M_0 = O_1M_1$ или $a_0 - \delta_0 = a_1 + \delta_0$, откуда

$$a_1 = a_0 - 2\delta_0.$$

Из положения M_1 точка начинает двигаться вправо (рис. 345, б). При этом, кроме восстанавливающей силы, на нее действует постоянная сила трения fN , которая теперь будет направлена влево. Следовательно, движение на отрезке M_1M_2 будет гармоническим колебанием с той же частотой k , но около центра O_2 , смещенного влево на расстояние $OO_2 = \delta_0$. Тогда $O_2M_1 = O_2M_2$ или $a_1 - \delta_0 = a_2 + \delta_0$, откуда $a_2 = a_1 - 2\delta_0$. Следовательно, к концу второго размаха точка придет в положение M_2 , находящееся от притягивающего центра O на расстоянии

$$a_2 = a_1 - 2\delta_0 = a_0 - 2 \cdot 2\delta_0.$$

Продолжая аналогичные расчеты, найдем, что к концу n -го колебания точка будет находиться от притягивающего центра O на расстоянии

$$a_n = a_0 - 2n\delta_0 \quad (48)$$

(справа при n четном и слева при n нечетном).

Таким образом, при действии постоянной силы трения колебания точки будут затухающими. Размахи этих колебаний, как видно из равенства (48), будут убывать по закону арифметической прогрессии с разностью $2\delta_0$ (в отличие от затухания при сопротивлении, пропорциональном скорости, где размахи убывают по геометрической прогрессии). Частота же рассматриваемых затухающих колебаний совпадает с частотой собственных колебаний k .

Колебания прекратятся, как только остановка точки, т. е. положение M_n , придется в так называемой «мертвой зоне», т. е. в зоне, где восстанавливающая сила $-cx$ будет численно меньше статической силы трения f_0N . Границы $\pm h$ этой зоны находятся из равенства

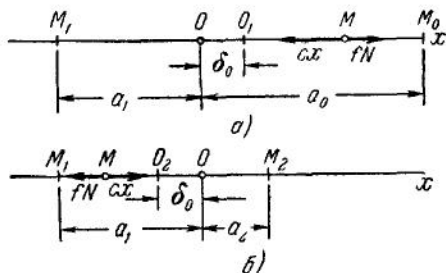


Рис. 345.

$ch = f_0 N$ (так как вообще $f_0 \neq f$, то $h \neq \delta_0$); следовательно,

$$h = \frac{f_0 N}{c}. \quad (49)$$

Число s размахов, которые точка проделает до остановки, найдется из условия $a_{s-1} > h$, $a_s < h$ или $a_0 - 2(s-1)\delta_0 > h$, $a_0 - 2s\delta_0 < h$, откуда

$$\frac{a_0 - h}{2\delta_0} + 1 \geq s \geq \frac{a_0 - h}{2\delta_0}. \quad (50)$$

Графически закон этих колебаний показан на рис. 346, где ab , bc , cd , ... представляют собой отрезки синусоид, определяющих закон движения на каждом размахе.

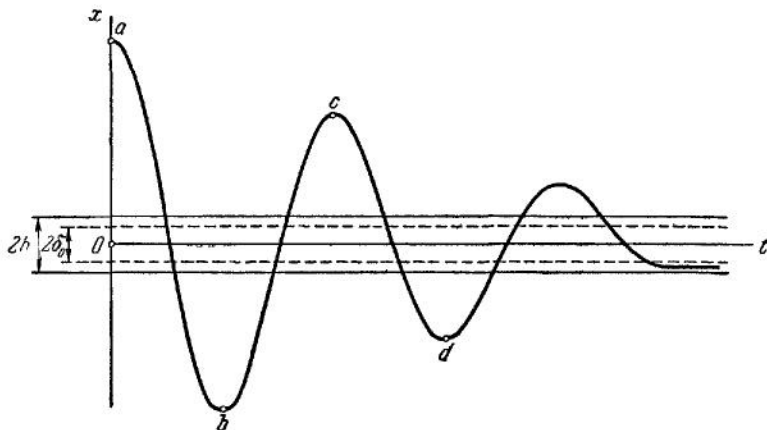


Рис 346.

Пример. Пусть груз весом $P = 2 \text{ кг}$, прикрепленный к пружине с жесткостью $c = 1 \text{ кг/см}$, совершает колебания на горизонтальной плоскости, причем динамический и статический коэффициенты трения груза о плоскость соответственно равны $f = 0,15$ и $f_0 = 0,18$, а начальное отклонение $a_0 = 8 \text{ см}$. Тогда $N = P$, $\delta_0 = 0,3 \text{ см}$, $h_0 = 0,36 \text{ см}$ и неравенство (50) дает $13,7 \geq s \geq 12,7$. Следовательно, груз совершит до остановки 13 колебаний. Размахи колебаний убывают каждый раз на $2\delta_0 = 0,6 \text{ см}$. Таким образом, к концу 13-го колебания (нечетного) $a_{13} = 0,2 \text{ см}$ и груз остановится слева от центра O , т. е. в положении, когда пружина будет сжата на $0,2 \text{ см}$. Частота этих колебаний $k \approx 2,2 \text{ 1/сек}$, а период $T \approx 2,9 \text{ сек}$.

§ 36. Движение свободной материальной точки в однородном поле тяжести

1. Уравнения движения тяжелой материальной точки в безвоздушном пространстве. Пусть материальная точка движется в однородном поле тяжести под действием одной только силы тяжести mg постоянной по численной величине и направлению. Найдем уравнения

движения точки в декартовой системе координат, считая ось z направленной параллельно силе по вертикали вверх (см. рис. 347). Дифференциальные уравнения движения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= -mg. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Интегрируя уравнения (1), получим три первых интеграла:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= c_1, \\ \dot{y} &= c_2, \\ \dot{z} &= -gt + c_3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Интегрируя еще раз, найдем общее решение

$$\left. \begin{aligned} x &= c_1t + c_4, \\ y &= c_2t + c_5, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + c_3t + c_6. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Полученные уравнения дают в зависимости от значений произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_6 целый класс движений. В каждом конкретном случае эти постоянные можно определить, зная начальные условия, и найти, таким образом, закон соответствующего движения.

Рассмотрим два частных случая движения тяжелой материальной точки в безвоздушном пространстве при различных начальных условиях.

2. Движение тяжелой материальной точки, брошенной вертикально вверх. Пусть точка в начальный момент находится в начале координат и имеет скорость v_0 , направленную вертикально вверх. Этому предположению соответствуют начальные условия:

$$\text{при } t=0 \left\{ \begin{aligned} x &= y = z = 0, \\ \dot{x} &= \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = v_0. \end{aligned} \right.$$

Подставляя эти начальные данные в уравнения (2) и (3), определим произвольные постоянные:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = 0, \\ c_3 &= v_0, \\ c_4 &= c_5 = c_6 = 0, \end{aligned}$$

и будем иметь для этого случая закон движения:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ z &= v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

т. е. движение будет прямолинейным; оно будет равномерно замедленным до момента, когда скорость $\dot{z} = v_0 - gt$ обратится в нуль, а затем — равномерно ускоренным.

3. Движение тяжелой материальной точки, брошенной под углом к горизонту. Пусть точка в начальный момент находится в начале координат и имеет скорость v_0 , лежащую в плоскости Oxz и направленную под углом α к горизонту (рис. 347). В этом случае начальные условия будут:

$$\text{при } t=0 \quad \left\{ \begin{aligned} x &= y = z = 0, \\ \dot{x} &= v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = v_0 \sin \alpha. \end{aligned} \right.$$

Подставляя эти начальные данные в уравнения (2) и (3), найдем для постоянных интегрирования значения:

$$\begin{aligned} c_1 &= v_0 \cos \alpha, & c_3 &= v_0 \sin \alpha, \\ c_2 &= 0, & c_4 &= c_5 = c_6 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, закон движения точки определяется уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 t \cos \alpha, \\ y &= 0, \\ z &= v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

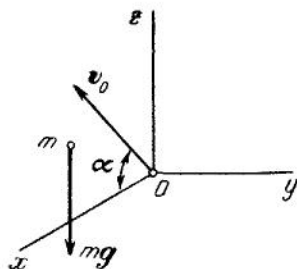


Рис. 347.

Из этих уравнений видно, что траекторией точки будет некоторая кривая, лежащая в плоскости Oxz . Независимо от уравнений (5), это заключение вытекает непосредственно из того, что направление силы, действующей на точку, постоянно.

Найдем уравнение этой траектории в непараметрической форме. Для этого исключим t из уравнений (5). Из первого уравнения получим:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha};$$

подставляя это выражение в последнее уравнение, найдем:

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (6)$$

Как видим, траекторией является парабола с осью, параллельной оси z , проходящая через начало координат. Угол α , который образует начальная скорость с горизонтальной плоскостью, называется углом бросания.

Исследуем некоторые свойства рассматриваемого движения.

а) Найдем горизонтальную дальность полета, т. е. отрезок OA (рис. 348). Для этого определим точки пересечения траектории (6) с осью Ox . Полагая $z = 0$, получим:

$$x \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0.$$

Отсюда найдем две точки пересечения: $x_1 = 0$, т. е. начало координат, и

$$x_2 = OA = \frac{2v_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (7)$$

Это и будет искомая горизонтальная дальность.

Очевидно, что при данной начальной скорости v_0 она будет наибольшей, когда

$$\sin 2\alpha = 1,$$

т. е. при $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Заметим, что при угле бросания $\alpha = 45^\circ$ точка будет иметь наибольшую горизонтальную дальность в безвоздушном пространстве; в воздухе этот угол α будет несколько меньше.

Так как

$$\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha),$$

то, положив $\pi - 2\alpha = 2\beta$, найдем,

что для угла $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta,$$

откуда видно, что при углах бросания α и $\beta = 90^\circ - \alpha$ горизонтальная дальность будет одинакова (см. рис. 348). Говоря иначе, горизонтальная дальность будет одинакова независимо от того, направим мы начальную скорость под углом α к горизонту или к вертикали (настильная и навесная траектории).

б) Найдем теперь максимальную высоту подъема точки при данном угле бросания α ; для этого нужно найти максимум z , т. е. приравнять нулю производную $\frac{dz}{dx}$. Используя уравнение (6), получим:

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

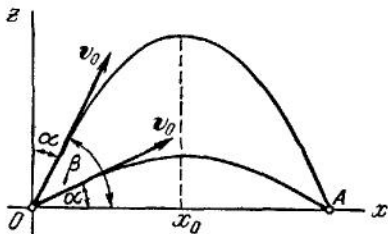


Рис. 348.

откуда следует, что z будет иметь максимум при

$$x_0 = \frac{v_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

(что z имеет максимум, видно по знаку $\frac{d^2z}{dx^2}$). Подставив это значение x_0 в уравнение (6), найдем:

$$z_{\max} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} - \frac{g v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{2g^2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

или, после упрощений,

$$H = z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha. \quad (8)$$

Отсюда видно, что при данной начальной скорости v_0 наибольшая высота подъема будет, когда $\alpha = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда начальная скорость направлена вертикально вверх; в этом случае

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (8')$$

в) Найдем, наконец, время движения T из точки O в точку A . Подставляя в первое из уравнений (5) вместо x величину горизонтальной дальности x_2 , определяемую равенством (7), получим, что

$$T = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha. \quad (9)$$

4. Парабола безопасности. Из предыдущего видно, что для различных углов бросания при одной и той же начальной скорости мы будем иметь траектории движения точек в виде парабол, лежащих в плоскости Oxz , причем для предельных парабол

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, \quad z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Если построить огибающую семейства парабол (6), то мы получим некоторую кривую, которая ограничит ту часть плоскости, куда может попасть точка, если ей сообщена некоторая начальная скорость v_0 , под каким бы углом к горизонту последняя ни была направлена. Найдем уравнение этой кривой.

Для нахождения огибающей семейства кривых $z = f(x, \alpha)$ нужно исключить параметр α из уравнений

$$z = f(x, \alpha) \quad \text{и} \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = f'(x, \alpha) = 0.$$

Для удобства мы примем в уравнении (6) за переменный параметр не угол α , а $p = \operatorname{tg} \alpha$; тогда, заметив, что

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + p^2,$$

мы получим уравнение (6) в виде

$$z = px - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + p^2). \quad (10)$$

Присоединим к нему уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial p} = x - \frac{pgx^2}{v_0^2} = 0 \quad (11)$$

и исключим из уравнений (10) и (11) параметр p . Из уравнения (11) получаем:

$$p = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Подставляя это значение p в равенство (10), после упрощений найдем искомое уравнение огибающей в виде

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (12)$$

Таким образом, огибающая будет параболой с осью, параллельной оси z (рис. 349). Эта парабола называется *параболой безопасности*. Легко видеть, что она пройдет через точки наибольшей дальности и наибольшей высоты подъема.

Действительно, полагая $z = 0$, получим из уравнения (12)

$$x^2 \frac{g}{2v_0^2} = \frac{v_0^2}{2g}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{v_0^2}{g} = x_{\max},$$

полагая $x = 0$, найдем:

$$z = \frac{v_0^2}{2g} = z_{\max}.$$

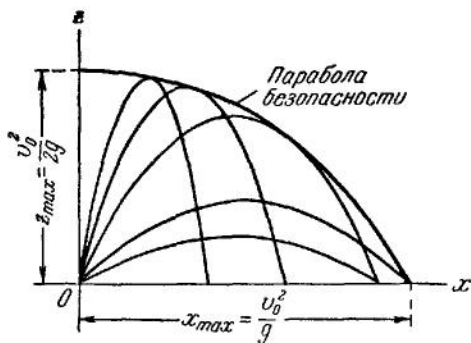


Рис. 349.

§ 37. Движение свободной материальной точки под действием центральных сил

1. Закон площадей. Если действующая на точку сила является центральной и начало координат взято в центре, через который проходит линия действия силы, то $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$. Тогда теорема об изменении

момента количества движения

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

дает первый интеграл

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что траектория точки, движущейся под действием центральной силы, есть плоская кривая, а движение точки происходит по закону площадей, т. е. с постоянной секторной скоростью или, иначе говоря, так, что радиус-вектор точки, проведенный из центра силы, в любые равные промежутки времени описывает равные площади (см. § 33, п. 2).

Из равенства (1) находим, что закон площадей может быть выражен уравнением

$$|\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = 2 \frac{d\sigma}{dt} = c, \quad (2)$$

где $\frac{d\sigma}{dt}$ есть секторная скорость точки, а c — постоянная, называемая постоянной площадей.

Значение c определяется начальными данными. Если в начальный момент $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, то

$$c = |\text{мом}_O(\mathbf{v}_0)| = r_0 v_0 \sin(\widehat{\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0}). \quad (3)$$

Поскольку при движении под действием центральной силы траектория точки есть плоская кривая, то для изучения движения можно пользоваться полярными координатами r и φ , что значительно упрощает все расчеты.

В полярных координатах, как было показано в § 6, п. 6,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

и уравнение (2), выражающее закон площадей, примет вид

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c. \quad (4)$$

2. Скорость материальной точки, движущейся под действием центральной силы. Известно, что в полярных координатах r и φ скорость точки выражается формулой

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad (5)$$

где

$$\frac{dr}{dt} = v_r \quad \text{и} \quad r \frac{d\varphi}{dt} = v_p \quad (6)$$

суть соответственно радиальная и трансверсальная проекции скорости. Преобразуем выражения (6), исключив из них время t с помощью равенства (4). Тогда получим:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r^2} \frac{dr}{d\varphi},$$

$$v_p = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r}.$$

Введем новое переменное

$$u = \frac{1}{r}. \quad (7)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}, \quad (8)$$

будем иметь

$$v_r = -c \frac{du}{d\varphi}, \quad v_p = cu \quad (9)$$

и окончательно найдем для скорости точки, движущейся под действием центральной силы, выражение

$$v^2 = c^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]. \quad (10)$$

3. Дифференциальные уравнения движения точки под действием центральной силы. Формула Бинэ. Для получения названных уравнений обратимся к теореме об изменении кинетической энергии точки. Так как в случае центральной силы (рис. 350) элементарная работа $F \cdot dr = F_r dr$, где $F_r = F$ для отталкивающей силы и $F_r = -F$ для силы притягивающей [см. § 33, формула (51)], то будем иметь:

$$d \left(\frac{mv^2}{2} \right) = F_r dr,$$

или, деля обе части этого равенства на $d\varphi$,

$$\frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{d\varphi} = F_r \frac{dr}{d\varphi}.$$

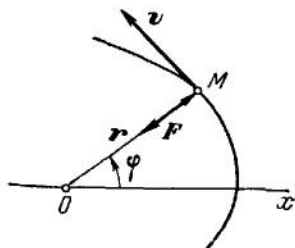


Рис. 350

Заменяя здесь v^2 выражением, даваемым равенством (10), найдем:

$$\frac{c^2 m}{2} \frac{d}{d\varphi} \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] = F_r \frac{dr}{d\varphi}.$$

Отсюда, учитывая, что, согласно равенству (8),

$$\frac{dr}{d\varphi} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi},$$

получим:

$$\frac{m}{2} c^2 \left[2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} \right] = -F_r \frac{1}{u^2} \frac{du}{d\varphi}.$$

Сократив обе части на $\frac{du}{d\varphi}$ и умножив на u^2 , найдем окончательно:

$$m c^2 u^2 \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u \right) = -F_r \quad (11)$$

Полученное уравнение называют формулой Бинэ (Binet).

В общем случае в этом уравнении $F_r = F_r(r, \varphi, v_r, v_\varphi, t)$ или, как видно из (7) и (9), $F_r = F_r\left(u, \varphi, \frac{du}{d\varphi}, t\right)$. Присоединяя сюда уравнение (4), выражающее закон площадей, которое можно представить в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = cu^2, \quad (12)$$

получим систему двух дифференциальных уравнений (11) и (12), из которых, зная F_r , можно определить зависимость r и φ от t , т. е. найти закон движения точки под действием центральной силы.

Особый интерес представляет случай, когда сила F явно не зависит от времени. Тогда уравнение (11), связывающее F_r с координатами r и φ , будет представлять собой дифференциальное уравнение траектории точки. Из него можно непосредственно определить, под действием какой центральной силы точка может описывать данную траекторию, и, наоборот, найти, какую траекторию точка опишет под действием данной центральной силы.

Закон движения точки вдоль траектории найдется при этом из уравнения (12).

Полученные уравнения играют важную роль при изучении движения в поле тяготения Солнца или планет (небесная механика, динамика ракет, космонавтика).

4. Движение по окружности. Начнем с рассмотрения простейшего примера. Найдем закон центральной силы, под действием которой точка будет двигаться по окружности $r = a = \text{const}$, где a — радиус окружности. Подставляя это значение r в формулу Бинэ, получим

$$F_r = -m c^2 u^3 = -\frac{m c^2}{a^3}.$$

Следовательно, сила по модулю постоянна. Из формулы (10) видно, что численная величина скорости точки в этом случае также постоянна и равна

$$v = cu = \frac{c}{a}.$$

Исключая из двух полученных равенств постоянную c , найдем, что

$$F_r = -\frac{mv^2}{a}.$$

Таким образом, движение свободной материальной точки массы m по окружности радиуса a происходит с постоянной скоростью $v = v_0$ под действием постоянной притягивающей силы, равной $\frac{mv^2}{a}$; эту силу называют еще центростремительной силой.

Б. Движение планет. Закон всемирного тяготения. В основе небесной механики лежат три закона, открытых Кеплером (1571—1630). Эти законы были им получены из многочисленных наблюдений астронома Тихо Браге над движением планет и состоят в следующем:

1) Все планеты (и кометы) описывают вокруг Солнца плоские орбиты, следуя закону площадей.

2) Орбиты эти суть конические сечения, в одном из фокусов которых находится Солнце.

3) Квадраты звездных времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Из законов Кеплера Ньютон нашел закон, по которому изменяется сила, действующая на планету при ее движении вокруг Солнца, а затем пришел к закону всемирного тяготения.

Покажем, как может быть решена задача динамики, состоящая в том, чтобы, зная закон данного движения (законы Кеплера), определить действующую силу. Из первого закона Кеплера непосредственно вытекает, что действующая на планеты сила есть сила центральная, направление которой проходит через центр Солнца (см. § 33, п. 2). Из второго закона легко найти, что сила, действующая на планеты, будет силой, притягивающей их к Солнцу обратно пропорционально квадрату расстояния. Для этого воспользуемся формулой Бинэ.

Как известно, уравнение конического сечения в полярных координатах будет:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad \text{или} \quad u = \frac{1 + e \cos \varphi}{p}, \quad (13)$$

где e есть эксцентриситет, а p — параметр, причем в случае эллипса или гиперболы

$$p = \frac{b^2}{a},$$

где a и b — соответственно большая и малая полуоси.

Так как по второму закону Кеплера орбита есть коническое сечение, то, подставив из уравнения (13) значение u в формулу Бинэ,

найдем действующую силу. Произведя подстановку, получим:

$$\frac{mc^2u^2}{\rho} [-e \cos \varphi + 1 + e \cos \varphi] = -F_r,$$

откуда

$$F_r = -\frac{c^2mu^2}{\rho}.$$

Введем обозначение

$$\frac{c^2}{\rho} = \mu, \quad (14)$$

где μ носит название постоянной Гаусса. Тогда, так как $u = \frac{1}{r}$, получим

$$F_r = -\mu \frac{m}{r^2}. \quad (15)$$

Таким образом, действующая сила F будет силой притягивающей, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния от притягивающего центра.

Из третьего закона Кеплера следует, что постоянная μ будет одна и та же для всех тел солнечной системы. Действительно, третий закон Кеплера можно представить в виде

$$\frac{a^3}{T^2} = \text{const} \text{ или } \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \text{const}. \quad (16)$$

Согласно равенству (2), постоянная площадей c равна удвоенной секторной скорости, т. е. удвоенному отношению описанной радиусом-вектором площади к соответствующему времени. Так как площадь эллипса равна πab , то в нашем случае

$$c = \frac{2\pi ab}{T} \text{ и } c^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2}.$$

Введя сюда параметр $\rho = \frac{b^2}{a}$, получим:

$$c^2 = \frac{4\pi^2 a^3 \rho}{T^2},$$

откуда

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \frac{c^2}{\rho}.$$

Но из предыдущего $\frac{c^2}{\rho} = \mu$, и мы, согласно (16), получим:

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = \text{const}. \quad (17)$$

Следовательно, коэффициент μ (постоянная Гаусса) есть величина, одинаковая для всех тел, движущихся под действием притягивающей силы Солнца, и поэтому должна зависеть только от массы Солнца.

Из предыдущего легко вывести открытый Ньютоном закон всемирного тяготения. Для тел, движущихся под действием притяжения Земли, существует своя гауссова постоянная. Назовем ее λ . Сила, с которой Солнце притягивает Землю, будет:

$$F_{r1} = -\frac{\mu m}{r^2}, \quad (18)$$

где m есть масса Земли. Сила же, с которой Земля притягивает Солнце, равна

$$F_{r2} = -\frac{\lambda M}{r^2}, \quad (18')$$

где M есть масса Солнца. По закону равенства действия и противодействия имеем:

$$F_{r1} = F_{r2} \text{ или } \frac{\mu m}{r^2} = \frac{\lambda M}{r^2},$$

откуда

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = \frac{\lambda_n}{m_n} = \text{const},$$

где $\frac{\lambda_n}{m_n}$ есть отношение гауссовой постоянной любой планеты к ее массе.

Следовательно, отношение гауссовой постоянной любого тела к его массе есть величина постоянная, называемая *гравитационной постоянной*. Обозначим гравитационную постоянную буквой f , тогда

$$\frac{\mu}{M} = \frac{\lambda}{m} = f,$$

откуда

$$\mu = fM, \quad \lambda = fm.$$

Подставляя это значение μ в уравнение (18) или значение λ в уравнение (18') и обозначая $|F_{r1}| = |F_{r2}| = F$, получим:

$$F = f \frac{Mm}{r^2}. \quad (19)$$

Эта формула выражает закон всемирного тяготения: *два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.*

Размерность гравитационной постоянной в абсолютной системе будет:

$$[f] = \frac{M \cdot L \cdot L^2}{T^2 \cdot M^2} = \frac{L^3}{MT^2}.$$

В системе СИ

$$f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг сек}^2.$$

При определении силы, действующей на точку, которая движется по законам Кеплера, мы брали уравнение конического сечения

в виде (13), учитывая, что по второму закону Кеплера притягивающий центр находится в одном из фокусов. Можно решить более общую задачу: найти закон центральной силы, зависящей только от положения точки, под действием которой точка при произвольных начальных условиях описывает некоторое коническое сечение. В такой постановке задача была решена Бертраном, который нашел, что сила в этом случае будет притягивающая или прямо пропорциональна расстоянию или обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра.

Кёниг поставил задачу еще шире, а именно: найти закон силы $f(r)$, под действием которой точка описывает алгебраическую кривую при любых начальных условиях. Решение этой задачи привело Кёнигса к такому же результату.

Наблюдения над двойными звездами показывают, что звезда-спутник движется около главной звезды по эллипсу, в фокусе которого находится главная звезда, следовательно, здесь имеет место ньютонов закон притяжения. Если бы имел место закон притяжения пропорционально расстоянию, то главная звезда находилась бы в центре орбиты спутника, что противоречит наблюдениям.

✓ 6. **Удвижение материальной точки в ньютоновом поле тяготения. Определение траектории.** Найдем траекторию материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния (задача Ньютона).

Для решения этой задачи воспользуемся формулой Бинэ, полагая

$$F_r = -\frac{\mu m}{r^2} = -\mu t u^2;$$

получим уравнение

$$m c^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = \mu t u^2,$$

или, деля обе части на $m c^2 u^2$,

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2}. \quad (20)$$

Общее решение этого уравнения будет:

$$u = \frac{\mu}{c^2} + \alpha \cos(\varphi + \varepsilon),$$

где α и ε суть постоянные интегрирования.

Введем в соответствии с равенством (14) обозначение

$$p = \frac{c^2}{\mu}. \quad (21)$$

Тогда, вынося множитель $\frac{\mu}{c^2} = \frac{1}{p}$ за скобку и вводя вместо α новое постоянное $e = p\alpha$, получим:

$$u = \frac{1 + e \cos(\varphi + \varepsilon)}{p}. \quad (22)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (13), мы видим, что траекторией точки будет коническое сечение (эллипс, парабола или гипербола), один из фокусов которого совпадает с притягивающим центром O . Конкретный вид траектории зависит от значений постоянных интегрирования e и ε , т. е. от начальных условий.

Заметим прежде всего, что надлежащим выбором начала отсчета угла φ , т. е. полярной оси, можно сделать $\varepsilon = 0$. Тогда

$$u = \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (23)$$

Так как при $\varphi = 0$ косинус имеет наибольшее значение, то, следовательно, полагая $\varepsilon = 0$, мы условливаемся отсчитывать угол φ от той точки траектории, для которой u имеет максимум, а r — минимум, т. е. от точки P орбиты, ближайшей к притягивающему центру (рис. 351) и называемой перигентром¹⁾ (от греч. *περί* — возле). Положение этой точки наперед не известно и подлежит определению по начальным данным.

Из уравнения (23) имеем:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{e}{p} \sin \varphi. \quad (24)$$

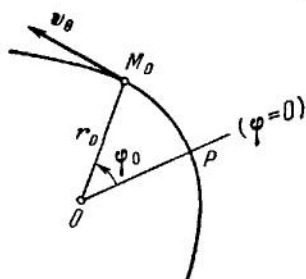


Рис. 351

Пусть в начальном положении M_0 точка находится от притягивающего центра на расстоянии r_0 и имеет начальную скорость v_0 (см. рис. 351). При этом $\angle POM_0 = \varphi_0$ и есть подлежащий определению угол, указывающий положение перигентра P по отношению к начальному положению точки M_0 . Тогда, находя начальное значение $\frac{du}{d\varphi}$ из равенства (10), будем иметь следующие начальные условия:

$$\text{при } \varphi = \varphi_0 \quad u = u_0 = \frac{1}{r_0}, \quad \left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = -\sqrt{\frac{v_0^2}{c^2} - u_0^2}. \quad (25)$$

Мы берем перед корнем знак минус, считая скорость v_0 направленной так, что знаки v_r и v_φ , а следовательно, и $(dr)_0$, $(d\varphi)_0$, одинаковы; тогда, как видно из равенства (8) должно быть $\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 < 0$.

¹⁾ При движении вокруг Солнца перигентр называют перигелием (греч. *ἥλιος* — Солнце), а при движении вокруг Земли — перигеем (греч. *γῆ* — Земля). Точку эллиптической орбиты, наиболее удаленную от Солнца или Земли, называют соответственно афелием или апогеем (греч. *ἀλό* — вдали).

Подставляя начальные данные (25) в уравнения (23) и (24), получим:

$$u_0 = \frac{1 + e \cos \varphi_0}{p}, \quad \frac{1}{c} \sqrt{v_0^2 - c^2 u_0^2} = \frac{e}{p} \sin \varphi_0.$$

Заменяя здесь p его значением из формулы (21), будем иметь:

$$e \sin \varphi_0 = \frac{c}{\mu} \sqrt{v_0^2 - c^2 u_0^2}, \quad e \cos \varphi_0 = \frac{c^2}{\mu} u_0 - 1. \quad (26)$$

Отсюда, деля сначала равенства (26) почленно друг на друга, а затем возводя их в квадрат и складывая, найдем окончательно:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{c \sqrt{v_0^2 - c^2 u_0^2}}{c^2 u_0 - \mu}, \quad (27)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\mu^2} (v_0^2 - 2\mu u_0)}. \quad (28)$$

Значение входящей сюда постоянной площадей c вычисляется по начальным условиям согласно равенству (3).

Формула (27) дает значение угла φ_0 , определяющего положение перицентра траектории по отношению к начальному радиусу-вектору r_0 ; [значение этого угла уточняется равенствами (26)]. Постоянная e , дающая величину эксцентриситета траектории, определяется из равенства (28). Как видим, значение e зависит от знака величины

$$h = v_0^2 - 2\mu u_0 = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \quad (29)$$

Установим физический смысл этой величины. Принимая во внимание, что потенциальная энергия V точки в поле тяготения определяется формулой (57) из § 33, вычислим полную начальную энергию этой точки. Получим:

$$E_0 = \frac{mv_0^2}{2} + V_0 = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\mu m}{r_0} = \frac{m}{2} \left(v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} \right).$$

Следовательно, h есть величина, пропорциональная полной начальной энергии точки, и вид траектории зависит от знака начальной энергии:

если $h < 0$, т. е. $v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}$, то $e < 1$ и траектория — эллипс;

если $h = 0$, т. е. $v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}$, то $e = 1$ и траектория — парабола;

если $h > 0$, т. е. $v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}$, то $e > 1$ и траектория — гипербола.

Чтобы точка могла неограниченно удаляться от притягивающего центра, ее начальная скорость должна быть не меньше параболической.

ческой скорости $v_{II} = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$. Как видим, скорость v_{II} , называемая еще скоростью освобождения, прямо пропорциональна корню квадратному из гауссовой постоянной μ данного поля и обратно пропорциональна корню из начального расстояния r_0 .

7. Определение закона движения вдоль орбиты. Уравнение Кеплера. Чтобы определить закон движения точки вдоль ее орбиты, обратимся к уравнению (4) или (12)

$$\frac{d\varphi}{dt} = cu^2.$$

Заменяя здесь величину u ее значением из уравнения траектории (23), будем иметь:

$$dt = \frac{p^2}{c} \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2},$$

откуда

$$t - t_0 = \frac{p^2}{c} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \quad (30)$$

где t_0 — момент прохождения через перигеум.

Для вычисления интеграла начнем с обычной подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \eta. \quad (31)$$

Тогда

$$\cos \varphi = \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2}, \quad d\varphi = \frac{2 d\eta}{1 + \eta^2} \quad (32)$$

и мы получим после несложных преобразований

$$\frac{d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{2(1 + \eta^2) d\eta}{(1 + e)^2 \left(1 + \frac{1 - e}{1 + e} \eta^2\right)^2}. \quad (33)$$

Рассмотрим сначала случай, когда движение происходит по эллиптической орбите и $e < 1$. Положим тогда

$$\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = k \quad \text{и} \quad \vartheta = k\eta, \quad (34)$$

где новое переменное ϑ есть в свою очередь половина тангенса некоторого угла E . Таким образом, по аналогии с (31) и (32) будет:

$$\vartheta = \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad d\vartheta = \left(\frac{1 + \vartheta^2}{2}\right) dE, \quad \cos E = \frac{1 - \vartheta^2}{1 + \vartheta^2}. \quad (35)$$

Тогда равенство (33) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{(1+e \cos \varphi)^2} &= \frac{2(k^2 + \vartheta^2) d\vartheta}{k^3(1+e)^2(1+\vartheta^2)^2} = \frac{1-e+(1+e)\vartheta^2}{k^3(1+e)^3(1+\vartheta^2)} dE = \\ &= \frac{1}{k^3(1+e)^3} \left(1 - e \frac{1-\vartheta^2}{1+\vartheta^2}\right) dE = \frac{1-e \cos E}{(1-e^2)^{3/2}} dE. \end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в правую часть равенства (30) и вычисляя интеграл, получим окончательно:

$$E - e \sin E = \lambda(t - t_0), \quad (36)$$

где обозначено

$$\lambda = \frac{c(1-e^2)^{3/2}}{p^2}, \quad (37)$$

и, согласно равенствам (31), (34), (35),

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (38)$$

В небесной механике угол φ называют истинной аномалией, а угол E — эксцентрической аномалией. Уравнение (36), устанавливающее зависимость между эксцентрической аномалией и временем, называется уравнением Кеплера. Система уравнений (23) и (36) позволяет найти r и φ в любой момент времени, т. е. определить закон движения точки в рассматриваемом случае.

Если обозначить период обращения через T , то при $\varphi = \pi$ промежуток времени $(t - t_0) = \frac{T}{2}$, а $\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \infty$ и $E = \pi$. Следовательно, уравнение (36) дает $2\pi = \lambda T$. Отсюда получаем выражение λ через период обращения

$$\lambda = \frac{2\pi}{T}. \quad (39)$$

Таким образом, уравнение Кеплера можно еще представить в виде

$$E - e \sin E = \frac{2\pi}{T}(t - t_0), \quad (40)$$

где, как уже указывалось, t_0 — момент прохождения перигея.

При движении по *параболической орбите* мы, полагая в равенстве (33) $e = 1$ и вычисляя интеграл (30), сразу найдем:

$$t - t_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}. \quad (41)$$

Рассмотрим теперь случай *гиперболической орбиты* $e > 1$. Из уравнения траектории (23) видно, что при изменении угла φ от нуля до значения φ^* , определяемого равенством $e \cos \varphi^* = -1$, точка переместится по соответствующей ветви гиперболы от перигея до бесконечности (угол φ^* дает направление асимптоты гиперболы).

Как видно из соотношений (34), закон движения вдоль этой ветви гиперболы можно найти, полагая в равенствах (36) — (38) $E = iE_1$ и учитывая, что $\sin iE_1 = i \operatorname{sh} E_1$, $\operatorname{tg} iE_1 = i \operatorname{th} E_1$. Тогда для определения закона движения получим уравнение

$$e \operatorname{sh} E_1 - E_1 = \lambda_1 (t - t_0), \quad (42)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{c(e^2 - 1)^{3/2}}{p^2}, \quad \operatorname{th} \frac{E_1}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \quad (43)$$

Последнее из соотношений (43) при изменении угла φ в интервале $0 \leq \varphi \leq \varphi^*$ всегда имеет место, так как если $e \cos \varphi \geq -1$, то

$$\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \leq 1,$$

в чем легко убедиться, выражая $\cos \varphi$ через $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$.

8. Задача двух тел. Поправка к третьему закону Кеплера.

Во всех предыдущих расчетах притягивающий центр (Солнце) считался неподвижным по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета (к звездам). Уточним полученные результаты, принимая во внимание взаимное притяжение Солнца S и движущейся вокруг него планеты P , и считая расстояние между этими телами столь большим по сравнению с их размерами, что тела можно рассматривать как материальные точки.

Пусть r_P есть радиус-вектор планеты P относительно некоторой инерциальной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$, а r_S — радиус-вектор Солнца относительно той же системы отсчета (рис. 352). Массы Солнца и планеты обозначим соответственно через M и m ; тогда уравнение движения Солнца относительно системы отсчета $Ox_1y_1z_1$ будет:

$$M \frac{d^2 r_S}{dt^2} = - \frac{fMm}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (44)$$

а уравнение движения планеты относительно той же системы отсчета

$$m \frac{d^2 r_P}{dt^2} = - \frac{fMm}{r^2} \frac{r}{r}, \quad (45)$$

где $r = \overline{SP}$ — радиус-вектор планеты P по отношению к Солнцу S или, точнее, по отношению к системе осей $Sxyz$, которые

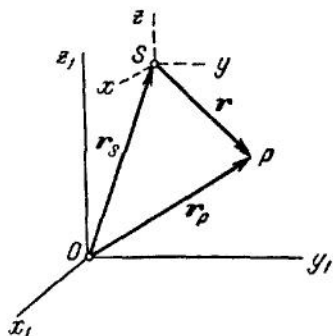


Рис. 352.

перемещаются вместе с точкой S поступательно по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$. Умножая обе части уравнения (44) на m , а уравнения (45) на M и вычитая затем почленно из уравнения (45) уравнение (44), будем иметь:

$$Mm \left(\frac{d^2 \mathbf{r}_P}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{r}_S}{dt^2} \right) = - \frac{fmM}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} (M + m).$$

Отсюда, так как $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_S = \mathbf{r}$, получаем, сокращая на M ,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{fm(M+m)}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = - \frac{\mu' m}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}; \quad (46)$$

где

$$\mu' = f(M + m). \quad (47)$$

В уравнениях (44) и (45) при вычислении производных от \mathbf{r}_S и \mathbf{r}_P рассматривается изменение этих векторов относительно осей $Ox_1y_1z_1$; следовательно, и в уравнении (46) производная от \mathbf{r} берется по отношению к тем же осям. Но из сказанного в § 13, п. 2 следует, что в данном случае, так как оси $Sxyz$ перемещаются по отношению к системе отсчета $Ox_1y_1z_1$ поступательно, локальная производная в осях $Sxyz$ совпадает с полной производной в осях $Ox_1y_1z_1$.

Следовательно, уравнение (46) описывает движение планеты относительно связанной с Солнцем системы отсчета $Sxyz$, или, как говорят кратко, относительно Солнца. Из этого уравнения видно, что относительное движение планеты вокруг Солнца происходит как движение вокруг неподвижного притягивающего центра, в котором сосредоточена масса, равная не массе Солнца M , как мы считали ранее, а $M + m$, т. е. сумме масс Солнца и движущейся вокруг него планеты. В формулах п. 6 этот результат легко учесть, заменив всюду $\mu = fM$ на $\mu' = f(M + m)$.

Отсюда вытекает также, что гауссова постоянная μ поля тяготения Солнца (планеты) фактически равна не fM , а $f(M + m)$, т. е. не является постоянной и зависит не только от массы притягивающего тела, но и от массы тела, движущегося в поле притяжения; считать $\mu = \text{const}$ можно лишь приближенно в случаях, когда $M \gg m$.

Заметим, наконец, что когда в поле тяготения тела S (Солнца) движется одновременно несколько тел P_i (планет), то точное решение задачи требует учета не только сил притяжения между телами P_i и телом S , но и взаимного притяжения тел P_i . Точное решение возникающей отсюда задачи n тел, т. е. задача о движении n материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, связано с большими математическими трудностями, и его не удалось пока найти с помощью известных в анализе функций даже для случая трех тел.

Исходя из результатов, полученных для задачи двух тел, найдем соответствующую поправку к третьему закону Кеплера. Рассмотрим движение вокруг Солнца двух планет с массами m_1 и m_2 . По формулам (17) и (47) будем иметь:

$$\text{для первой планеты } \frac{4\pi^2 a_1^3}{T_1^2} = \mu_1 = f(M + m_1),$$

$$\text{для второй планеты } \frac{4\pi^2 a_2^3}{T_2^2} = \mu_2 = f(M + m_2).$$

Деля первое равенство на второе, получим:

$$\left(\frac{a_1^3}{T_1^2}\right) : \left(\frac{a_2^3}{T_2^2}\right) = \frac{M + m_1}{M + m_2} = \frac{1 + \frac{m_1}{M}}{1 + \frac{m_2}{M}}, \quad (48)$$

тогда как по третьему закону Кеплера правая часть равенства (48) должна равняться единице. Следовательно, третий закон Кеплера имеет только приближенный характер и справедлив постольку, поскольку массы планет m_1 и m_2 малы по сравнению с массой Солнца M .

9. Движение в поле тяготения Земли. Искусственные спутники и эллиптические траектории. Приложим полученные выше результаты к изучению движения тела в поле тяготения Земли. Будем считать Землю неподвижной, а движущееся тело рассматривать как материальную точку массы m . Сопротивлением воздуха будем пренебрегать, что для рассматриваемых далее высот полета в первом приближении допустимо. Пусть в начальный момент точка находится в положении M_0 на расстоянии $R = OM_0$ от центра Земли (рис. 353) и пусть ускорение силы земного притяжения в точке M_0 равно g . Заметим, что под R мы будем понимать любую величину, большую земного радиуса. В случаях, когда точка M_0 берется на поверхности Земли, мы будем считать R равным радиусу земного экватора, $R_0 = 6378$ км и $g = g_0 = 9,81$ м/сек².

Действующая на точку в положении M_0 сила притяжения равна

$$F_r = -\frac{\mu m}{R^2} = -mg.$$

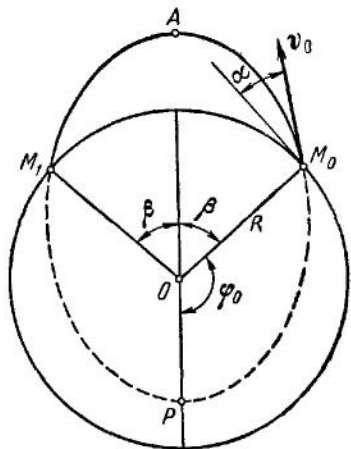


Рис. 353.

Отсюда получаем значение гауссовой постоянной поля земного тяготения, выраженное через R и g :

$$\mu = R^2 g. \quad (49)$$

Допустим далее, что в начальном положении M_0 точка получает начальную скорость v_0 , направленную под углом α к горизонту. Тогда постоянная площадей c будет:

$$c = \text{пот}_0 v_0 = R v_0 \cos \alpha. \quad (50)$$

Траекторией точки является, как было установлено, коническое сечение

$$u = \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (51)$$

где угол φ отсчитывается от перигея P . Параметр p и эксцентриситет e траектории определяются соответственно формулами (21) и (28), а значение угла $\varphi_0 = POM_0$ (см. рис. 353) можно найти из равенств (26). Заменяя везде c и μ их значениями (49) и (50) и учитывая, что $u_0 = 1/R$, получим:

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}, \quad (52)$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2 R^2} (v_0^2 - 2gR)}, \quad (53)$$

$$e \sin \varphi_0 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{gR} \operatorname{tg} \alpha, \quad e \cos \varphi_0 = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{gR} - 1. \quad (54)$$

Из формулы (53) видно, что траекторией будет эллипс ($e < 1$) при $v_0 < \sqrt{2gR}$, парабола ($e = 1$) — при $v_0 = \sqrt{2gR}$ и гипербола ($e > 1$) — при $v_0 > \sqrt{2gR}$.

Параболическая скорость (скорость освобождения) $v_n = \sqrt{2gR}$ представляет собой, как было уже упомянуто, наименьшую начальную скорость, при которой тело может покинуть поле тяготения Земли; ее называют еще *второй космической скоростью*. Если начальное положение M_0 взять на поверхности Земли и положить $R = R_0 = 6378$ км, $g = g_0 = 9,81$ м/сек², то мы получим $v_n \approx 11,2$ км/сек. Тело, получившее начальную скорость $v_0 \geq v_n$, направленную под любым углом α к горизонту, будет неограниченно удаляться от Земли, двигаясь по параболе или гиперболе (при $\alpha = 90^\circ$ — по прямой).

При начальной скорости $v_0 < v_n$ брошенное тело или превращается в искусственного спутника Земли, или падает обратно на Землю. Рассмотрим эти случаи.

1) *Искусственные спутники*. Чтобы тело, брошенное с поверхности Земли, описало вокруг Земли замкнутую кривую, должно быть

в любой точке траектории $r \geq R_0$ или, так как $R_0 = r(\varphi_0)$, то

$$\frac{P}{1+e \cos \varphi} \geq \frac{P}{1+e \cos \varphi_0}.$$

Следовательно, при изменении угла φ от 0 до π должно быть $\varphi \geq \varphi_0$, что возможно лишь при $\varphi_0 = 0$. Итак, перигей искусственного спутника совпадает с его начальным положением M_0 . Подставляя значения $R = R_0$ и $\varphi_0 = 0$ в равенства (54), получим:

$$\cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g_0 R_0} - 1 = e. \quad (55)$$

Так как $e > 0$, то $\cos^2 \alpha \neq 0$; следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = 0$ и $\alpha = 0$ (или $\alpha = \pi$). Одновременно из последнего равенства, учитывая, что $\alpha = 0$, а $e > 0$, получаем $v_0^2 > g_0 R_0$. Следовательно, чтобы тело, брошенное с земной поверхности, превратилось в искусственного спутника Земли, необходимо выполнение двух условий:

$$\alpha = 0, \quad \sqrt{2g_0 R} > v_0 \geq \sqrt{g_0 R_0}. \quad (56)$$

Эксцентриситет орбиты спутника при любом R , как видно из (55), будет:

$$e = \frac{v_0^2}{gR} - 1. \quad (57)$$

Скорость $v_k = \sqrt{gR}$, при которой $e = 0$ и спутник движется по круговой орбите радиуса R , называется круговой или *первой космической скоростью*; при бросании с поверхности Земли $v_k = \sqrt{g_0 R_0} \approx 7910$ м/сек. Если $v_0 > v_k$, то орбитой спутника будет эллипс, эксцентриситет которого тем больше, чем больше v_0 (рис. 354).

Когда угол бросания $\alpha \neq 0$, то ни при какой начальной скорости v_0 тело, брошенное с земной поверхности, не может стать спутником Земли. Практически для запуска искусственного спутника используется управляемая ракета, которая поднимает спутник на заданную высоту и сообщает ему в пункте M_0 (см. рис. 354) нужную скорость v_0 под углом $\alpha \approx 0$ к горизонту. С увеличением высоты H пункта M_0 над поверхностью Земли становится возможным отклонение от условия $\alpha = 0$. Кроме того, так как, согласно равенству (49),

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{R^2},$$

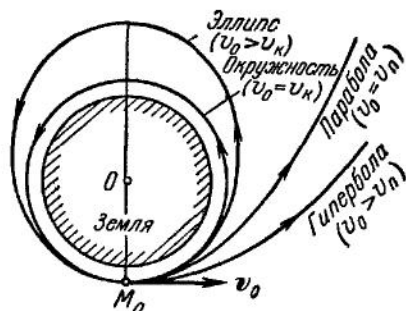


Рис. 354.

то при $R = R_0 + H$

$$v_k = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{g_0 R_0^2}{R}} = \sqrt{g_0 R_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_0 + H}}. \quad (58)$$

Следовательно, с возрастанием H величина круговой скорости убывает

Период обращения T спутника можно найти из третьего закона Кеплера, выразив его равенством (17). Заменяя в (17) гауссову постоянную μ ее значением (49), будем иметь:

$$T = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{a^3}{g}}. \quad (59)$$

Входящую сюда длину большой полуоси орбиты можно в свою очередь выразить в виде

$$a = \frac{r_p + r_A}{2} \quad \text{или} \quad a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad (60)$$

где r_p и r_A — соответственно расстояния от центра Земли до перигея и апогея орбиты, а p и e — величины, определяемые равенствами (52) и (53); при $\alpha = 0$ значение e определяется равенством (57).

2) *Эллиптические траектории.* При $\alpha > 0$ и $v_0 < \sqrt{2g_0 R_0}$ тело, брошенное с земной поверхности, описав дугу эллипса, упадет обратно на Землю. Такие эллиптические траектории описывают при больших дальностях снаряды и ракеты. Найдем основные характеристики этих траекторий.

Начнем с определения дальности полета. Обозначая центральный угол $M_0 M_1$ (см. рис. 353) через 2β , получаем, что дальность измерения вдоль земной поверхности будет

$$D = \overset{\frown}{M_0 M_1} = 2R_0\beta. \quad (61)$$

Так как $\beta = \pi - \varphi_0$ и $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \varphi_0$, то, деля почленно равенства (54) друг на друга, найдем, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g_0 R_0 - v_0^2 \cos^2 \alpha} \operatorname{tg} \alpha. \quad (62)$$

Формулы (61), (62) и определяют величину дальности полета по данным значениям v_0 и α . Заметим, что при $v_0 \cos \alpha = \sqrt{g_0 R_0}$ угол $\beta = \frac{\pi}{2}$ и дальность $D = \pi R_0$, т. е. падение будет в точке M_1 , диаметрально противоположной M_0 (рис. 355). Вопрос о наименьшей начальной скорости, необходимой для получения заданной дальности, будет рассмотрен ниже.

Наибольшую высоту траектории H можно найти из равенства $H = r(\pi) - R_0$. Полагая в уравнении (51) $\varphi = \pi$ и заменяя p его значением (52), будем иметь:

$$H = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g_0(1-e)} - R_0. \quad (63)$$

Время полета из M_0 в M_1 (см. рис. 353) найдем с помощью уравнения Кеплера (36), полагая в нем для простоты $t_0 = 0$. Тогда, обозначая период обращения по соответствующей эллиптической орбите через T , получим:

$$\begin{aligned} T_{\text{полета}} &= 2[t(\pi) - t(\pi - \beta)] = \\ &= 2\left[\frac{T}{2} - t(\pi - \beta)\right] \end{aligned}$$

или, используя уравнения (39) и (36),

$$T_{\text{полета}} = \frac{2}{\lambda} (\pi - E_1 + e \sin E_1), \quad (64)$$

где E_1 есть значение E при $\varphi = \pi - \beta$, а

$$\lambda = \frac{R_0 g_0^2 (1 - e^2)^{3/2}}{v_0^3 \cos^3 \alpha}; \quad (65)$$

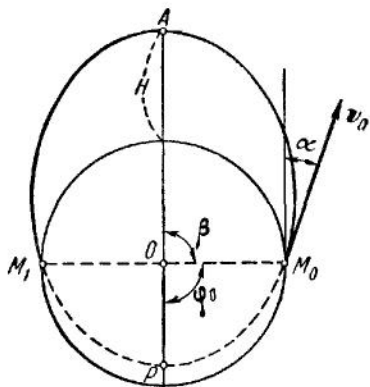


Рис 355

последний результат следует из формул (37), (50) и (52), если в точке M_0 считать $R = R_0$ и $g = g_0$.

Полагая в равенстве (64) $\pi - E_1 = E_\beta$, найдем окончательно:

$$T_{\text{полета}} = \frac{2v_0^3 \cos^3 \alpha}{R_0 g_0^2 (1 - e^2)^{3/2}} (E_\beta + e \sin E_\beta). \quad (66)$$

Согласно уравнению (38), в котором надо считать $\varphi = \pi - \beta$, а $E = E_1 = \pi - E_\beta$, здесь

$$\operatorname{ctg} \frac{E_\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \frac{E_\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}, \quad (67)$$

а значение e дается равенством (53).

Найдем теперь наименьшую начальную скорость v_0^{\min} и соответствующий ей наивыгоднейший угол бросания α_n , при которых может быть получена заданная дальность $D = 2R_0\beta$.

Для этого, выразив начальную скорость v_0 через β из равенства (62), получим:

$$v_0^2 = \frac{2g_0 R_0 \operatorname{tg} \beta}{\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (68)$$

При данной дальности, т. е. при данном угле β , необходимая величина v_0 зависит от α и будет наименьшей, когда знаменатель

$$F(\alpha) = \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$$

имеет максимум. Из уравнения

$$F'(\alpha) = 2 \cos 2\alpha - 2 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = 0$$

находим $\operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{tg} \beta$, откуда

$$\alpha_n = 45^\circ - \frac{\beta}{2}. \quad (69)$$

Легко проверить, что $F''(\alpha_n) < 0$ и, следовательно, при $\alpha = \alpha_n$ мы имеем $v_0 = v_0^{\min}$. Подставив значение α_n в уравнение (68), получим:

$$v_0^{\min} = \sqrt{2R_0 g_0 \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta}}. \quad (70)$$

Формулы (70) и (69) определяют наименьшую начальную скорость, необходимую для получения заданной дальности $D = 2R_0\beta$, и угол бросания α_n , под которым эта скорость должна быть направлена к горизонту. В отличие от случая движения в однородном поле тяжести (§ 36) наимыгоднейший угол α_n зависит от дальности и с ее увеличением уменьшается; если дальность очень мала, то $\alpha_n \approx 45^\circ$, как и в однородном поле тяжести.

Отметим еще следующий результат. Представим выражение (68) в виде

$$v_0^2 = \frac{2g_0 R_0 \sin \beta}{2 \cos \alpha \sin(\alpha + \beta)}, \quad (71)$$

и заменим угол α на угол $\alpha' = 90 - (\beta + \alpha)$. Тогда будет $\cos \alpha' = \sin(\alpha + \beta)$, а $\sin(\alpha' + \beta) = \cos \alpha$ и мы получим при данной дальности для угла бросания α' то же самое значение потребной начальной скорости v_0 , что и для угла α . Следовательно, если при заданной начальной скорости v_0 попадание в данную точку земной поверхности возможно, то в эту точку можно попасть двумя траекториями: одной с углом бросания $\alpha < \alpha_n$ (настильная траектория) и другой с углом бросания $\alpha' = 90 - (\alpha + \beta) > \alpha_n$ (навесная траектория). Если $\alpha = \alpha_n$, то, как следует из формулы (69), и $\alpha' = \alpha_n$; в этом случае обе траектории сливаются в одну — наимыгоднейшую. Это свойство эллиптических траекторий аналогично свойству параболических траекторий в однородном поле тяжести.

Отметим в заключение, что если считать в пределе угол $\beta \rightarrow 0$, а величину $2R_0\beta = D$ рассматривать в пределе как горизонтальную дальность (см. § 36), то формулы теории эллиптических траекторий перейдут в соответствующие формулы для траекторий параболических.

§ 38. Движение несвободной материальной точки

1. Постановка задачи. Материальная точка называется несвободной, если она не может занимать произвольного положения в пространстве; условия, стесняющие свободу движения точки, называются связями. Связи, наложенные на точку, могут удерживать ее на некоторой кривой или поверхности. При изучении несвободного движения точки будем, как и в статике, исходить из аксиомы связей, согласно которой несвободную точку можно рассматривать как свободную, заменив действие связей их реакциями. Таким образом, существенное отличие несвободной точки от свободной заключается в том, что на несвободную точку при ее движении, кроме активных сил, действуют еще реакции связей. Если связь идеальна (без трения), то реакция связи будет направлена по нормали к кривой или поверхности, на которой точка вынуждена оставаться в силу наложенных связей. Величина этой реакции наперед не известна и будет вообще зависеть как от действующих активных сил, так и от закона движения точки. Таким образом, основная задача динамики для несвободной материальной точки будет состоять в том, чтобы, зная действующие активные силы и начальные условия, определить закон движения точки и реакции наложенных связей.

2. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной кривой в проекциях на декартовы оси координат. Допустим для общности, что связь реономна, т. е. что кривая, по которой вынуждена двигаться точка, может с течением времени изменяться и задана уравнениями

$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0.$$

Дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме будет

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{N}, \quad (1)$$

где \mathbf{N} есть реакция кривой, направленная по одной из нормалей (рис. 356). Если рассматривать заданную кривую как пересечение двух поверхностей f_1 и f_2 (рис. 357), то реакцию кривой \mathbf{N} можно считать суммой реакций \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 этих поверхностей, направленных по нормальям к соответствующим поверхностям, т. е.

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2. \quad (2)$$

Очевидно, \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 лежат в нормальной плоскости данной кривой. Так как направление нормали к поверхности $f = 0$ совпадает с направлением вектора $\text{grad } f$, то

$$\mathbf{N}_1 = \lambda_1 \text{grad } f_1, \quad \mathbf{N}_2 = \lambda_2 \text{grad } f_2, \quad (3)$$

где λ_1 и λ_2 — подлежащие определению множители. Принимая во внимание равенства (2) и (3), получим уравнение движения точки (1) в виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2. \quad (4)$$

Из уравнений (3) следует, что

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{|\text{grad } f_1|},$$

где

$$|\text{grad } f_1| = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2} = \Delta_1 f_1.$$

Аналогичное выражение получим для λ_2 . В результате будем иметь:

$$\lambda_1 = \frac{N_1}{\Delta_1 f_1}, \quad \lambda_2 = \frac{N_2}{\Delta_1 f_2}. \quad (5)$$

Величина

$$\Delta_1 f \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \equiv |\text{grad } f|$$

называется первым дифференциальным параметром функции f (по Ламе).

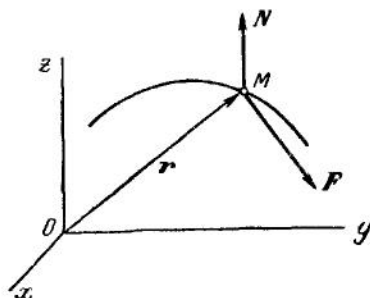


Рис. 356.

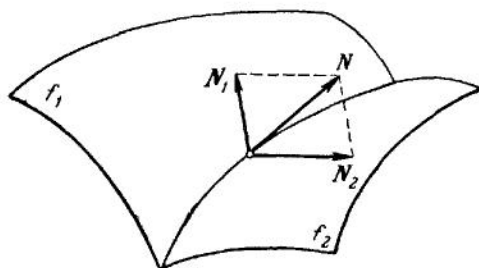


Рис. 357.

Из (5) видно, что множители λ_1 и λ_2 равны соответственным нормальным реакциям, деленным на первый дифференциальный параметр связи.

В проекциях на оси координат уравнение движения (4) дает:

$$\left. \begin{aligned} mx &= F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ my &= F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ mz &= F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Это будет система совместных дифференциальных уравнений второго порядка; присоединяя к ним уравнения связи

$$f_1(x, y, z, t) = 0,$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0,$$

получим систему пяти уравнений, из которых мы можем определить $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$ как функции t .

3. Естественные уравнения движения точки по заданной кривой. Когда заданная кривая AB , по которой движется точка, неподвижна (связь склерономна), удобно пользоваться уравнениями движения в проекциях на оси естественного трехгранника: касательную τ , направленную в сторону положительного отсчета расстояния s , главную нормаль n , направленную в сторону вогнутости траектории, и бинормаль b (рис. 358). Пусть действующая на точку активная сила равна F , а реакция связи — N ; если связь идеальна, то реакция N нормальна к кривой, т. е. лежит в плоскости nb . Тогда уравнение движения

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}$$

в проекциях на оси τ, n, b даст:

$$m \frac{dv}{dt} = F_\tau \quad \text{или} \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = F_\tau, \quad (7a)$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = F_n + N_n, \quad (7б)$$

$$0 = F_b + N_b. \quad (7в)$$

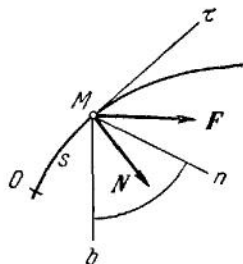


Рис. 358

Уравнения (7) называются естественными уравнениями движения точки по заданной неподвижной гладкой кривой. Они замечательны тем, что первое из этих уравнений не содержит наперед неизвестной реакции связи и служит для нахождения закона движения точки; уравнения же (7б) и (7в) определяют реакцию связи, которая, как видим, зависит как от активной силы F , так и от скорости движения.

Таким образом, пользуясь естественными уравнениями, можно находить закон несвободного движения, не отыскивая реакцию связи, чего с помощью системы (6) сделать нельзя.

4. Теорема об изменении кинетической энергии для несвободной точки. Если к несвободной точке кроме активной силы F , приложить реакции связей, то точку можно рассматривать как свободную и применять к ней все теоремы, справедливые для свободной точки.

По теореме об изменении кинетической энергии имеем:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \lambda_1 \text{grad } f_1 \cdot d\mathbf{r} + \lambda_2 \text{grad } f_2 \cdot d\mathbf{r},$$

Так как

$$\text{grad } f \cdot dr = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

а из уравнения связи $f(x, y, z, t) = 0$ следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

то

$$\text{grad } f \cdot dr = -\frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Таким образом, теорема об изменении кинетической энергии для реономной связи примет вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr - \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt - \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} dt. \quad (8)$$

Если связь склерономна, то $\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$, и мы получим:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr. \quad (9)$$

Следовательно, в случае склерономной идеальной связи реакции связи в выражение элементарной работы не входят и теорема об изменении кинетической энергии сохраняет тот же вид, что и для свободной точки. Это объясняется тем, что при склерономных идеальных связях действительное перемещение dr будет всегда перпендикулярно к реакции N , а потому элементарная работа реакции будет равна нулю.

Из (9) можно получить выражение теоремы и в конечном виде

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0 M}^a, \quad (10)$$

где $A_{M_0 M}^a$ — работа на перемещении $\widetilde{M_0 M}$ активной силы F .

Если действующая на точку активная сила будет потенциальной, то элементарная работа

$$F \cdot dr = dU = -dV,$$

где $V(x, y, z)$ есть потенциальная энергия точки, и мы получим из уравнения (9) интеграл энергии

$$\frac{mv^2}{2} + V(x, y, z) = h, \quad (11)$$

где h — начальная энергия точки.

Таким образом, интеграл энергии имеет место и для несвободного движения, если действующая сила является потенциальной, а связь — идеальной и склерономной.

Рассмотрим примеры.

1. *Движение тяжелой точки по неподвижной кривой.* Пусть точка M массы m движется в однородном поле тяжести по заданной гладкой неподвижной кривой (рис. 359). Направим вертикально вверх ось z . Тогда $V = mgz$, и уравнение (11) даст:

$$\frac{mv^2}{2} + mgz = h. \quad (a)$$

Пусть в начальный момент

$$z = z_0 \text{ и } v = v_0.$$

По этим данным находим, что

$$h = \frac{mv_0^2}{2} + mgz_0,$$

и из уравнения (a) будем иметь:

$$v^2 = -2gz + v_0^2 + 2gz_0.$$

Полагая $v_0^2 + 2gz_0 = 2ga$, где a , очевидно, есть линейная величина, получим:

$$v^2 = 2g(a - z). \quad (б)$$

Отсюда видно, что z не может быть больше $a = z_0 + \frac{v_0^2}{2g}$; следовательно, точка не может подняться над плоскостью xy больше чем на высоту a .

Представив равенство (б) в виде

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(a - z).$$

мы, извлекая корень и разделяя переменные, получим уравнение

$$\frac{ds}{\sqrt{a - z}} = \sqrt{2g} dt,$$

интегрируя которое можно определить закон движения точки.

2. *Определение реакции связи.* При движении точки вдоль неподвижной гладкой кривой реакции связи можно определять по уравнениям (7б) и (7в); при этом, когда действующие активные силы потенциальны, для отыскания входящей в уравнение (7б) скорости v проще всего пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии.

Пусть груз весом P , подвешенный на нити длиной l , получает в равновесном положении M_0 начальную скорость v_0 , перпендикулярную к нити (рис. 360). Найдем натяжение нити как функцию угла отклонения φ и условие, при котором груз опишет полную окружность.

В произвольном положении на груз, который рассматриваем как материальную точку, действует активная сила P и реакция N , численно равная натяжению нити. Провождая в сторону вогнутости траектории (окружности ра-

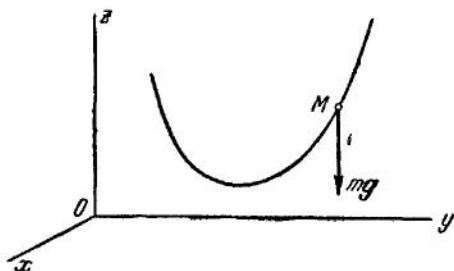


Рис. 359

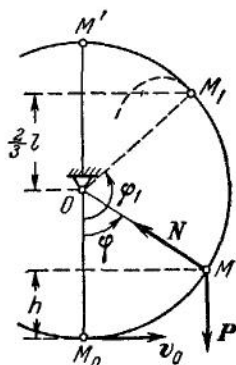


Рис. 360

диуса l) главную нормаль n и составляя уравнение (76), получим:

$$\frac{mv^2}{l} = -P \cos \varphi + N. \quad (a)$$

Так как сила P потенциальная, то для определения v воспользуемся теоремой (10)

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0M}. \quad (б)$$

В данном случае $A_{M_0M} = -Ph = -Pl(1 - \cos \varphi)$ и равенство (б) дает:

$$mv^2 = mv_0^2 - 2Pl(1 - \cos \varphi).$$

Подставляя это значение mv^2 в уравнение (а), найдем окончательно:

$$N = P \left(\frac{v_0^2}{gl} - 2 + 3 \cos \varphi \right). \quad (в)$$

Нить является связью освобождающей и точка (груз) будет двигаться по окружности радиуса l до тех пор, пока $N > 0$. При $N < 0$ направление реакции изменяется на противоположное; такую реакцию, направленную от точки подвеса, мог бы развивать жесткий стержень, в случае же нити точка при этом сойдет с окружности (покинет связь) и будет двигаться как свободная до тех пор, пока ее расстояние от точки подвеса не станет равно l .

Найдем, какую начальную скорость надо сообщить грузу в положении M_0 , чтобы он описал полную окружность. Из равенства (в) видно, что N имеет наименьшее значение при $\varphi = 180^\circ$; при этом

$$N_{\min} = P \left(\frac{v_0^2}{gl} - 5 \right).$$

Груз опишет полную окружность, если реакция N нигде (кроме, может быть, точки M') не обратится в нуль; для этого, очевидно, необходимо, чтобы было $N_{\min} \geq 0$ или

$$v_0 \geq \sqrt{5gl}.$$

Если нить заменить жестким невесомым стержнем, то условие того, что груз опишет полную окружность, изменится и будет состоять в том, что скорость груза нигде, кроме, может быть, точки M' , не должна обратиться в нуль. Из формулы Галилея следует, что это будет, когда $v_0 \geq \sqrt{4gl}$.

Если грузу, подвешенному на нити, сообщить начальную скорость $v_0 = \sqrt{4gl}$, то, как видно из уравнения (в), при $\cos \varphi_1 = -\frac{2}{3}$ реакция N обратится в нуль и груз в точке M_1 , на высоте $\frac{2}{3}l$ от центра O , сойдет с окружности и начнет двигаться как свободная точка (по параболе).

5. Плоский математический маятник. Математическим маятником называется тяжелая материальная точка, которая движется или по вертикальной окружности (плоский математический маятник), или по сфере (сферический маятник). В первом приближении математическим маятником можно считать груз малых размеров, подвешенный на нерастяжимой гибкой нити.

Рассмотрим движение плоского математического маятника по окружности радиуса l с центром в точке O (рис. 361). Будем определять положение точки M (маятника) углом отклонения φ радиуса OM от вертикали. Направляя касательную $M\tau$ в сторону положительного отсчета угла φ , составим естественное уравнение движения (7а). Получим в проекции на ось $M\tau$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \varphi,$$

где m есть масса маятника.

Отсюда, так как $v = l \frac{d\varphi}{dt}$, находим:

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi.$$

Сокращая на m и полагая

$$\frac{g}{l} = \omega^2, \quad (12)$$

будем окончательно иметь:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим сначала случай малых колебаний.

Пусть в начальный момент маятник отклонен от вертикали на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости. Тогда начальные условия будут:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_0 = 0. \quad (14)$$

Из интеграла энергии следует, что при этих условиях в любой момент времени угол $\varphi \leq \varphi_0$. Допустим, что угол φ_0 мал ($\varphi_0 \ll 1$); тогда угол φ будет также мал и можно приближенно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. При этом уравнение (13) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) есть дифференциальное уравнение простого гармонического колебания. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = A \cos \omega t + B \sin \omega t = a \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (16)$$

где A и B или a и ε суть постоянные интегрирования.

Отсюда сразу находим период малых колебаний математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (17)$$

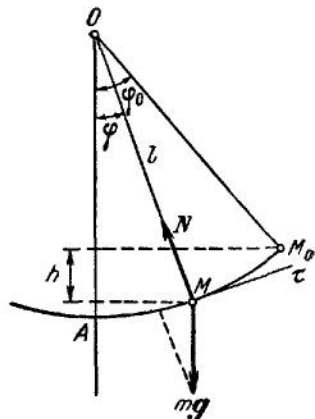


Рис. 361.

Для нахождения закона движения при начальных условиях (14) вычисляем:

$$\dot{\varphi} = \omega (-A \sin \omega t + B \cos \omega t). \quad (18)$$

Подставляя значения (14) в уравнения (16) и (18), получим:

$$\varphi_0 = A, \quad 0 = \omega B,$$

т. е. $B = 0$. Следовательно, закон движения для малых колебаний при условиях (14) будет:

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t. \quad (19)$$

Найдем теперь точное решение задачи о плоском математическом маятнике. Определим сначала первый интеграл уравнения движения (13). Так как

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi},$$

то (13) можно представить в виде

$$\dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi.$$

Отсюда, умножая обе части уравнения на $d\varphi$ и интегрируя, получим:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \omega^2 \cos \varphi + C. \quad (20)$$

Обозначим здесь через φ_0 угол максимального отклонения маятника; тогда при $\varphi = \varphi_0$ будем иметь $\dot{\varphi} = 0$, откуда $C = -\omega^2 \cos \varphi_0$. В результате интеграл (20) дает:

$$\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0), \quad (21)$$

где ω определяется равенством (12).

Этот интеграл представляет собой интеграл энергии и может быть непосредственно получен из уравнения (10), если учесть, что в нашем случае $v_0 = 0$, $v = l\dot{\varphi}$ и $A_{M_0M} = mgh = mgl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$ (см. рис. 361).

Из уравнения (21) видно, что при движении маятника угол φ будет изменяться между значениями $+\varphi_0$ и $-\varphi_0$ ($|\varphi| \leq \varphi_0$, так как $\dot{\varphi}^2 \geq 0$), т. е. маятник будет совершать колебательное движение. Условимся отсчитывать время t от момента прохождения маятника через вертикаль OA при его движении вправо (см. рис. 361). Тогда будем иметь начальное условие:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0. \quad (22)$$

Кроме того, при движении из точки A будет $\dot{\varphi} > 0$; извлекая из обеих частей равенства (21) квадратный корень, получим:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Разделяя здесь переменные, будем иметь:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} = \omega dt. \quad (23)$$

Так как

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2},$$

то

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \left(\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right).$$

Подставляя этот результат в уравнение (23), получим:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 2\omega dt. \quad (24)$$

Чтобы проинтегрировать уравнение (24), нужно найти квадратуру левой части. Для этого перейдем от φ к новому переменному α , полагая:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = k \sin \alpha, \quad \text{где} \quad k = \sin \frac{\varphi_0}{2}. \quad (25)$$

Тогда

$$\frac{d\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = k \cos \alpha d\alpha,$$

откуда

$$d\varphi = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2k \cos \alpha d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}.$$

Кроме того,

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = k^2 (1 - \sin^2 \alpha) = k^2 \cos^2 \alpha.$$

Подставляя все эти величины в уравнение (24) и заменяя ω его значением (12), получим:

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (26)$$

По принятым начальным условиям (22) при $t=0$ угол $\varphi=0$, а следовательно, как видно из (25), и $\alpha=0$. Тогда, беря от обеих частей уравнения (26) определенные интегралы справа от 0 до t ,

а слева от 0 до α , получим закон движения маятника в виде

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{g}{l}} t. \quad (27)$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства (27), представляет собой эллиптический интеграл первого рода. Величина k называется модулем эллиптического интеграла. Этот интеграл есть функция верхнего предела и модуля, т. е.

$$u = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = F(\alpha, k). \quad (28)$$

Если в равенстве (28) рассматривать верхний предел α как функцию от интеграла u , то такая функция носит название *амплитуды* u и обозначается так:

$$\alpha = \text{am}[F(\alpha, k)],$$

или

$$\alpha = \text{am } u. \quad (29)$$

Беря от обеих частей равенства (29) синус, мы получим:

$$\sin \alpha = \sin \text{am } u = \text{sn } u. \quad (30)$$

Функция $\text{sn } u$ (синус-амплитуда u) представляет собой так называемую эллиптическую функцию Якоби. Поскольку, согласно уравнению (27), $u = \sqrt{\frac{g}{l}} t$, то, переходя в равенстве (30) от α к φ с помощью формулы (25), найдем закон движения маятника, выраженный через эллиптическую функцию sn , в виде

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \text{sn} \frac{\varphi_0}{2} \text{sn} \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right). \quad (31)$$

Найдем период T колебаний маятника. Из положения $\varphi = 0$ в положение $\varphi = \varphi_0$ маятник приходит за четверть периода. Так как, согласно равенству (25), при $\varphi = 0$ и $\alpha = 0$, а при $\varphi = \varphi_0$ величина $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то из уравнения (27) имеем:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} \frac{T}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (32)$$

Таким образом, определение периода колебаний маятника сводится к вычислению величины

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{d\alpha}}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} \equiv F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K, \quad (33)$$

представляющей собой четверть периода эллиптического интеграла (28).

Известно (формула Валлиса), что

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \alpha \, d\alpha = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (34)$$

Разлагая в выражении (33) подынтегральную функцию в ряд, получим:

$$\frac{d\alpha}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} = \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \alpha + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \alpha + \dots\right) d\alpha.$$

Тогда, используя формулу (34), будем иметь:

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots\right]. \quad (35)$$

Подставляя это значение K в равенство (32) и учитывая, что

$$k = \sin \frac{\varphi_0}{2},$$

получим для периода колебаний плоского математического маятника выражение

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots\right]. \quad (36)$$

Следовательно, чем больше φ_0 (угол размаха), тем больше период колебаний маятника. Таким образом, математический маятник свойством изохронности не обладает. Если при малых размахах ограничиться в формуле (36) только двумя первыми членами, то, полагая $\sin \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0}{2}$, получим приближенное выражение периода

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_0^2}{16}\right). \quad (37)$$

6. Циклоидальный маятник. Чтобы маятник был изохронным, необходимо с увеличением размаха уменьшать его длину; тогда точка M будет уже двигаться не по дуге окружности, а по некоторой другой кривой. Оказывается, что эта кривая будет циклоидой.

Докажем это. Рассмотрим циклоиду EF (рис. 362). Если направить ось Oz так, как показано на рисунке, то длина дуги $OM = s$ циклоиды, как известно, будет:

$$s = \sqrt{8az}, \quad (38)$$

где a есть радиус образующего круга. Найдем теперь закон движения тяжелой точки по вертикальной циклоиде. Для этого обратимся

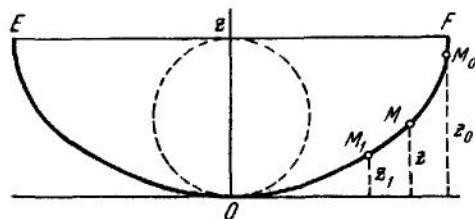


Рис. 362.

к интегралу энергии. Поскольку в однородном поле тяжести потенциальная энергия $V = mgz + \text{const}$, то уравнение (11) дает:

$$\frac{v^2}{2} + gz = h. \quad (39)$$

Пусть в начальном положении M_0 координата $z = z_0$, а начальная скорость равна нулю; тогда постоянная $h = gz_0$ и мы будем иметь:

$$v^2 = 2g(z_0 - z).$$

Отсюда, учитывая, что при движении из начального положения M_0 расстояние $s = OM$ убывает и $v = \dot{s} < 0$, получим:

$$\dot{s} = -\sqrt{2g(z_0 - z)}. \quad (40)$$

Но из равенства (38) следует, что

$$z = \frac{s^2}{8a},$$

и уравнение (40) примет вид

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{4a}(s_0^2 - s^2)}.$$

Разделяя здесь переменные, получим:

$$-\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}} = \sqrt{\frac{g}{4a}} dt,$$

и, интегрируя, найдем:

$$\arccos \frac{s}{s_0} = \sqrt{\frac{g}{4a}} t + c.$$

Так как при $t = 0$, т. е. в начальный момент, когда точка находится в M_0 , $s = s_0$, то, подставляя эти начальные данные, получим:

$$c = \arccos 1 = 0,$$

и закон движения маятника представится окончательно в виде

$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{4a}} t. \quad (41)$$

Следовательно, период колебаний циклоидального маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}.$$

Отсюда видно, что для циклоидального маятника период T не зависит от размаха; следовательно, циклоидальный маятник будет изохронным. Из формулы (41) ясно, что движущаяся точка M достигнет положения O (где $s=0$) по истечении промежутка времени

$$\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4a}{g}}$$

от начала движения. Как мы видим, этот промежуток времени совершенно не зависит от начального положения точки. Поэтому, если взять на циклоиде ряд точек M_0, M_1, \dots (см. рис. 362) и заставить их падать по циклоиде без начальной скорости, то они придут в точку O все одновременно (свойство таухронности).

7. Брахистохрона. Пусть материальная точка с массой m движется в однородном поле тяжести по некоторой кривой ABC (рис. 363), лежащей в вертикальной плоскости, и выходит из точки A без начальной скорости.

Найдем время, в течение которого точка пройдет по кривой путь AB . Возьмем начало координат в точке A и ось z направим вертикально вниз. Тогда, в отличие от предыдущего случая, потенциальная энергия точки $V = -mgz + \text{const}$ и интеграл энергии (11) дает:

$$\frac{v^2}{2} = gz + h. \quad (42)$$

Так как по принятым условиям при $z=0$ скорость $v=0$, то постоянная $h=0$, и мы получим:

$$v = \sqrt{2gz}.$$

Пусть уравнение кривой AB будет $z = z(x)$; тогда, обозначая $\frac{dz}{dx} = z'(x)$, будем иметь:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + z'^2} dx.$$

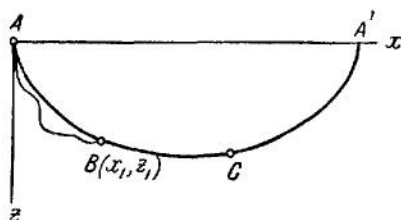


Рис. 363.

Отсюда, так как $ds = v dt$, находим:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (z')^2} dx}{\sqrt{2gz}},$$

и время, в течение которого точка пройдет по кривой путь AB , будет:

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}{\sqrt{2gz(x)}} dx. \quad (43)$$

Таким образом, время t зависит от вида функций $z(x)$, т. е. от кривой, по которой движется точка; иначе говоря, t будет функцией линии. Такая величина, значение которой зависит от выбора одной или нескольких функций, называется *функционалом*; аргументом функционала является та функция, от которой он зависит. В нашем случае

$$t = \Phi[z(x)],$$

т. е. время t есть функционал от функции $z(x)$, которой выражается уравнение кривой AB .

Будем теперь искать такую кривую, двигаясь по которой точка пройдет путь AB в кратчайшее время; аналитически эта задача сводится к нахождению такой функции $z(x)$, которая обращала бы функционал (43) в минимум. Кривая, обладающая таким свойством, называется *брахистохроной* (от греческих слов βραχίστοζ — кратчайший и χρόνοζ — время). Задача о брахистохроне была впервые поставлена и решена в 1696 г. Иоганном Бернулли, который тем самым положил начало вариационному исчислению — отделу анализа, посвященному нахождению экстремумов функционалов.

Таким образом, задача о брахистохроне сводится к нахождению минимума функционала, общий вид которого есть

$$J[z(x)] = \int_0^x F(x, z, z') dx, \quad (44)$$

т. е. к так называемой простейшей задаче вариационного исчисления.

Для того чтобы функция $z(x)$ обращала функционал J в минимум, необходимо, чтобы для какой угодно функции $\bar{z}(x) = z(x) + \varepsilon \xi(x)$, достаточно близкой к $z(x)$ [или, что то же, для кривой, достаточно близкой к кривой $z = z(x)$ и проходящей через точки A и B], значение $J[\bar{z}(x)]$ было бы больше значения $J[z(x)]$.

Величина $\varepsilon \zeta(x)$, на которую функция $\bar{z}(x)$ отличается от функции $z(x)$, называется, как известно (см. § 28, п. 1), вариацией этой функции, т. е.

$$\bar{z}(x) - z(x) = \varepsilon \zeta(x) = \delta z.$$

Следовательно,

$$J[\bar{z}(x)] = \int_0^x F(x, z + \delta z, z' + \delta z') dx. \quad (45)$$

Развертывая выражение $J[\bar{z}(x)]$ в ряд и ограничиваясь ввиду малости ε членами первого порядка, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^x F(x, z + \delta z, z' + \delta z') dx &= \\ &= \int_0^x F(x, z, z') dx + \int_0^x \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z' \right) dx + \dots \end{aligned}$$

Из равенств (45) и (44) видно, что последний интеграл в правой части представляет собой, с точностью до малых высшего порядка, разность $J[\bar{z}(x)] - J[z(x)]$. Эта разность называется первой вариацией функционала J , т. е.

$$\int_0^x \left(\frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z' \right) dx = \delta \int_0^x F(x, z, z') dz = \delta J. \quad (46)$$

Преобразуем выражение δJ , принимая во внимание, что поскольку $\delta z = \bar{z}(x) - z(x)$, то

$$\delta z' = \bar{z}'(x) - z'(x) = \frac{d[\bar{z}(x) - z(x)]}{dx} = \frac{d\delta z}{dx},$$

т. е. для рассматриваемой вариации операции варьирования и дифференцирования являются переместительными. Тогда, интегрируя по частям, найдем, что

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{\partial F}{\partial z'} \delta z' dx &= \int_0^x \frac{\partial F}{\partial z'} \frac{d\delta z}{dx} dx = \int_0^x \frac{\partial F}{\partial z'} d(\delta z) = \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial z'} \delta z \right]_0^x - \int_0^x \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \delta z dx. \end{aligned}$$

Так как в точках A и B $\bar{z}(x) = z(x)$ [т. е. кривые $z = \bar{z}(x)$, достаточно близкие к кривой $z = z(x)$, должны проходить через точки A и B], то в этих точках вариации δz обращаются в нуль, и следовательно, проинтегрированный член правой части исчезает. В результате, так как $\delta z = \varepsilon \zeta(x)$, получим из равенства (46)

$$\delta J = \int_0^x \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \delta z \, dx = \varepsilon \int_0^x \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \zeta(x) \, dx.$$

Проводя те же рассуждения, которые имеют место при выводе необходимых условий экстремума функций, мы приходим к заключению, что необходимое условие для экстремума функционала J состоит в том, чтобы

$$\delta J \equiv \varepsilon \int_0^x \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] \zeta(x) \, dx = 0.$$

Так как функция $\zeta(x)$ произвольна и на пределах интеграла обращается в нуль (ибо вариации δz в точках A и B равны нулю), то в силу основной леммы вариационного исчисления подинтегральное выражение равно нулю, т. е.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (47)$$

Итак, чтобы функция $z(x)$ давала экстремум функционала J , необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла дифференциальному уравнению (47), которое впервые было дано Эйлера и носит его имя. Так как $F = F(x, z, z')$, то уравнение Эйлера в раскрытом виде запишется так:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z} z' - \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} z'' - \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (47')$$

Это уравнение представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно искомой функции $z(x)$.

В частном случае, если функция F явно не зависит от x , то уравнение Эйлера дает первый интеграл. Действительно, умножая обе части уравнения (47) на z' , получим:

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] z' - \frac{dF}{dz} z' = 0. \quad (48)$$

Но

$$\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} \right) \right] z' = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) - \frac{\partial F}{\partial z'} z''.$$

Следовательно, уравнение (48) можно представить в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z'' \right) = 0. \quad (49)$$

Если $F = F(z, z')$, то

$$\frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial z'} z'' = \frac{dF}{dx}$$

и равенство (49) дает:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial z'} z' - F \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial z'} z' - F = c, \quad (50)$$

где c есть произвольная постоянная. Таким образом, мы получили первый интеграл уравнения Эйлера. Так как F от x не зависит, то уравнение (50) интегрируется в квадратурах.

Возвратимся к задаче о брахистохроне, которая, как мы видели, сводится к нахождению минимума функционала

$$t = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+z'^2(x)}}{\sqrt{2gz(x)}} dx,$$

т. е. к интегрированию соответствующего уравнения Эйлера. В данном случае

$$F = \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}},$$

следовательно, функция F явно от x не зависит и существует первый интеграл (50), имеющий вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}} \right) \right] z' - \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}} = \text{const},$$

или, в раскрытой форме,

$$\frac{z'^2}{\sqrt{z} \sqrt{1+z'^2}} - \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{z}} = \text{const}.$$

Приводя это выражение к общему знаменателю, получим после упрощений

$$\frac{1}{\sqrt{z(1+z'^2)}} = \text{const},$$

откуда

$$z(1+z'^2) = C, \quad (51)$$

где C есть произвольная постоянная.

Из равенства (51) находим:

$$z' = \frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{C-z}{z}}. \quad (52)$$

Введем переменное φ , полагая

$$z = C \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{C}{2} (1 - \cos \varphi). \quad (53)$$

Подставляя это значение z в правую часть равенства (52), получим

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2};$$

отсюда, так как $dz = C \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$, будем иметь:

$$dx = \frac{dz}{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = C \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{C}{2} (1 - \cos \varphi) d\varphi,$$

и, интегрируя, найдем:

$$x = \frac{C}{2} (\varphi - \sin \varphi) + C_1. \quad (54)$$

Так как минимизирующая кривая $z = z(x)$ должна проходить через точку $A(0, 0)$, то при $x=0$ $z=0$ и, следовательно, как видно из (53), $\varphi=0$. Подставляя эти значения в уравнение (54), получим $C_1=0$. Окончательно, принимая во внимание (53), найдем следующее уравнение брахистохроны в параметрической форме:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{C}{2} (\varphi - \sin \varphi), \\ z &= \frac{C}{2} (1 - \cos \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Таким образом, для однородного поля тяжести брахистохроной будет *циклоида*, у которой диаметр образующего круга есть C . Величина C определяется из того условия, что циклоида проходит через точку $B(x_1, z_1)$; следовательно, должно быть:

$$x_1 = \frac{C}{2} (\varphi - \sin \varphi), \quad z_1 = \frac{C}{2} (1 - \cos \varphi).$$

Отсюда, исключая φ , выразим C через x_1 и z_1 .

Задачу о брахистохроне можно поставить шире, т. е. искать брахистохрону для потенциального поля сил, определяемого силовой функцией $U(x, y, z)$. В этом случае имеем интеграл энергии

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2U(x, y, z) + h;$$

принимая во внимание, что $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, получим:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2U(x, y, z) + h}} = \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{2U(x, y, z) + h}} dx,$$

откуда

$$t = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{2U(x, y, z) + h}} dx.$$

Задача сводится к вариационной задаче о нахождении минимума полученного интеграла, т. е. к нахождению минимизирующих функций $y(x)$ и $z(x)$, которые и дадут уравнение брахистохроны:

$$y = y(x), \quad z = z(x).$$

8. Дифференциальные уравнения движения точки по заданной поверхности в декартовых координатах. Пусть

$$f(x, y, z, t) = 0$$

— уравнение поверхности, по которой принуждена двигаться точка. Уравнение движения точки будет:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \mathbf{N},$$

где \mathbf{F} — действующая активная сила, \mathbf{N} — реакция связи; так как связь считается идеальной, то реакция \mathbf{N} направлена по нормали к поверхности (рис. 364). Полагая тогда

$$\mathbf{N} = \lambda \text{grad } f,$$

получим уравнение движения точки в виде

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} + \lambda \text{grad } f,$$

или, в проекциях на оси координат,

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Присоединяя к системе (56) уравнение связи

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

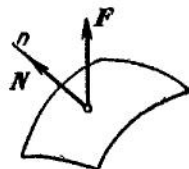


Рис. 364.

получим систему четырех совокупных уравнений, из которых можно определить λ , x , y , z в функции t . Это и будет решение задачи в общем виде.

Покажем, что если связь идеальна и склерономна, то теорема об изменении кинетической энергии формулируется так же, как для свободной точки, т. е. элементарная работа реакции N равна нулю. Имеем:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \lambda \operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r}.$$

Но

$$\operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

а дифференцируя уравнение связи, найдем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0,$$

следовательно,

$$\operatorname{grad} f \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\partial f}{\partial t} dt$$

и

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \lambda \frac{\partial f}{\partial t} dt.$$

Если связь склерономна, то $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, и теорема об изменении кинетической энергии выражается уравнением

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

т. е. имеет тот же вид, что и в случае движения свободной точки.

9. Естественные уравнения движения точки по поверхности. Траекторией точки, движущейся по поверхности, будет, очевидно, кривая, лежащая на этой поверхности всеми своими точками. Возьмем поверхность Q (рис. 365), и пусть aa' будет элемент траектории точки. Проведем в точке M касательную к траектории $M\tau$, нормаль к поверхности MN и главную нормаль к траектории Mn . Проведем теперь через касательную τ и нормаль N к поверхности плоскость, которая пересечет поверхность по некоторой кривой; элемент bb' этой кривой будет принадлежать геодезической линии данной поверхности, касающейся траектории в точке M ¹⁾. Проведем

¹⁾ Геодезической линией на поверхности называется линия, в каждой точке которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности; поскольку bb' есть элемент кривой, лежащей в плоскости τMN , то главная нормаль к этой кривой в точке M направлена по MN . Следовательно, bb' — элемент геодезической линии.

затем через точку M прямую MP в касательной плоскости перпендикулярно к касательной τ ; эта прямая MP будет, очевидно, одновременно перпендикулярна к MN , т. е. является бинормалью для элемента геодезической линии bb' . Ясно, что элемент траектории aa' движущейся точки будет совпадать в точке M с элементом геодезической линии поверхности только в том случае, когда направление главной нормали к траектории совпадает с направлением нормали к поверхности в этой точке.

Уравнение движения точки по поверхности

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}, \quad (57)$$

где \mathbf{N} есть нормальная реакция поверхности (силы \mathbf{F} и \mathbf{N} на рис. 365 не показаны).

Будем проектировать обе части уравнения (57) на три направления: на MN — направление нормали к поверхности, на $M\tau$ — направление касательной к траектории и на MP — направление бинормали к геодезической линии поверхности.

Для удобства при проектировании представим ускорение как сумму двух ускорений, тангенциального и нормального; тогда уравнение (57) примет вид

$$m \left(\frac{dv}{dt} \boldsymbol{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{n}^0 \right) = \mathbf{F} + \mathbf{N}, \quad (58)$$

где $\boldsymbol{\tau}^0$ и \mathbf{n}^0 суть единичные векторы касательной и главной нормали, а $\mathbf{N} = \lambda \text{grad } f$.

Проектируя обе части уравнения (58) на выбранные оси, получим:

$$\left. \begin{array}{l} \text{в проекции на } M\tau: \quad m \frac{dv}{dt} = F_\tau, \\ \text{на } MN: \quad \frac{mv^2 \cos \theta}{\rho} = F_N + N, \\ \text{на } MP: \quad \frac{mv^2 \sin \theta}{\rho} = F_P, \end{array} \right\} \quad (59)$$

где θ есть угол между нормалью к поверхности N и главной нормалью траектории \mathbf{n} , а $\rho = MO$ есть радиус кривизны траектории в рассматриваемой точке M . Проведем в нормальной плоскости через центр кривизны траектории O прямую, перпендикулярную к главной нормали \mathbf{n} ; тогда она пересечет прямые MP и MN в точках K и L ; отрезок $ML = \rho_N$ называется радиусом нормальной

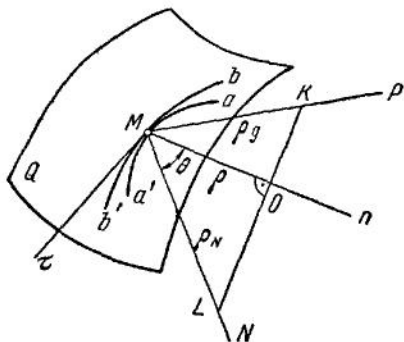


Рис. 365.

кривизны и, очевидно, равен $\frac{\rho}{\cos \theta}$; отрезок $MK = \rho_g$ называется радиусом геодезической кривизны и равен $\frac{\rho}{\sin \theta}$. Когда $\theta = 0$, то траекторией будет геодезическая линия, а если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то траектория будет наиболее уклоняться от геодезической линии. Вводя ρ_N и ρ_g , мы можем уравнения (59) представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_\tau, \\ m \frac{v^2}{\rho_N} &= F_N + N, \\ m \frac{v^2}{\rho_g} &= F_P. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Первое и третье из этих уравнений дают закон движения, второе определяет неизвестную реакцию N .

Наиболее простым случаем движения будет тот, когда на движущуюся по поверхности точку не действует никакая активная сила. Естественные уравнения для этого случая будут:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= 0, \\ m \frac{v^2}{\rho_N} &= N, \\ m \frac{v^2}{\rho_g} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Из первого уравнения следует, что скорость по модулю постоянна ($v = \text{const}$). Далее, траекторией точки будет геодезическая линия. Действительно, так как

$$m \frac{v^2}{\rho_g} = 0,$$

то геодезическая кривизна

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\sin \theta}{\rho} = 0,$$

откуда следует, что $\theta = 0$, т. е. что траектория есть геодезическая линия.

Наконец, из второго уравнения системы (61) вытекает, что в этом случае величина нормальной реакции будет обратно пропорциональна ρ_N ; но так как в данном случае $\theta = 0$, то $\rho_N = \rho$; следовательно, величина реакции обратно пропорциональна радиусу кривизны траектории.

10. Теорема Клеро. Полученные результаты позволяют легко найти некоторые свойства геодезических линий. Пусть мы имеем поверхность вращения (рис. 366). Примем ось вращения за ось z , и пусть mm' будет

одним из меридианов поверхности, а g есть геодезическая линия поверхности вращения, проходящая через точку M . Обозначим через i угол, под которым геодезическая линия пересекает меридиан. Рассматривая геодезическую линию g как траекторию инерциально движущейся точки, можно сделать следующие выводы.

Скорость точки v направлена по касательной к траектории (т. е. к геодезической линии); реакция поверхности N направлена по нормали к поверхности и будет пересекать ось z . Так как N пересекать ось вращения, то момент силы N относительно этой оси равен нулю, следовательно, по теореме площадей момент скорости относительно оси вращения будет величина постоянная. Таким образом, если обозначить через r радиус параллели, проходящей через M , то

$$rv \sin i = \text{const};$$

но $v = \text{const}$, следовательно,

$$r \sin i = \text{const}. \quad (62)$$

Это есть теорема Клеро. Из формулы (62) ясно, что с уменьшением r увеличивается угол i и, следовательно, геодезическая линия все более отклоняется от меридиана.

11. Геодезические линии поверхности вращения. Исходя из того, что траектория точки, движущейся на поверхности по инерции, есть геодезическая линия этой поверхности, можно легко найти геодезические линии поверхности вращения.

Примем ось вращения за ось z , и пусть уравнение меридиана, лежащего в плоскости xz , дано в виде

$$z = f(x).$$

Перейдем к цилиндрическим координатам r, φ, z . Тогда уравнение рассматриваемой поверхности вращения будет:

$$z = f(r). \quad (63)$$

Выражение для дифференциала дуги в цилиндрических координатах имеет вид (см. § 6, п. 14):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2.$$

Для взятой нами поверхности вращения (63) будем иметь:

$$ds^2 = dr^2 (1 + f'^2) + r^2 d\varphi^2, \quad (64)$$

где $f'^2 = [f'(r)]^2$. Поскольку уравнение поверхности $z = f(r)$ задано, то для определения траектории (геодезической линии) достаточно найти, используя (64), зависимость между r и φ . С этой целью воспользуемся имеющими место для рассматриваемого движения двумя первыми интегралами. Так как активная сила $F = 0$ (точка движется по инерции), то из интеграла энергий следует, что скорость по модулю постоянна, следовательно,

$$ds = v_0 dt.$$

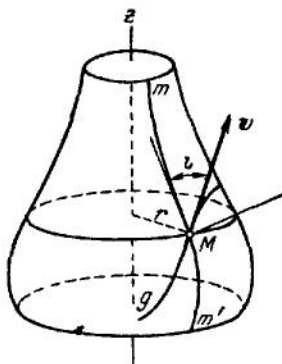


Рис. 366.

Кроме того, относительно оси вращения имеет место интеграл площадей, т. е.

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c,$$

откуда

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}.$$

Тогда

$$ds = \frac{v_0 r^2 d\varphi}{c} = \alpha r^2 d\varphi,$$

где обозначено $\frac{v_0}{c} = \alpha$.

Подставляя полученное выражение ds в формулу (64), будем иметь:

$$(\alpha r^2 d\varphi)^2 = dr^2 (1 + f'^2) + r^2 d\varphi^2$$

или

$$r^2 d\varphi^2 (r^2 \alpha^2 - 1) = dr^2 (1 + f'^2),$$

откуда

$$d\varphi = \pm \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{\alpha^2 r^2 - 1}},$$

где знак определяется направлением начальной скорости v_0 . Из полученного уравнения квадратурой найдем:

$$\varphi = \pm \int \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2}{\alpha^2 r^2 - 1}} dr + c, \quad (65)$$

где α и c суть произвольные постоянные, которые можно определить из условия, что геодезическая линия проходит через две заданные точки или через одну заданную точку и имеет в ней заданное направление. Таким образом, с помощью формулы (65) определяется в конечной форме уравнение геодезических линий поверхностей вращения.

12. Движение тяжелой точки по поверхности вращения, ось которой вертикальна. Направив ось z вертикально вниз, имеем, как и в ранее рассматривавшихся случаях, интеграл энергии (42):

$$v^2 = 2(gz + h) \quad (66)$$

или

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2(gz + h),$$

где h — постоянная, пропорциональная начальной энергии. Подставляя в левую часть уравнения (66) значение ds из формулы (64) и принимая во внимание, что $z = f(r)$, получим:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 [1 + f'^2(r)] + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2[gf(r) + h] \quad (67)$$

или

$$dr^2 [1 + f'^2(r)] + r^2 d\varphi^2 = 2[gf(r) + h] dt^2. \quad (67')$$

Так как относительно оси вращения имеет место теорема площадей, то

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \quad \text{и} \quad dt = \frac{r^2 d\varphi}{c}.$$

Подставляя это значение dt в уравнение (67'), получим:

$$dr^2 [1 + f'^2(r)] + r^2 d\varphi^2 = 2 [gf(r) + h] \frac{r^4 d\varphi^2}{c^2},$$

или

$$d\varphi = \frac{c}{r} \sqrt{\frac{1 + f'^2(r)}{2 [gf(r) + h] r^2 - c^2}} dr. \quad (68)$$

Отсюда, интегрируя, найдем φ как функцию r , т. е. уравнение траектории.

13. Сферический маятник. Сферическим маятником называется тяжелая материальная точка, движущаяся по неподвижной сфере. В первом приближении таким маятником можно считать малый груз, подвешенный на нерастяжимой нити или невесомом (легком) жестком стержне. Для решения задачи о движении маятника можно, очевидно, использовать результаты п. 12. Однако в данном случае будет несколько удобнее провести исследование не в цилиндрических, а в сферических координатах.

Пусть $l = OM$ (рис. 367) — радиус сферы, по которой движется точка (длина нити). Направим из центра O сферы вертикально вниз ось Oz и будем определять положение маятника сферическими координатами φ и θ , где φ — угол отклонения радиуса OM от вертикали, а θ — угол между вертикальными плоскостями MOz и xOz . На маятник M действуют сила тяжести mg и реакция сферы (или натяжение нити) N . Для составления уравнений движения воспользуемся первыми интегралами энергии и площадей. Так как сила mg потенциальная, а связь идеальная и склерономная, то имеет место интеграл энергии (42)

$$\frac{v^2}{2} - gz = h. \quad (69)$$

С другой стороны, поскольку сила mg параллельна оси z , а реакция N пересекает ось, то относительно оси z имеет место интеграл площадей

$$\text{mom}_z(\mathbf{v}) \equiv r^2 \frac{d\theta}{dt} = c,$$

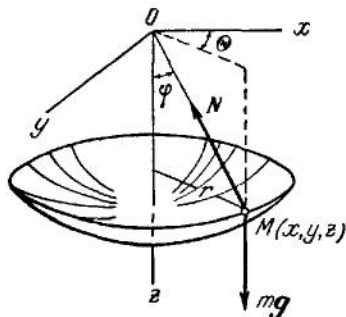


Рис. 367.

где r есть расстояние точки M от оси z . Так как $r = l \sin \varphi$, то этот интеграл принимает вид $l^2 \sin^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} = c$ или

$$\sin^2 \varphi \frac{d\theta}{dt} = c_1. \quad (70)$$

Элементарное перемещение точки M по сфере складывается из двух взаимно перпендикулярных перемещений $l d\varphi$ и $l \sin \varphi d\theta$, направленных соответственно по касательным к меридиану и к параллели, проходящим через точку M . Следовательно,

$$ds^2 = l^2 d\varphi^2 + l^2 \sin^2 \varphi d\theta^2,$$

откуда

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + l^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Подставляя это значение v^2 в уравнение (69) и учитывая, что $z = l \cos \varphi$, получим:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2 \varphi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2 \frac{g}{l} \cos \varphi = h_1, \quad (71)$$

где h_1 — новая постоянная, которая, так же как и c_1 , определяется подстановкой начальных условий в уравнения (71) и (70).

Таким образом, движение маятника описывается системой дифференциальных уравнений (70) и (71).

Умножая обе части равенства (71) на $\sin^2 \varphi$ и вычитая из него квадрат равенства (70), получим для определения φ уравнение

$$\sin^2 \varphi \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(h_1 + 2 \frac{g}{l} \cos \varphi\right) \sin^2 \varphi - c_1^2. \quad (72)$$

Введем новое переменное u , полагая:

$$u = \frac{z}{l} = \cos \varphi, \quad \frac{du}{dt} = -\sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}. \quad (73)$$

Тогда уравнение (72) преобразуется к виду

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = F(u), \quad (74)$$

где

$$F(u) = \left(h_1 + 2 \frac{g}{l} u\right) (1 - u^2) - c_1^2. \quad (75)$$

Из уравнения (74) находим:

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{F(u)}. \quad (76)$$

откуда

$$t = \pm \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{F(u)}}, \quad (77)$$

где u_0 — значение u в момент $t = 0$.

Поскольку $F(u)$ есть многочлен третьей степени относительно u , то стоящий в правой части интеграл будет эллиптическим. Таким образом, зависимость между u и t , а следовательно, и между φ и t может быть выражена с помощью соответствующей эллиптической функции, называемой функцией Вейерштрасса.

Представим уравнение (70), перейдя в нем от φ к переменному u , в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c_1}{1-u^2}. \quad (78)$$

Если зависимость $u(t)$ определена, то из (78) найдем:

$$\theta(t) = \theta_0 + c_1 \int_0^t \frac{dt}{1-u^2}, \quad (79)$$

где θ_0 есть значение θ в момент $t = 0$.

Таким образом, определение закона движения сферического маятника сводится к вычислению интегралов, стоящих в правых частях равенств (77) и (79).

Уравнение траектории маятника можно найти, исключив t из уравнений $\varphi = \varphi(t)$ и $\theta = \theta(t)$, даваемых интегралами (77), (79). Можно также, заменив в (79) dt его значением из равенства (76), получить непосредственно уравнение

$$\theta = \theta_0 \pm c_1 \int_{u_0}^u \frac{du}{(1-u^2)F(u)}, \quad (80)$$

связывающее θ и φ , т. е. определяющее траекторию маятника.

Покажем, как можно, не вычисляя соответствующих интегралов, получить качественное представление о характере движения маятника. Это движение можно рассматривать как слагающееся из колебаний в вертикальной плоскости MOz (см. рис. 367), определяемых изменением угла φ , и из вращения этой плоскости вокруг оси z , определяемого изменением угла θ .

Рассмотрим многочлен третьей степени $F(u)$ и покажем, что все три корня этого многочлена являются вещественными. В самом деле, если изобразить зависимость $F(u)$ графически, то легко убедиться,

что кривая $F(u)$ имеет вид, показанный на рис. 368. Для этого представим выражение (75) в виде

$$F(u) = -2 \frac{g}{l} u^3 + \dots$$

Тогда, очевидно, что

$$F(+\infty) = -\infty, \quad F(-\infty) = +\infty \quad (\text{точки } 1 \text{ и } 5).$$

Далее, из самого равенства (75) следует, что

$$F(+1) = -c_1^2, \quad F(-1) = -c_1^2 \quad (\text{точки } 2 \text{ и } 4).$$

Наконец, исключая пока из рассмотрения случай, когда во все время движения $\varphi = \text{const}$ и $\frac{du}{dt} \equiv 0$, мы видим из уравнения (74),

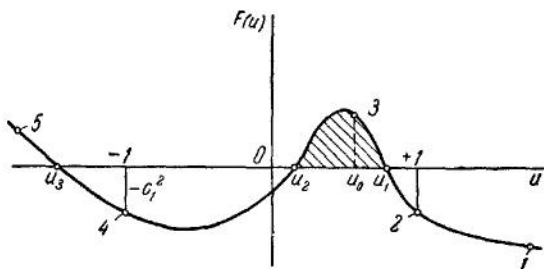


Рис. 368

что при некотором значении u , соответствующем рассматриваемому движению, т. е. при $|u| = |\cos \varphi| < 1$, должно быть

$$F(u) = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 > 0 \quad (\text{точка } 3).$$

Итак, кривая $F(u)$ проходит через точки 1, 2, 3, 4, 5. Так как она должна при этом пересечь ось абсцисс три раза, а уравнение $F(u) = 0$ имеет только три корня, то других точек пересечения с осью абсцисс у кривой $F(u)$ нет. Следовательно, многочлен $F(u)$ действительно имеет три вещественных корня u_1, u_2, u_3 , из которых первые два по модулю меньше единицы, а $|u_3| > 1$.

При построении графика рис. 368 мы рассматривали u как произвольную переменную. Найдем теперь, какие значения величины u и $F(u)$ могут принимать в нашей задаче. Так как у нас $u = \cos \varphi$, то $-1 \leq u \leq +1$. Кроме того, поскольку $F(u)$ есть правая часть уравнения (74), то $F(u) > 0$. Обоим этим условиям одновременно удовлетворяет только та часть кривой, которая ограничивает заштрихованную на рисунке площадь. Но тогда

$$u_1 \geq u \geq u_2 \quad (81)$$

и, следовательно, при движении маятника угол φ (или координата $z = lu = l \cos \varphi$) изменяется в пределах

$$\varphi_2 \geq \varphi \geq \varphi_1 \quad (z_1 \geq z \geq z_2), \quad (82)$$

где $\varphi_1 = \arccos u_1$, $\varphi_2 = \arccos u_2$. Таким образом, маятник будет двигаться между параллелями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (или $z = z_1$ и $z = z_2$), показанными на рис. 369, попеременно достигая каждой из них, т. е. движение маятника в плоскости MOz (см. рис. 367) будет представлять собой колебания между положениями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$. Последний вывод следует из того, что скорость $\dot{\varphi}$ может обратиться в нуль только при $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$, так как, согласно формулам (73) и (74), при $\dot{\varphi} = 0$ будет $\dot{u} = 0$ и $F(u) = 0$, а для маятника по доказанному $F(u) = 0$ только при $u = u_1$ и $u = u_2$.

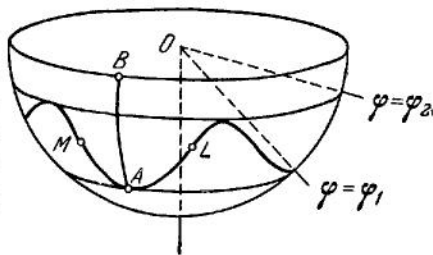


Рис. 369.

Положения параллелей $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ можно в каждом конкретном случае определить, найдя соответствующие корни уравнения $F(u) = 0$; значения этих корней, как видно из равенства (75), зависят от h_1 и c_1 , т. е. от начальных условий. Однако можно доказать, что всегда $u_1 = z_1/l > 0$, и при этом $u_1 > |u_2|$, т. е. $z_1 > |z_2|$. Таким образом, если в частном случае $z_2 < 0$, т. е. верхняя параллель лежит выше центра O сферы (движение при этом возможно, когда связь будет неосвобождающей), то эта параллель будет ближе к центру O , чем нижняя; иначе говоря, при движении маятника его среднее положение по вертикали будет всегда ниже центра сферы O . Чтобы это доказать, разделим обе части равенства (75) на коэффициент при u^3 , т. е. на $-2g/l$; тогда в уравнении $F(u) = 0$ коэффициент при u будет равен -1 и по свойству корней кубического уравнения должно быть:

$$u_1 u_3 + u_2 u_3 + u_1 u_2 = -1.$$

Отсюда находим, что

$$u_1 + u_2 = -\frac{(1 + u_1 u_2)}{u_3} > 0,$$

так как по доказанному $|u_1 u_2| < 1$ и $u_3 < 0$. Следовательно, или оба корня u_1 и u_2 положительны, или положителен наибольший из них, т. е. u_1 , и при этом $u_1 > |u_2|$.

Покажем, что колебания маятника в плоскости MOz являются периодическими. Действительно, при движении маятника от параллели $\varphi = \varphi_2$ до параллели $\varphi = \varphi_1$ угол φ убывает, а u растёт

Следовательно, в равенстве (76) перед радикалом надо взять знак плюс и время этого движения будет:

$$T_{12} = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}}.$$

При движении же от $\varphi = \varphi_1$ до $\varphi = \varphi_2$ величина u убывает и время этого движения будет:

$$T_{21} = - \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{F(u)}} = T_{12}.$$

Отсюда и следует, что маятник движется между параллелями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ периодически с периодом $T = 2T_{12}$.

Рассмотрим теперь, как вращается плоскость MOz вокруг вертикали Oz . Для этого обратимся к уравнению (78). Будем считать $c_1 \neq 0$, так как при $c_1 = 0$, т. е. при $\text{пот}_z(\mathbf{v}_0) = 0$, угол $\theta = \text{const}$ и мы получим уже рассмотренный в п. 5 случай плоского маятника. При $c_1 \neq 0$ для значений $u_2 \leq u \leq u_1$ будет $u^2 < 1$ (см. рис. 368). Тогда из уравнения (78) следует, что угловая скорость $\dot{\theta}$ имеет постоянный знак, определяемый знаком c_1 . Таким образом, плоскость MOz вращается все время в одну и ту же сторону с переменной угловой скоростью, тем большей, чем больше $|u| = |z|/L$, т. е. чем ближе маятник к вертикали Oz .

Из изложенного следует, что траектория маятника на сфере будет иметь вид кривой, показанной на рис. 369; эта кривая попеременно касается параллелей $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ (на параллелях $\dot{\varphi} = 0$, а $\dot{\theta} \neq 0$) и располагается симметрично относительно меридиана AB . Чтобы убедиться в последнем, рассмотрим две точки L и M траектории, лежащие на одной и той же параллели, для которых, следовательно, $u_L = u_M$. Тогда, учитывая, что величина u на участке LA растет, а на участке AM убывает, получим из уравнения (80)

$$\theta_A - \theta_L = c_1 \int_{u_L}^{u_A} \frac{du}{(1-u^2)F(u)},$$

$$\theta_M - \theta_A = -c_1 \int_{u_A}^{u_M} \frac{du}{(1-u^2)F(u)} = c_1 \int_{u_L}^{u_A} \frac{du}{(1-u^2)F(u)},$$

т. е. $\theta_A - \theta_L = \theta_M - \theta_A$, откуда и следует наличие указанной симметрии.

Проекция траектории на горизонтальную плоскость xu в случае, когда $u_2 > 0$, т. е. когда обе параллели $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ лежат на нижней полусфере, показана на рис. 370. Траектория должна поочередно касаться окружностей $r = OA_1 = l \sin \varphi_2$ и $r = OB_1 = l \sin \varphi_1$, при этом можно доказать (доказательство опускаем), что $\angle A_1OB_1 > 90^\circ$ и что кривая не имеет точек перегиба. Картина движения в плоскости xu представляется такой, как если бы точка двигалась по кривой, близкой к эллипсу, которая в свою очередь вращается вокруг центра O в сторону движения точки (эта кривая тем ближе к эллипсу, чем меньше отклонения маятника от вертикали).

В случае, когда $u_2 < 0$ (параллель $\varphi = \varphi_2$ лежит на верхней полусфере), проекция траектории маятника на плоскость xu будет попеременно касаться параллели $\varphi = \varphi_1$, экватора, параллели $\varphi = \varphi_2$ и т. д. (рис. 371); в отличие от предыдущего случая, эта кривая может иметь точки перегиба.

Картину движения маятника при малых колебаниях можно попытаться найти, исходя из уравнений движения в проекциях на оси декартовых координат (см. рис. 367):

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -N \frac{x}{l}, \\ m\ddot{y} &= -N \frac{y}{l}, \\ m\ddot{z} &= mg - N \frac{z}{l}. \end{aligned} \quad (83)$$

Так как

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{l^2 - (x^2 + y^2)} = \\ &= l \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

то, считая $x \ll l$ и $y \ll l$, можно в первом приближении принять

$z \approx l$, $\ddot{z} = 0$. Тогда из уравнений (83) получим $N = mg$ и

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \ddot{y} + k^2 y = 0 \quad \left(k^2 = \frac{g}{l} \right),$$

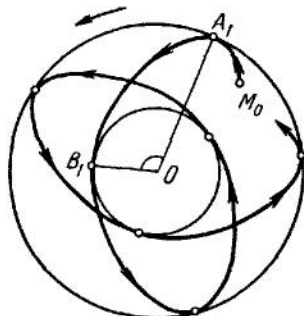


Рис. 370.

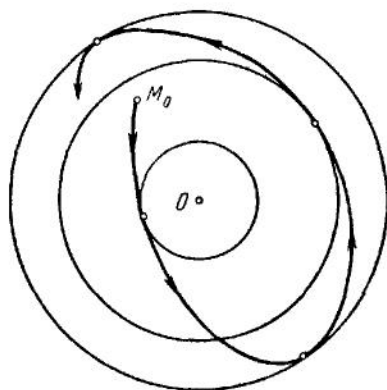


Рис. 371.

откуда, интегрируя, найдем:

$$x = a \sin(kt + \alpha), \quad y = b \sin(kt + \beta), \quad (84)$$

где a , α , b , β — постоянные интегрирования. Если принять, что в начальный момент $t=0$ $x = x_0$, $\dot{x} = 0$, $y = 0$, $\dot{y} = v_0$, то из (84) получим закон движения маятника, соответствующий этим начальным условиям, в виде

$$x = x_0 \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt; \quad (85)$$

при этом x_0 и v_0/k считаются величинами малыми по сравнению с l .

Исключая из уравнений (85) t , найдем, что траекторией маятника в плоскости xu будет эллипс. Этот результат не является, однако, верным, так как оказывается, что, полагая приближенно $z \approx l$, мы теряем в решении (85) члены того же порядка малости, что и x_0 и v_0/k . Если же учесть эти потерянные члены, то окажется, что траекторией маятника в плоскости xu будет не неподвижный эллипс, а эллипс, вращающийся в сторону движения точки¹⁾, что и было отмечено выше.

14. Конический маятник. При исследовании движения сферического маятника мы исключили из рассмотрения случай, когда $\varphi_0 = 0$ и во все время движения $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Если такой случай имеет место, то $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$, т. е. полоса, в которой движется маятник, вырождается в окружность; получающийся при этом маятник называется *коническим*. В случае конического маятника уравнение $F(u) = 0$ должно иметь кратный корень $u_1 = u_2 = u_0$; одновременно (см. рис. 368) будет $F'(u_0) = 0$. Следовательно, корень u_0 удовлетворяет двум уравнениям

$$F(u_0) \equiv \left(h_1 + 2 \frac{g}{l} u_0 \right) (1 - u_0^2) - c_1^2 = 0,$$

$$F'(u_0) \equiv 2 \frac{g}{l} (1 - u_0^2) - 2u_0 \left(h_1 + 2 \frac{g}{l} u_0 \right) = 0.$$

Исключая отсюда h_1 , находим, что c_1 и u_0 связаны зависимостью

$$c_1^2 = \frac{g}{lu_0} (1 - u_0^2)^2.$$

¹⁾ См. А. Н. Крылов, Лекции по приближенным вычислениям, изд. 6, 1954, стр. 266—273.

Но, как следует из равенства (78),

$$c_1 = \dot{\theta}_0 (1 - u_0^2),$$

а

$$u_0 = \cos \varphi_0.$$

В результате приходим к выводу, что конический маятник может получиться лишь в том случае, когда при $\dot{\varphi}_0 = 0$ между начальным углом отклонения φ_0 и начальной угловой скоростью $\dot{\theta}_0$ имеет место зависимость

$$\dot{\theta}_0 = \sqrt{\frac{g}{l \cos \varphi_0}}. \quad (86)$$

Поскольку траектория конического маятника (окружность радиуса $r = l \sin \varphi_0$) заранее известна, то соотношение (86) можно непосредственно найти из уравнений движения маятника в проекциях на главную нормаль и бинормаль к траектории. Эти уравнения, если учесть, что скорость конического маятника $v = r \dot{\theta}_0 = (l \sin \varphi_0) \dot{\theta}_0$, дают (см. рис. 367):

$$m(l \sin \varphi_0) \dot{\theta}_0^2 = N \sin \varphi_0, \quad 0 = N \cos \varphi_0 - mg,$$

откуда, исключая N , и получаем равенство (86).

15. Принцип Даламбера. Для изучения несвободного движения можно пользоваться принципом Даламбера, являющимся одним из основных принципов (начал) механики. Рассмотрим сначала случай свободной точки. Если на свободную материальную точку действует сила F , то она сообщает точке ускорение \boldsymbol{w} , направленное по силе; уравнение движения точки будет:

$$m\boldsymbol{w} = F, \quad (87)$$

откуда

$$F + (-m\boldsymbol{w}) = 0 \quad \text{или} \quad F + J = 0. \quad (88)$$

В равенстве (88) вектор $J = -m\boldsymbol{w}$ можно рассматривать как силу, которая, будучи приложенной к точке, уравновесит силу F . Эта сила, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная в сторону, противоположную ускорению, называется *силой инерции*. Уравнение (88) показывает, что сумма векторов F и $J = -m\boldsymbol{w}$ равна нулю или что в каждый момент времени силы, приложенные к точке, могут быть уравновешены добавлением к ним силы инерции. Это и есть начало Даламбера для свободной материальной точки.

Рассмотрим теперь несвободную материальную точку. Когда точка несвободна, то она под действием активной силы F получает ускорение \boldsymbol{w} , которое вообще не направлено по силе.

Если разложить силу F на силу, равную $m\omega$, и некоторую другую силу R (рис. 372), то точка будет двигаться так, как будто на нее действует только сила $m\omega$ (эффективная сила); сила R при этом как бы теряется (потерянная сила). Высказанный Даламбером принцип состоит в том, что при несвободном движении потерянная сила R уравнивается реакцией связи N , т. е.

$$N + R = 0. \quad (89)$$

Из рис. 372 видно, что если к движущейся точке M приложить силу инерции $J = -m\omega$, которая противоположна эффективной силе, то будет иметь место равенство

$$F + J = R.$$

Перенося R влево и учитывая, что на основании равенства (89) $-R = N$, получаем:

$$F + N + J = 0. \quad (90)$$

Равенство (90) представляет собой другое выражение принципа Даламбера для несвободной материальной точки: действующие на движущуюся материальную точку активные силы и реакции связей можно в любой момент времени уравновесить добавлением к ним силы инерции. Таким образом, принцип Даламбера дает возможность при решении задач динамики составлять уравнения движения в форме уравнений равновесия, используя для этого соответствующие уравнения или принципы статики. Эффективность такого метода особенно выявляется в динамике системы.

В качестве примера рассмотрим груз массы m (который будем далее считать материальной точкой), привязанный к нити OM длиной r и движущийся по окружности (рис. 373). На точку M действует реакция нити N (действием других сил, например силы тяжести, пренебрежем). Для составления уравнений движения воспользуемся принципом Даламбера и приложим к точке M силу инерции J , разложив ее на касательную и нормальную составляющие J_τ и J_n ; при этом J_τ и J_n направлены соответственно противоположно ω_τ и ω_n ,

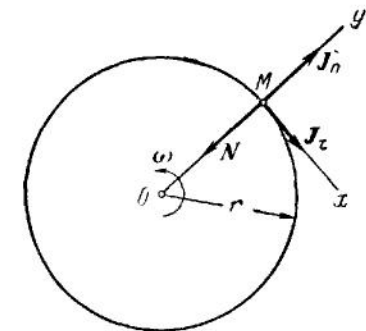


Рис. 373.

а по модулю

$$|J_{\tau}| = m \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad |J_n| = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2,$$

где ω — угловая скорость вращения радиуса r (нити). Тогда, согласно принципу Даламбера, силы N , J_{τ} , J_n должны находиться в равновесии. Составляя уравнения равновесия в проекциях на оси x и y , получим:

$$J_{\tau} \equiv m \frac{dv}{dt} = 0, \quad J_n - N = 0.$$

Из первого уравнения находим, что $v = \text{const} = v_0$, т. е. что точка движется при этом по окружности с численно постоянной скоростью; из второго уравнения определяем величину реакции: $N = mr\omega^2$.

Метод решения задач с помощью принципа Даламбера ясен из рассмотренного примера и остается таким же, если на точку, кроме реакции N , действует любая система других сил.

Следует еще раз подчеркнуть, что в рассмотренном примере к точке приложена только сила N (центростремительная сила) и под действием этой силы точка описывает окружность; никакая сила инерции J на точку не действует и понятие об этой силе вводится лишь для того, чтобы, используя принцип Даламбера, решить задачу методами статики.

Отметим еще следующее. Если на точку действует некоторая сила F , то эта сила есть результат взаимодействия точки с каким-то другим телом. При этом по третьему закону Ньютона на данное тело будет со стороны точки действовать сила $Q = -F$ (сила противодействия). С другой стороны, если мы будем применять к точке, движущейся под действием силы F , принцип Даламбера, то, вводя силу инерции J , получим, согласно уравнению (88), $F + J = 0$ или $J = -F$. Отсюда следует, что $J = Q$, т. е. что сила инерции равна как вектор силе противодействия. Однако эти две силы не следует отождествлять. Сила Q есть сила, реально действующая на тело, с которым взаимодействует движущаяся точка, и равенство $Q = -F$ выражает соотношение, вытекающее из закона действия и противодействия (уравновешивать силу F сила Q не может, так как эти силы приложены к разным телам). Сила же $J = -m\omega$, на движущееся тело (или точку) не действует, а равенство $F + J = 0$ выражает в статической форме уравнение движения точки, находящейся под действием только силы F . Эти рассуждения относятся и к случаю, когда на точку действует несколько сил, если под F понимать их равнодействующую, а под Q — геометрическую сумму сил противодействия.

В рассмотренном выше примере сила противодействия Q , векторно равная J , будет приложена со стороны груза к нити и вызывает ее натяжение (центробежная сила). Если точка M , изображенная на рис. 373, будет двигаться по окружности радиуса r под действием силы притяжения к телу M_1 , находящемуся в центре O , то определяемая тем же расчетом сила $N = mr\omega^2$ — это сила, с которой тело M_1 притягивает точку M , а сила противодействия Q , векторно равная J , будет силой, с которой точка M притягивает тело M_1 , и будет приложена к этому телу. При этом по-прежнему никакая сила инерции J на точку M действовать не будет.

§ 39. Относительное движение материальной точки

1. **Инерциальные и неинерциальные системы отсчета.** Вопрос об относительном движении материальной точки тесно соприкасается с самыми основными идеями механики. Всякое движение точки (или тела) мы должны рассматривать относительно некоторой системы отсчета. До сих пор мы изучали движение по отношению к так называемой инерциальной системе отсчета (см. § 14, п. 2), т. е. система отсчета, в которой справедливы основные законы динамики и по отношению к которой материальная точка, на которую никакие силы не действуют, движется по инерции (равномерно и прямолинейно). Инерциальную систему отсчета называют еще условно неподвижной, а движение по отношению к ней — абсолютным.

Сейчас мы перейдем к рассмотрению движения точки по отношению к системам отсчета, как угодно перемещающимся по отношению к инерциальной системе отсчета. Такое движение точки называют *относительным*. Ниже будет показано, что система отсчета, перемещающаяся по отношению к инерциальной системе поступательно, равномерно и прямолинейно, будет также инерциальной, т. е. в ней основные законы динамики будут справедливы. Если же движение данной системы отсчета по отношению к инерциальной не является поступательным, равномерным и прямолинейным, то эта система является *неинерциальной* и в ней основные законы динамики, и в частности закон инерции, места не имеют. Чтобы распространить все уравнения динамики на неинерциальные системы отсчета, вводятся соответствующие силы инерции, аналогично тому как это делается в принципе Даламбера.

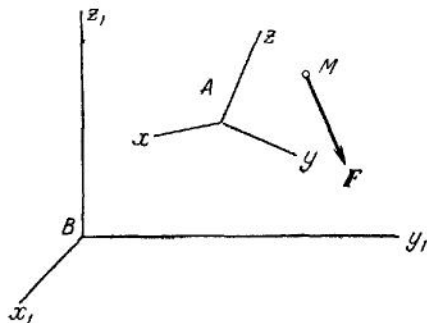


Рис. 374.

сила F , являющаяся результатом взаимодействия этой точки с другими материальными телами. Составим уравнения движения этой точки по отношению к системе отсчета $Axyz$, произвольно перемещающейся относительно инерциальной системы отсчета $Bx_1y_1z_1$ (рис. 374).

Из кинематики известно, что ускорение точки M относительно основной системы B , которое обозначим ω_a , равно сумме трех ускорений: относительного ω_r , т. е. ускорения по отношению к системе отсчета A , которое будем обозначать ω , переносного ω_e и добавочного или кориолисова $\omega_c = 2(\omega \times v)$, где ω есть угловая

2. **Дифференциальные уравнения относительного движения точки.** Рассмотрим материальную точку M , на которую действует

скорость системы отсчета A относительно системы B , а $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r$ — скорость точки по отношению к системе отсчета A . Тогда

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_e + \boldsymbol{\omega}_c. \quad (1)$$

Уравнение движения точки M относительно инерциальной системы отсчета B , согласно основному закону динамики, будет:

$$m\boldsymbol{\omega}_a = F. \quad (2)$$

Заменяя $\boldsymbol{\omega}_a$ его выражением из равенства (1), получаем:

$$m\boldsymbol{\omega} + m\boldsymbol{\omega}_e + m\boldsymbol{\omega}_c = F,$$

откуда

$$m\boldsymbol{\omega} = F + (-m\boldsymbol{\omega}_e) + (-m\boldsymbol{\omega}_c). \quad (3)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{J}_e = -m\boldsymbol{\omega}_e, \quad \mathbf{J}_c = -m\boldsymbol{\omega}_c. \quad (4)$$

Величины \mathbf{J}_e и \mathbf{J}_c , имеющие размерность силы, назовем соответственно *переносной* и *кориолисовой силами инерции*. Тогда из равенства (3) получим:

$$m\boldsymbol{\omega} = F + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c. \quad (5)$$

Уравнение (5) и представляет собой в векторной форме уравнение относительного движения точки (по отношению к подвижной системе отсчета A). Сравнивая между собой (5) и (2), заключаем, что уравнения относительного движения точки можно составлять так же, как уравнения абсолютного движения, если к действующим на точку силам взаимодействия с другими материальными телами прибавить переносную и кориолисову силу инерции.

Проектируя обе части равенства (5) на оси $Axuz$, получим дифференциальные уравнения относительного движения точки в проекциях на прямоугольные декартовы оси координат:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + J_{ex} + J_{cx}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + J_{ey} + J_{cy}, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + J_{ez} + J_{cz}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Как видно из уравнений (5) или (6), введение сил инерций \mathbf{J}_e и \mathbf{J}_c позволяет при изучении относительного движения составлять уравнения движения точки в неинерциальной системе отсчета в той же форме, которая имеет место для инерциальной системы. Иными словами, с помощью сил \mathbf{J}_e и \mathbf{J}_c учитывается влияние движения подвижной системы отсчета на относительное движение точки.

Отметим в заключение, что в частном случае подвижная система отсчета A может также быть инерциальной. Это, очевидно, будет

иметь место, если уравнения (5) и (2) совпадают, т. е. если $\omega_e = 0$ и $\omega_c = 2(\omega \times v) = 0$, что при произвольном виде зависимости $v(t)$ возможно только тогда, когда система отсчета A движется относительно системы B поступательно, равномерно и прямолинейно. Отсюда заключаем, что любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы поступательно, равномерно и прямолинейно, также является инерциальной. Из этого результата в свою очередь вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится данная система отсчета в покое или же совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение (принцип относительности Галилея — Ньютона).

3. Уравнение относительного покоя точки. Из уравнения (5) легко найти уравнение относительного покоя точки. Если точка находится относительно подвижной системы отсчета A в покое, то $\omega = 0$ и $v = 0$, а следовательно, и $\omega_c = 2(\omega \times v) = 0$. Приняв это во внимание, мы из (5) получаем уравнение относительного покоя в виде

$$F + J_e = 0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что уравнения относительного покоя составляются так же, как уравнения равновесия в неподвижной (инерциальной) системе отсчета, если к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную силу инерции.

Отметим следующее различие понятия об условиях равновесия в инерциальной и неинерциальной системах отсчета. В инерциальной системе отсчета условие равновесия $F = 0$ означает, что точка при этом может быть или в покое, или в состоянии равномерного прямолинейного движения. В неинерциальной же системе отсчета уравнение (7) определяет только условие относительного покоя точки. Если же точка совершает равномерное и прямолинейное относительное движение ($v = \text{const} \neq 0$), то действующие на нее силы будут удовлетворять уравнению

$$F + J_e + J_c = 0, \quad (8)$$

где $J_c \neq 0$, когда подвижная система движется непоступательно и скорость v не параллельна ω .

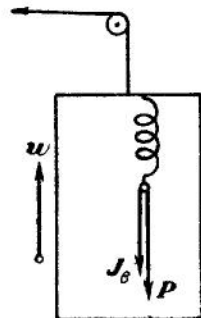


Рис. 375.

Рассмотрим следующий пример: пусть лифт, в котором находится наблюдатель, изолированный от внешнего мира, может опускаться или подниматься по вертикали (рис. 375) и пусть к имеющимся в лифте пружинным весам подвешен некоторый груз весом P . Если лифт находится в покое или движется равномерно, то весы показывают вес P . Если же лифт вместе с наблюдателем будет подниматься вверх с ускорением w , то, согласно уравнению (7), весы покажут вес, больший P на величину переносной силы инерции

$J_e = \frac{P}{g} w$, а при движении лифта вниз с ускорением w весы покажут вес $P - \frac{P}{g} w$, меньший P . Наблюдатель, сидящий в лифте и не знающий о его движении, может объяснить увеличение или уменьшение веса груза изменением интенсивности поля тяготения, в котором находится груз.

Если лифт будет опускаться вниз с ускорением $w = g$, то пружинные весы покажут вес, равный $P - \frac{P}{g} g = 0$, т. е. для наблюдателя, находящегося в лифте, тело потеряет свой вес; это явление наблюдатель может объяснить или свободным падением лифта, или отсутствием поля тяготения. То же явление обнаруживается в опыте с маятником, который находится на доске, могущей свободно (без трения) падать по вертикали вниз (рис 376). В этом случае маятник, отклоненный от вертикали на угол φ , при свободном падении доски вниз колебаться не будет, так как из уравнения (7) следует, что он будет относительно падающей доски в покое (опыт проф. Любимова).

Эти примеры приводят нас к принципу эквивалентности инертной и тяжелой масс.

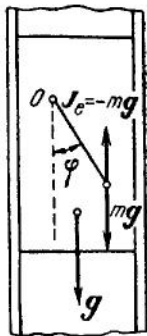


Рис. 376.

4. Теорема об изменении кинетической энергии при относительном движении. Поскольку уравнение относительного движения (5) отличается от уравнения (2) только наличием в правой части дополнительных слагаемых J_e и J_c , то, очевидно, все общие теоремы динамики точки, полученные в § 33 как следствия уравнения (2), имеют место и в относительном движении, если только к действующим на точку силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции.

Например, теорема об изменении количества движения точки (в дифференциальной форме) имеет в инерциальной системе отсчета вид

$$d(m\mathbf{v}) = F dt;$$

следовательно, в неинерциальной системе отсчета выражение этой теоремы будет:

$$d(m\mathbf{v}) = F dt + J_e dt + J_c dt. \quad (9)$$

Аналогично теорема об изменении кинетической энергии в неинерциальной системе отсчета может быть выражена равенством

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr + J_e \cdot dr + J_c \cdot dr, \quad (10)$$

где r есть радиус-вектор точки относительно подвижной системы отсчета A . Покажем, что последнее слагаемое $J_c \cdot dr$ в равенстве (10) будет всегда равно нулю. В самом деле,

$$J_c \cdot dr = -m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) dr = -m\left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{dr}{dt}\right) \cdot dr = 0,$$

так как в полученном смешанном произведении два вектора $\frac{dr}{dt}$ и dr коллинеарны.

Следовательно, выражение теоремы об изменении кинетической энергии точки в относительном движении принимает вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr + J_e \cdot dr, \quad (11)$$

т. е. при относительном движении дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе приложенных к точке сил взаимодействия с другими телами, сложенной с элементарной работой переносной силы инерции.

5. Относительный покой и относительное движение вблизи поверхности Земли. Земля не является инерциальной системой отсчета, так как по отношению к звездам она совершает вращение вокруг своей оси и движется непрямолинейно вокруг Солнца. Однако последнее движение для промежутков времени, много меньших одного года, мало отличается от равномерного и прямолинейного. Поэтому мы рассмотрим только влияние суточного вращения Земли вокруг ее

оси на относительный покой или движение тел, находящихся вблизи земной поверхности. Это сравнительно медленное вращение совершается (по отношению к звездам) со скоростью 1 оборот за 23 часа 56 минут 4 секунды, т. е. с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} \approx 0,0000729 \text{ 1/сек.} \quad (12)$$

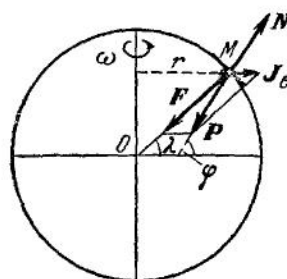


Рис. 377.

1) *Относительный покой вблизи земной поверхности. Кажущийся вес тела.* Рассмотрим груз массы m , подвешенный к пружинным весам (или к нити) и находящийся относительно Земли в покое (рис. 377).

Тогда, согласно уравнению (7), будет $F + J_e + N = 0$, где F — сила притяжения Земли, направленная к ее центру, N — реакция пружины, равная ее натяжению, J_e — переносная сила инерции. Так как $\omega = \text{const}$, то сила J_e имеет только нормальную составляющую, перпендикулярную к оси вращения Земли, а численно $J_e = m r \omega^2$, где r есть расстояние груза от оси вращения Земли. Введем обозначение

$$F + J_e = P. \quad (13)$$

Тогда условие равновесия дает $P + N = 0$ или $N = -P$. Следовательно, P есть та сила, которую пружинные весы регистрируют как силу тяжести (вес) груза. Направление силы P дает направление вертикали (кажущейся) в данной точке земной поверхности, а

плоскость, перпендикулярная к P , будет горизонтальной плоскостью. Поскольку величина ω для Земли мала, то численно сила P мало отличается от силы притяжения F (на экваторе разность $F - P$ является наибольшей и составляет около 0,34% от величины F); направление силы P так же мало отличается от направления F (разность показанных на рис. 377 углов λ — геоцентрическая широта и φ — астрономическая широта будет наибольшей при $\lambda = 45^\circ$ и равна приблизительно $11'$).

Так как при всех практических расчетах в уравнения равновесия вводится сила P , определяемая взвешиванием, а не сила притяжения F , то тем самым в этих уравнениях фактически учитывается сила J_e . Следовательно, при решении задач статики никаких дополнительных поправок для учета вращения Земли в уравнения равновесия вводить не надо.

2) *Отклонение падающих тел от вертикали.* Рассмотрим материальную точку M , свободно падающую на земную поверхность с небольшой (по сравнению с радиусом Земли) высоты. Действующую на точку силу тяжести $P = mg$, где P определяется равенством (13), будем считать постоянной, а сопротивлением воздуха пренебрежем. Свяжем с Землей подвижную систему координат, причем ось z подвижного трехгранника направим по вертикали вверх, ось x — по касательной к меридиану к югу, а ось y — по касательной к параллели к востоку (рис. 378).

Рассматривая движение точки M относительно выбранной системы отсчета, связанной с Землей, мы должны, согласно уравнению (5), придать к силе притяжения Земли, действующей на точку, еще силы инерции J_e и J_c . Но сила J_e входит в силу тяжести $P = mg$, направленную по оси z (вертикально вниз). Следовательно, для учета вращения Земли надо к силе P прибавить только кориолисову силу инерции $J_c = -m\omega v$.

Рассмотрим сначала, как это скажется на результате качественно. Так как сила J_c мала по сравнению с P , то относительную скорость v падающей точки можно в первом приближении считать направленной по силе P , т. е. по вертикали вниз. Вектор угловой скорости ω направлен вдоль земной оси в ту сторону, откуда вращение Земли видно происходящим против хода часовой стрелки (см. рис. 378). Тогда, как видно из рисунка, кориолисово ускорение

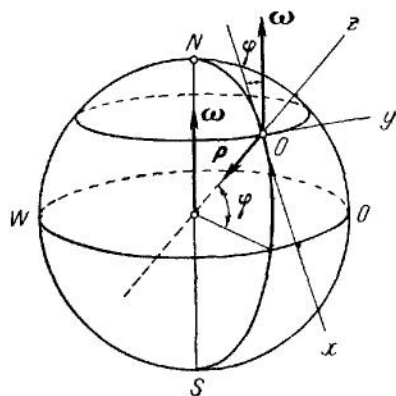


Рис. 378.

$\boldsymbol{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$ будет направлено перпендикулярно к плоскости меридиана NOS на запад, а сила $\boldsymbol{J}_c = -m\boldsymbol{w}_c$ — на восток (и в северном и в южном полушариях). Таким образом, в первом приближении влияние вращения Земли скажется в том, что свободно падающая точка будет отклоняться от направления вертикали к востоку.

Произведем теперь количественный расчет. Составляя уравнения относительного движения точки (6) в проекциях на выбранные оси координат, получим:

$$m\ddot{x} = -m\omega_{cx}, \quad m\ddot{y} = -m\omega_{cy}, \quad m\ddot{z} = -mg - m\omega_{cz}, \quad (14)$$

где

$$\boldsymbol{w}_c = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Если широту точки M обозначить через φ , то проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на оси x , y , z будут:

$$\omega_x = -\omega \cos \varphi, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \omega \sin \varphi.$$

Заменяя ω_x , ω_y , ω_z в равенстве (15) их значениями, будем иметь:

$$\boldsymbol{w}_c = 2 \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\omega \cos \varphi & 0 & \omega \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix},$$

откуда

$$\omega_{cx} = -2\omega \sin \varphi \cdot \dot{y},$$

$$\omega_{cy} = 2\omega(\cos \varphi \cdot \dot{z} + \sin \varphi \cdot \dot{x}),$$

$$\omega_{cz} = -2\omega \cos \varphi \cdot \dot{x}.$$

Подставляя в уравнения (14) найденные значения ω_{cx} , ω_{cy} , ω_{cz} и сокращая на m , получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega \sin \varphi \cdot \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -2\omega(\cos \varphi \cdot \dot{z} + \sin \varphi \cdot \dot{x}), \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega \cos \varphi \cdot \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Так как величины ω и φ постоянны, то мы можем уравнения (16) проинтегрировать один раз. Предполагая, что в начальный момент точка находится в начале координат и начинает падать без начальной скорости, имеем начальные условия:

$$\text{при } t=0 \begin{cases} x = y = z = 0, \\ \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0. \end{cases}$$

Интегрируя уравнения (16) при этих начальных условиях, получим:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= 2\omega \sin \varphi \cdot y, \\ \dot{y} &= -2\omega (\cos \varphi \cdot z + \sin \varphi \cdot x), \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega \cos \varphi \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

(произвольные постоянные, как легко видеть, равны нулю).

Интегрировать дальше эту систему уравнений обычными методами несколько сложно; поэтому будем интегрировать их методом последовательных приближений. Учитывая равенство (12), делаем первое приближение, пренебрегая членами, содержащими множитель ω . Тогда будем иметь:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 0, \quad \dot{z} = -gt,$$

откуда, интегрируя и учитывая начальные условия, найдем:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (18)$$

Уравнения (18) дают закон движения точки без учета влияния вращения Земли. Подставляя полученные значения x , y , z в уравнения (17), будем иметь:

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \omega gt^2 \cos \varphi, \quad \dot{z} = -gt,$$

откуда, интегрируя, получим второе приближение:

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \varphi, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2. \quad (19)$$

Уравнения (19) дают закон движения точки, в котором введением кориолисовой силы инерции учтено влияние вращения Земли. Из этих уравнений видно, что точка при падении отклоняется от вертикали к востоку по закону

$$y = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \varphi.$$

Подставляя далее полученные значения x , y , z из (19) в уравнения (17), мы делаем третье приближение, которое даст более точный закон движения. Имеем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{2}{3}\omega^2 g \sin \varphi \cos \varphi \cdot t^3, & \dot{y} &= \omega g \cos \varphi \cdot t^2, \\ \dot{z} &= -gt + \frac{2}{3}\omega^2 g \cos^2 \varphi \cdot t^3, \end{aligned}$$

откуда, интегрируя и учитывая начальные условия, получим третье приближение:

$$\left. \begin{aligned} x &= \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \cdot \frac{gt^4}{6}, \\ y &= \omega \cos \varphi \cdot \frac{gt^3}{3}, \\ z &= -\frac{gt^2}{2} + \omega^2 \cos^2 \varphi \cdot \frac{gt^4}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Мы видим, что при третьем приближении появляется составляющая движения по оси x ; следовательно, кроме отклонения к востоку, точка имеет еще отклонение к югу (для северного полушария), которое весьма мало, так как в выражение x входит очень малая величина ω^2 .

Продолжая далее таким образом, мы будем получать все более и более точные формулы. Однако практически эти поправки ввиду их малости интереса не представляют.

Рассмотрим, как в первом приближении величина восточного отклонения зависит от высоты падения. Исключая из уравнений (19) время t , найдем уравнение траектории точки (полукубическая парабола)

$$y^2 = -\frac{8}{9} \left(\frac{\omega^2}{g} \cos^2 \varphi \right) z^3. \quad (21)$$

Тогда если точка падает с высоты H , то при падении на Землю $z = -H$ и восточное отклонение

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \omega \cos \varphi \sqrt{\frac{2H^3}{g}}.$$

Это отклонение пропорционально угловой скорости вращения Земли ω и, следовательно, является величиной малой. Например, на широте Москвы ($\varphi \approx 56^\circ$, $g \approx 9,82 \text{ м/сек}^2$) при падении с высоты $H = 100 \text{ м}$ величина $\varepsilon \approx 1,2 \text{ см}$. С увеличением H отклонение ε растет пропорционально $H^{3/2}$.

Заметим, что предыдущие результаты можно получить непосредственно, интегрируя векторное уравнение

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} - 2m (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}).$$

Так как в первом приближении $\mathbf{v} = \mathbf{g}t$, то, подставляя это значение и сокращая на m , будем иметь:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g} - 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{g}t)$$

откуда, интегрируя первый раз, получим:

$$\frac{dr}{dt} = gt - (\omega \times g)t^2.$$

Интегрируя далее, найдем:

$$r = \frac{gt^2}{2} - (\omega \times g)\frac{t^3}{3}, \quad (22)$$

где вектор $\frac{gt^2}{2}$ направлен противоположно оси z , а вектор

$$- (\omega \times g)\frac{t^3}{3} = \omega g \cos \varphi \frac{t^3}{3} y^0$$

направлен по оси y перпендикулярно к плоскости, проходящей через меридиан и ось вращения Земли. Поэтому, проектируя обе части уравнения (22) на выбранные оси координат, получим систему уравнений (19).

3) *Влияние вращения Земли на движение тел вдоль земной поверхности.* Рассмотрим материальную точку, движущуюся на поверхности Земли по совершенно гладкой горизонтальной плоскости. Для учета того, как влияет на рассматриваемое движение вращение Земли, составим уравнение относительного движения (5) в осях $Oxuz$ (см. рис. 378). Принимая во внимание, что сила J_e по-прежнему входит в силу тяжести P , получим:

$$m\omega = P + N + J_c, \quad (23)$$

где N — нормальная реакция плоскости.

Один из первых интегралов уравнения (23) можно сразу найти с помощью теоремы об изменении кинетической энергии (11), которая, так как силы P и N перпендикулярны к плоскости движения, дает:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad v = v_0 = \text{const}. \quad (24)$$

Следовательно, относительное движение происходит с постоянной по модулю скоростью. Чтобы определить, как изменяется направление движения, разложим вектор ω (см. рис. 378) на составляющие: ω_1 вдоль оси x и ω_2 вдоль оси z ; при этом

$$|\omega_1| = \omega \cos \varphi, \quad |\omega_2| = \omega \sin \varphi. \quad (25)$$

Тогда вектор $J_c = -2m(\omega \times v)$ в свою очередь разложится на составляющие

$$J_{c_1} = -2m(\omega_1 \times v), \quad J_{c_2} = -2m(\omega_2 \times v). \quad (26)$$

Поскольку ω_1 и v лежат в плоскости движения xu , то составляющая J_{c_1} будет перпендикулярна к этой плоскости и вместе с силой

тяжести P уравновесится реакцией плоскости N . Следовательно, будет $P + J_{c_1} + N = 0$ и уравнение (23) примет вид

$$m\omega = J_{c_2}. \quad (27)$$

Составляющая ω_2 направлена в северном полушарии по положительному направлению оси z , а вектор v лежит в плоскости xu . Следовательно, J_{c_2} также лежит в плоскости xu , а направление J_{c_2}

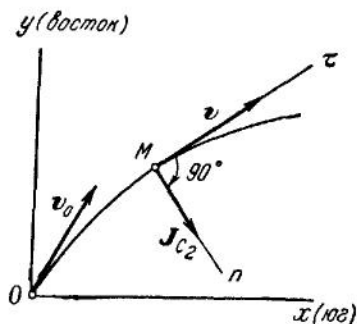


Рис. 379.

можно получить, повернув вектор v на 90° по ходу часовой стрелки, т. е. так, как показано на рис. 379; для южного полушария направление J_{c_2} будет прямо противоположным. Отсюда заключаем, что вследствие вращения Земли точка, движущаяся в горизонтальной плоскости, будет отклоняться вправо от направления своего движения в северном полушарии и влево — в южном. Этим, в частности, объясняется так называемый закон Бэра, согласно которому реки в северном

полушарии подмывают правый берег, а в южном — левый; в этом же причина отклонения ветров постоянного направления (пассатов).

Замечая далее, что вектор v направлен по касательной τ к траектории точки, а следовательно, вектор J_{c_2} — по главной нормали n (см. рис. 379), спроектируем обе части уравнения (27) на ось n . Тогда, учитывая, что, согласно (26) и (25), $|J_{c_2}| = 2m|\omega_2|v = 2m\omega \sin \varphi$, получим:

$$m\omega_n = |J_{c_2}| \quad \text{или} \quad \frac{mv^2}{\rho} = 2m\omega \sin \varphi.$$

Отсюда, принимая во внимание (24), находим:

$$\rho = \frac{v_0}{2\omega \sin \varphi}. \quad (28)$$

Так как ω — величина малая, то радиус кривизны траектории очень велик, т. е. отклонение от начального направления v_0 происходит достаточно медленно. Если для небольших перемещений считать $\varphi = \text{const}$, то и $\rho = \text{const}$, т. е. траекторией точки будет окружность радиуса ρ .

4) **Маятник Фуко.** В качестве еще одного примера относительного движения точки вблизи поверхности Земли рассмотрим колебания сферического маятника длиной l (маятник Фуко), принимая в расчет влияние вращения Земли. Возьмем прямоугольную систему координатных осей, связанную с Землей; начало координат поместим

в точке подвеса маятника, ось z направим вертикально вниз, ось y — по касательной к меридиану на юг, а ось x — по касательной к параллели на восток (рис. 380). Будем рассматривать только малые колебания маятника, т. е. такие, когда x и y малы по сравнению с l .

На маятник действуют сила тяжести $P = mg$, включающая в себя силу инерции J_e , и реакция нити N , проекции которой на оси координат будут:

$$-N \frac{x}{l}, \quad -N \frac{y}{l}, \quad -N \frac{z}{l}.$$

Тогда, кроме этих сил, для составления уравнения относительного движения (5) к маятнику нужно приложить еще только кориолисову силу инерции $J_c = -2m(\omega \times v)$, и мы получим:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = mg + N - 2m(\omega \times v). \quad (29)$$

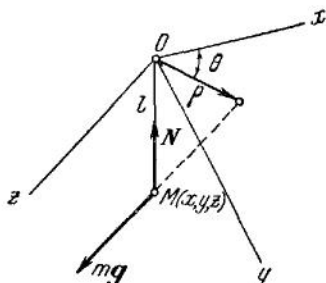


Рис. 380

Для выбранной системы координат имеем (при определении проекций ω сравн. рис. 380 и 378):

$$mg(0, 0, mg); \quad N\left(-N \frac{x}{l}, -N \frac{y}{l}, -N \frac{z}{l}\right); \\ \omega(0, -\omega \cos \varphi, -\omega \sin \varphi).$$

Проектируя обе части уравнения (29) на оси координат и учитывая, что

$$\omega \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\omega \cos \varphi & -\omega \sin \varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -N \frac{x}{l} - 2m\omega(-\cos \varphi \cdot \dot{z} + \sin \varphi \cdot \dot{y}), \\ m\ddot{y} &= -N \frac{y}{l} + 2m\omega \sin \varphi \cdot \dot{x}, \\ m\ddot{z} &= mg - N \frac{z}{l} - 2m\omega \cos \varphi \cdot \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Точное интегрирование этих дифференциальных уравнений оказывается довольно сложным; поэтому будем интегрировать их приближенно. Так как $l^2 = x^2 + y^2 + z^2$, то

$$z = l \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}};$$

поскольку здесь x и y малы по сравнению с l , то, пренебрегая малой величиной $\frac{x^2 + y^2}{l^2}$ по сравнению с единицей, примем $z \approx l$.

Тогда в третьем уравнении системы (30) $\ddot{z} = 0$; отбрасывая в правой части этого уравнения слагаемое, содержащее малый множитель ω , будем иметь:

$$N = mg.$$

Внося значения $N = mg$, $z = l$ и $\dot{z} = 0$ в другие два уравнения системы (30) и сокращая на m , получим:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{gx}{l} - 2\omega \sin \varphi \cdot \dot{y}, \\ \ddot{y} &= -\frac{gy}{l} + 2\omega \sin \varphi \cdot \dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Умножим первое из этих уравнений на $-y$, второе — на x и сложим их. Тогда будем иметь:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 2\omega \sin \varphi (x\dot{x} + y\dot{y}). \quad (32)$$

Заметим теперь, что

$$\dot{x}x + \dot{y}y = \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d\rho^2}{dt},$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, а

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Величина $(x\dot{y} - y\dot{x})$ представляет собой момент скорости \mathfrak{v} маятника относительно оси z , равный удвоенной секторной скорости конца радиуса-вектора ρ , проведенного в плоскости xu ; следовательно,

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2 \frac{d\theta}{dt},$$

где θ есть угол между радиусом-вектором ρ и осью x ; поэтому, принимая во внимание все полученные соотношения, мы можем представить уравнение (32) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \omega \sin \varphi \frac{d\rho^2}{dt},$$

откуда, интегрируя, находим:

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \varphi \cdot \rho^2 + c. \quad (33)$$

Пусть маятник начинает колебания из отвесного положения; тогда при $t=0$ $\rho=0$ и, следовательно, $c=0$. Сокращая на ρ^2 , будем иметь:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \sin \varphi,$$

и, интегрируя еще раз, получим:

$$\theta = \theta_0 + (\omega \sin \varphi) t. \quad (34)$$

Формула (34) показывает, что с течением времени плоскость качания маятника поворачивается на угол $\theta - \theta_0$ в сторону положительного направления отсчета этого угла (от востока через юг и на запад), т. е. против вращения Земли. Это — так называемый *эффект Фуко*.

Угловая скорость вращения плоскости качания маятника, как видно из равенства (34), будет:

$$\dot{\theta} = \omega \sin \varphi;$$

отсюда следует, что полный оборот эта плоскость сделает за время

$$T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\omega \sin \varphi}.$$

Так как $\frac{2\pi}{\omega}$ есть время полного оборота Земли вокруг ее оси, равное 24^h (звездное время), то

$$T = \frac{24^h}{\sin \varphi},$$

где φ есть широта места. Следовательно, за час звездного времени плоскость поворачивается на угол

$$\frac{360^\circ}{T} = \frac{360^\circ}{24} \sin \varphi = 15^\circ \sin \varphi.$$

Формула (34) указывает также, что наибольший эффект Фуко будет на полюсе ($\varphi = 90^\circ$).

Приближенное решение, которым мы пользовались, полагая $z \approx l$, является, как было указано в § 38, п. 13, неточным. Оно показывает (если не принимать во внимание влияние вращения Земли), что траекторией сферического маятника будет эллипс, и не учитывает медленного вращения этого эллипса в сторону движения маятника. Однако в опыте Фуко появление указанного эффекта вообще нежелательно и поэтому начальные условия движения берут такими, чтобы маятник при неподвижной точке подвеса был плоским математическим. Для обнаружения же эффекта Фуко принятое приближение оказывается достаточным.

§ 40. Уравнения движения материальной точки в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

1. Уравнения Лагранжа для материальной точки. Рассмотрим материальную точку, находящуюся под действием сил, равнодействующую которых обозначим F . Будем определять положение точки какими-нибудь независимыми между собой параметрами любой размерности q_i , однозначно определяющими положение точки, которые назовем *обобщенными координатами*. Число их будет равно числу степеней свободы точки, т. е. для свободной точки их будет три, а для несвободной — две или одна. Тогда декартовы координаты точки, а следовательно, и ее радиус-вектор $r = xi + yj + zk$ можно выразить через параметры q_i и время t , которое может вообще войти в эти соотношения или в результате соответствующего выбора координат q_i , или когда на точку наложены нестационарные связи. Допустим для общности, что ¹⁾

$$r = r(q_1, q_2, q_3, t). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение движения точки имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = F.$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на

$$\frac{\partial r}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Тогда получим:

$$m \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_i} = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_i}$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(m v \cdot \frac{\partial r}{\partial q_i} \right) - m v \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \right) = F \cdot \frac{\partial r}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (2), заменив $\frac{\partial r}{\partial q_i}$ и $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial r}{\partial q_i} \right)$ другими выражениями. Для этого возьмем сначала производную по времени от

$$r = r(q_1, q_2, q_3, t);$$

учитывая, что при движении точки q_1, q_2, q_3 являются функциями времени t , получим:

$$\dot{r} = v = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial r}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial r}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (3)$$

¹⁾ Мы берем выражение r в виде (1), чтобы охватить сразу все возможные частные случаи. Для несвободной точки будет, в частности, $r = r(q_1, q_2, t)$ или $r = r(q_1, t)$ и соответственно во всех последующих формулах нужно считать число координат q_i равным трем, двум или одной.

Беря от обеих частей равенства (3) частные производные по $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$, будем иметь:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3},$$

ли вообще

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Далее, возьмем производную по времени от $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$, принимая во внимание, что $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}(q_1, q_2, q_3, t)$, а $q_i = q_i(t)$; получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_3} \dot{q}_3 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial t}. \quad (5)$$

С другой стороны, взяв частную производную по q_i от обеих частей равенства (3), найдем, что

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_3} \dot{q}_3. \quad (6)$$

В равенствах (5) и (6) правые части равны, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Соотношение (7) показывает, что операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q_i переместительны.

Заменяя в уравнении (2) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$ и $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)$ их выражениями из (4) и (7) и учитывая, что $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, получим:

$$\frac{d}{dt} \left(m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \right) - m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (8)$$

Введем в равенство (8) кинетическую энергию материальной точки

$$T = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}.$$

Из равенства (3) видно, что при переходе к обобщенным координатам T будет функцией q_i, \dot{q}_i и t . Следовательно,

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (9)$$

С другой стороны,

$$\mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i} = Q_i, \quad (10)$$

где Q_i есть обобщенная сила, отнесенная к координате q_i (см. § 29, п. 4). Подставляя величины (9) и (10) в равенство (8), найдем окончательно уравнения движения точки в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа) в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (11)$$

Таких уравнений будет три для свободной точки и два или одно для точки несвободной.

Входящая в уравнения (11) величина $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, равная производной от кинетической энергии по обобщенной скорости \dot{q}_i , называется *обобщенным импульсом*, отнесенным к соответствующей координате (или просто импульсом).

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная действующую силу F , определить закон движения точки, т. е. найти $q_i = q_i(t)$. Для составления уравнений (11) надо выразить кинетическую энергию точки через q_i и \dot{q}_i , т. е. определить $T = T(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t)$. Затем вычисляются частные производные от T по q_i и \dot{q}_i и подставляются в левую часть уравнений (11). При этом после дифференцирования по t туда войдут еще \ddot{q}_i . Таким образом в окончательном виде уравнения (11) будут обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка относительно искомым функций $q_i(t)$ вида

$$\Phi_i(\ddot{q}_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, q_1, \dots, t) = Q_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Обобщенные силы Q_i , если F задана, могут быть вычислены по формуле (10). Однако обычно проще, как было указано в § 29, п. 5 и в § 30, находить Q_i , учитывая, что в обобщенных координатах элементарная работа силы F на любом виртуальном перемещении точки будет:

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + Q_3 \delta q_3.$$

Так как q_i между собой независимы, то, например, для определения Q_1 достаточно сообщить точке такое перемещение, при котором меняется только координата q_1 , и, вычислив на этом перемещении элементарную работу δA_1 силы F , представить δA_1 в виде

$$\delta A_1 = Q_1 \delta q_1.$$

Коэффициент при δq_1 и будет равен обобщенной силе Q_1 . Аналогично вычисляются Q_2 и Q_3 . Размерность Q_i может быть различной в зависимости от размерности соответствующей координаты q_i .

Примеры составления уравнений (11) будут рассмотрены ниже, в п. 6.

2. Случай потенциальной силы. Предположим, что действующая сила потенциальна, т. е. что $F = \text{grad } U$; тогда

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

и обобщенная сила, как видно из равенства (10), будет:

$$Q_i = F_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i}$$

или

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (12)$$

Подставляя эти значения Q_i в уравнения (11), получим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (13)$$

Уравнения (13) можно представить в ином виде. Так как потенциальная функция зависит только от координат точки и, может быть, времени, т. е. $U = U(x, y, z, t)$, то при переходе к обобщенным координатам получим $U = U(q_1, q_2, q_3, t)$. Следовательно U от \dot{q}_i не зависит и производная от U по обобщенной скорости \dot{q}_i равна нулю. Принимая это во внимание, мы можем преобразовать (13) к виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Величина $T+U$ есть разность между кинетической энергией T и потенциальной энергией $V = -U$; обозначим:

$$T+U = L. \quad (15)$$

Функция L называется *функцией Лагранжа* или, по Гельмгольцу, *кинетическим потенциалом*.

Вводя функцию L , получим уравнение (14) в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (16)$$

Заметим, что так как T есть функция q_i, \dot{q}_i, t , а U есть функция q_i, t , то L будет функцией \dot{q}_i, q_i, t .

3. Выражение кинетической энергии точки в криволинейных координатах. Имеем:

$$T = \frac{m}{2} v^2.$$

Заменяя здесь ϑ его значением из равенства (3), получим:

$$T = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)^2 \dot{q}_1^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \right)^2 \dot{q}_2^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right)^2 \dot{q}_3^2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_3 \dot{q}_1 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + 2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (17)$$

или

$$T = a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{22} \dot{q}_2^2 + a_{33} \dot{q}_3^2 + 2a_{23} \dot{q}_2 \dot{q}_3 + 2a_{31} \dot{q}_3 \dot{q}_1 + 2a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + b_1 \dot{q}_1 + \\ + b_2 \dot{q}_2 + b_3 \dot{q}_3 + c, \quad (18)$$

где значения введенных коэффициентов a_{ij} , b_i и c очевидны. Сокращенно выражение (18) можно еще представить в виде

$$T = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^3 b_i \dot{q}_i + c. \quad (19)$$

Первый член выражения (19) есть квадратичная форма (т. е. однородная функция второй степени) от обобщенных скоростей, второй — линейная форма от тех же скоростей, c от скоростей совсем не зависит. При этом все коэффициенты a_{ij} , b_i и c суть функции координат q_1 , q_2 , q_3 и времени t .

Таким образом, кинетическая энергия в криволинейных координатах выражается в виде полинома второй степени от обобщенных скоростей \dot{q}_i .

Если время t в выражение (1) для \mathbf{r} явно не входит (для свободной точки это имеет место при надлежащем выборе q_i , а для несвободной еще и при условии, что наложенные на точку связи являются склерономными, т. е. не изменяющимися со временем), то тогда

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$$

и коэффициенты b_1 , b_2 , b_3 и c обратятся в нули. Таким образом, в данном случае кинетическая энергия будет квадратичной формой (однородной функцией второй степени) от обобщенных скоростей \dot{q}_i , т. е.

$$T = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (20)$$

Число слагаемых, которые будут входить в выражения (18), (19) или (20), зависит от числа обобщенных координат q_i , т. е. от числа

степеней свободы точки; поэтому верхний индекс над суммами может быть не только 3, но и 2 или 1 (см. п. 5).

4. Интеграл энергии. Предположим, что действующая на точку сила F имеет потенциал, т. е. $F = \text{grad } U$, и что наложенные связи склерономны. При таких условиях уравнения движения точки (13) дают интеграл энергии. Для получения этого интеграла умножим каждое из уравнений (13) на соответствующую скорость \dot{q}_i и сложим; получим:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i - \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i \right] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (21)$$

Преобразуем первый член, стоящий в левой части; имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

Внесем это значение в уравнение (21); тогда получим:

$$\sum_{i=1}^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) \right] = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i. \quad (22)$$

Так как в рассматриваемом случае кинетическая энергия T является однородной функцией второй степени от скоростей \dot{q}_i , то по известной теореме Эйлера об однородных функциях

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2T \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 2 \frac{dT}{dt}.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) = \frac{dT}{dt} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{dU}{dt},$$

так как T и U явно от времени не зависят. Тогда равенство (22) дает:

$$2 \frac{dT}{dt} - \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

откуда

$$T = U + h, \quad (23)$$

где h есть постоянная, равная начальной энергии точки. Таким образом, мы получили известный интеграл энергии.

5. Несвободное движение точки. Остановимся конкретнее на случае несвободного движения точки. Пусть точка движется по поверхности, причем связь стационарна и определяется уравнением $f(x, y, z) = 0$. В этом случае обобщенных координат будет только две, и в качестве этих координат можно взять криволинейные координаты

Гаусса u и v , полагая $q_1 = u$, $q_2 = v$. Тогда уравнения движения точки по поверхности примут вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} - \frac{\partial T}{\partial u} &= Q_u, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} - \frac{\partial T}{\partial v} &= Q_v. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Для кинетической энергии точки, учитывая, что связь стационарна, получим из (17) выражение

$$T = \frac{m}{2} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2), \quad (25)$$

где

$$E = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2,$$

причем E , F , G суть функции u и v .

Если точка движется по кривой, то она имеет одну степень свободы, и, следовательно, ее положение определяется одной криволинейной координатой q . Уравнение движения точки будет только одно, а именно:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q. \quad (26)$$

При этом, как видно из (17), если связь стационарна, то кинетическая энергия точки имеет выражение

$$T = \frac{m}{2} a \dot{q}^2, \quad (27)$$

где

$$a(q) = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dq} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q} \right)^2.$$

6. Примеры. Рассмотрим два частных примера. 1) Найдем уравнения движения свободной материальной точки в декартовых координатах. Имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (28)$$

где $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Выражение кинетической энергии точки в декартовых координатах будет:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x}, & \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= m\dot{y}, & \frac{\partial T}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z}, & \frac{\partial T}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Далее, выражение элементарной работы в декартовых координатах имеет вид

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z.$$

Отсюда

$$Q_1 = F_x, \quad Q_2 = F_y, \quad Q_3 = F_z.$$

Подставляя все найденные величины в уравнения (28), получаем:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z,$$

т. е. известные уравнения движения в декартовых координатах.

2) Найдем уравнения движения свободной точки на плоскости в полярных координатах r, φ . Обобщенными координатами будут $q_1 = r, q_2 = \varphi$ и уравнения движения примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = R, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi, \quad (29)$$

где R и Φ суть обобщенные силы, отнесенные к координатам r и φ . Известно, что в полярных координатах (см. § 6, п. 5)

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2.$$

Следовательно, кинетическая энергия точки

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2). \quad (30)$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Подставляя найденные величины в уравнения (29), получаем уравнения движения точки в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= R, \\ m \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) &= \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Найдем теперь выражения R и Φ через действующую на точку силу F . Разлагая F на радиальную и трансверсальную (перпендикулярную к r) составляющие, будем иметь $F = F_r r^0 + F_p p^0$. В свою очередь элементарное перемещение точки δr складывается из радиального перемещения, численно равного δr , и поперечного перемещения, равного $r\delta\varphi$; следовательно, $\delta r = \delta r \cdot r^0 + r \delta\varphi \cdot p^0$. Тогда элементарная работа силы F равна

$$\delta A = F \cdot \delta r = F_r \delta r + F_p r \delta\varphi.$$

Коэффициенты при δr и $\delta\varphi$ и будут обобщенными силами. Таким образом,

$$R = F_r, \quad \Phi = rF_p = \text{mom}_O(F). \quad (32)$$

7. Циклические координаты. В случае потенциальных сил уравнения движения точки имеют вид (16), т. е.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (33)$$

где $L = T + U$ есть кинетический потенциал и, как было показано,

$$L = L(q_1, \dots, \dot{q}_1, \dots, t),$$

причем L , как и T , является функцией второй степени от обобщенных скоростей \dot{q}_i ($i = 1, 2, 3$). Если функция L не зависит от какой-либо из координат, например от q_1 , но зависит от производной этой координаты по времени, т. е. от скорости \dot{q}_1 , то уравнение движения относительно координаты q_1 будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0, \quad (34)$$

так как по условию $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$. В этом случае координата q_1 называется *циклической* и уравнение движения (34) дает первый интеграл:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \alpha_1, \quad (35)$$

где α_1 — постоянная. Определяя из интеграла (35) скорость \dot{q}_1 и подставляя ее значение в уравнения (33), мы исключим из них переменную q_1 (напоминаем, что по условию сама координата q_1 в эти уравнения не входит, а входит лишь \dot{q}_1 и, может быть, \ddot{q}_1); тогда задача сведется к интегрированию двух уравнений с переменными q_2 и q_3 . Следовательно, при наличии циклических координат число дифференциальных уравнений движения может быть уменьшено на число этих координат.

Пример. Пусть в случае плоского движения, рассмотренного выше, действующая сила является центральной и имеет силовую функцию $U = U(r)$. Тогда, учитывая, что T выражается равенством (30), получим:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r).$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

примут по аналогии с (31) вид

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = \frac{dU(r)}{dr}, \quad \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) = 0. \quad (36)$$

Координата φ , непосредственно в функцию Лагранжа не входящая, является циклической. Поэтому второе из уравнений (36) дает интеграл (35) в виде

$$r^2 \dot{\varphi} = c. \quad (37)$$

Это — известный интеграл площадей. Определяя отсюда $\dot{\varphi} = c/r^2$ и подставляя в первое из равенств (36), получим дифференциальное уравнение, содержащее одну только координату r . Проинтегрировав его и найдя $r(t)$, мы после этого определим из (37) $\varphi(t)$, и закон движения будет таким образом найден.

ЛИТЕРАТУРА

- Жуковский Н. А., Теоретическая механика, изд. 2, 1952.
- Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. 1 изд. 7, 1958 и т. 2, изд. 5, 1954.
- Некрасов А. И., Курс теоретической механики, т. 1, изд. 6, 1955 и т. 2, изд. 5, 1955.
- Суслов Г. К., Теоретическая механика, изд. 3, 1946.
- Чаплыгин С. А., Механика системы, 1923—1924, а также в собрании сочинений, т. IV, 1949.
- Аппель П., Теоретическая механика, т. I и т. II, перев. с франц., 1960.
- Валле Пуссен Ш. Ж., Лекции по теоретической механике, т. I и т. II, перев. с франц., 1949.
- Вебстер А., Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел, перев. с англ., 1933.
- Левн-Чивита Т. и Амальди У., Курс теоретической механики, т. I, ч. 1, 2 и т. II, ч. 1, 2, перев. с итал., 1952.
- Уиттекер Е. Т., Аналитическая динамика, перев. с англ., 1937.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аксиома связей** 181, 188
Аксиомы механики 170
— статикки 186
Аксонд винтовой неподвижный 152, 154
— — подвижный 152, 154
— неподвижный 133
— подвижный 133
Амплитуда колебаний 59, 361
Аномалия истинная 394
— эксцентрическая 394
Апогей 391
Афелий 391
- Биномаль** 70
Брахистохрона 416, 420
- Вариация функции** 278
Вектор 18
— аксиальный 44, 45
— главный 149, 235, 242, 244
—, его линия действия 19, 44
—, его модуль 20
—, его проекция на ось 22
— единичный 20
— неподвижный (приложенный) 19, 43, 44
— полярный 44, 45
— свободный (несвязанный) 19, 43
— скользящий (связанный с прямой) 19, 43
Векторы антипараллельные 20
— коллинеарные 20
Величина кинематическая 168
— кинетическая 168
Вес тела кажущийся 442
Взаимодействие механическое 7
Винт 151
— динамический 237
— мгновенный 152
Влияние вращения Земли на движение тела вдоль земной поверхности 447
- Вращение тела равномерное** 97
— — равнопеременное 98
- Годограф скорости** 38
Градиент скалярной функции 337
График движения 56
— расстояния 56
— скорости 258
Графостатика 257
- Движение в поле тяготения Земли** 397
— винтовое 146
— — мгновенное 147, 152
— замедленное 56
— изохронное 363
— инерциальное 8, 183
— карданово 106, 131
— механическое 7
— переносное 159
— планет 387
— свободного твердого тела 153
— таухронное 363
— тела вращательное 94, 96
— — около неподвижной точки 132
— — плоскопараллельное (плоское) 100
— — сложное 138
— точки абсолютное 88
— — в ньютоновом поле тяготения 390
— — в сопротивляющейся среде 355
— — криволинейное 52, 61
— — — равномерное 74
— — — равнопеременное 75
— — несвободное 403, 457
— — относительное 88, 438
— — — вблизи поверхности Земли 442
— — по заданной кривой 403
— — — — поверхности 421

- Движение тела под действием центральной силы 383
 — точки прямолинейное 52, 350
 — точки сложное 88, 158
 — тяжелой точки, брошенной под углом к горизонту 380
 — — — вертикально вверх 379
 — — — по неподвижной кривой 407
 — — — по поверхности вращения, ось которой вертикальна 426
 — ускоренное 56
 Декремент колебаний 366
 — логарифмический 366
 Диаграмма Максвелла-Креоны 268
 Динама 237
 Динамика 9, 183, 319
 —, ее задачи 320
 Дифференцирование векторов по скалярному аргументу 38
- Единицы измерения основные 173
- Жесткость фермы 266
- Задача двух тел 395
 — Ньютона 390
 Задачи динамики 320
 Закон вращательного движения 96—98
 — всемирного тяготения 387, 389
 — движения плоской фигуры в ее плоскости 128
 — — точки 50, 51
 — действия и противодействия 9, 172
 — динамики основной 9, 171, 391
 — инерции 8, 171
 — криволинейного движения точки 74, 75
 — независимости действия сил 172
 — параллелограмма сил 9, 173, 188
 — площадей 330, 384
 — прямолинейного движения точки 55, 56
 Законы движения основные 8, 9, 170
 — Кеплера 387
 — механики основные 8, 9, 170
 — Ньютона 8, 9
 — трения скольжения 197
- Импульс 170, 454
 — обобщенный 454
 — силы элементарный 324
 Инварианты приведения 236
- Инварианты системы скользящих векторов 149
 Инертность 8, 168
 Инерция 8, 168
 Интеграл площадей 330
 — энергии 341, 457
 Интегралы первые 323
- Кинематика 9
 —, ее задачи 49
 Кинетика 9, 168, 183
 Классификация векторов 43
 Колебания вынужденные 367, 371
 — гармонические 59, 359, 361
 — затухающие 365, 376
 — свободные 359
 Количество движения 8, 170
 Конус трения 199
 Координаты криволинейные 82
 — независимые 92
 — обобщенные 452
 — системы 92, 177
 — сферические 83
 — циклические 460
 — цилиндрические 83, 84
 Коэффициент жесткости 360
 — трения при качении 203
 — — скольжения при покое 198
 — — статический 198
 Кривизна 71
 — средняя 71
 Круг кривизны 71
 — соприкасающийся 71
- Линия геодезическая 422
 — — поверхности вращения 425
 — действия силы 184
 — силовая 334
 — узлов 93
 — целная 314
- Масса 8, 168, 169
 — весомая 169
 — инертная 170
 Маятник 79
 — изохронный 413, 415
 — конический 434
 — математический 408
 — — плоский 408, 409, 410
 — сферический 408, 427
 — Фуко 448
 — циклоидальный 413
 Метод вырезания узлов 267
 — множителей Лагранжа 284, 297
 — обобщенных координат 290
 — Риттера 270

- Механика аналитическая 7
 — классическая 7, 18
 — релятивистская 15
 — теоретическая 7
 — техническая 14
 Многоугольник векторный 25
 — веревочный (нитяной) 258
 Множители Лагранжа 285, 290
 Модуль вектора 20
 — силы 184
 Момент вектора относительно оси 37
 — — — точки (центра) 35
 — главный 149, 225, 235, 242, 244
 — изгибающий 264
 — пары 227, 228
 — — вращений 144
 — силы относительно оси 225
 — — — центра 224
 — системы сил относительно центра 225
 — статический 210, 211, 213, 214

 Натяжение нити 309
 Неопределимость статическая 249
 Нить гибкая нерастяжимая 309
 — параболическая 317
 Нормаль главная 70

 Оператор Гамильтона дифференциальный 337
 Определимость статическая 267
 Орбита 49
 Орт вектора 20
 Ось винта 146
 — вращения 96
 — — и скольжения мгновенная 152
 — — мгновенная 101, 133, 136
 — — перманентная (постоянная) 100
 — центральная 151, 238, 243, 245
 Отклонение падающего тела от вертикали 443

 Пара вращений 143
 — сил 207
 Парабола безопасности 383
 Параметр винта 147, 237
 — динами 237
 Перемещение 53
 — виртуальное 277
 — возможное 277
 — истинное 276
 Перигей 391
 Перигелий 391

 Период колебаний 59, 361
 Перигей 391
 План сил 258
 — скоростей 115, 122
 Плечо пары сил 227
 — — вращений 144
 — силы 206, 224
 Плоскость нормальная 70
 — соприкасающаяся 69
 — спрямляющая 70
 Поверхности координатные 83
 Поверхность уровня 337
 — эквипотенциальная 337
 Покой относительный 440, 442
 Поле консервативное 341
 — нестационарное 273
 — потенциальное 336
 — силовое 334
 — — потенциальное 274, 335, 336
 — скалярное или векторной величины 39
 — стационарное 273
 — тяжести однородное 343
 Полодия неподвижная 105
 — подвижная 105
 Поправка к третьему закону Кеплера 397

 Постоянная Гауссова 388, 396
 — гравитационная 389
 Постулат идеальных связей 295
 Потенциал 337
 — кинетический 455
 Правило многоугольника 25
 Приведение пространственной системы сил 234
 — системы к двум силам 238
 — — к динаме (винту) 237
 — — скользящих векторов 149
 Принцип виртуальных (возможных) перемещений 184, 284, 294
 — Даламбера для точки 435, 436
 — отвердевания 188
 — относительности Галилея — Ньютона 440
 — Торричелли 303
 Произведение векторное (внешнее) 30
 — скалярное (внутреннее) 28
 — трех векторов 33
 Производная единичного вектора 40
 — вектора относительная (локальная) 159
 — — по скалярному аргументу 39
 — — полная (абсолютная) 159
 Путь 53

- Работа потенциальной силы** 340
 — силы на конечном перемещении 334
Равновесие аstaticкое 246
 — механической системы 188
 — несвободного тела 255
 — плоской системы сил 247
 — произвольной системы сил 247
 — рычага 255
 — системы материальных точек 297, 298
 — находящейся в однородном поле тяжести 303
 — параллельных сил 248
 — под действием потенциальных сил 303
 — твердого тела, имеющего неподвижную ось вращения 302
 — — свободного 301
 — тела 186
 — точки на кривой 287, 292
 — на поверхности 284, 290
Равнодействующая 186, 190, 192, 243
Радиус геодезической кривизны 424
 — кривизны 72
 — нормальной кривизны 423
Реакция опоры 189, 262
 — связи 181
 — — с трением 198
Резонанс 369
Ротация вектора 337
Рулетта 106
Рычаг 255

Связь 91, 175
 — без трения 181, 196
 — внешняя 176
 — внутренняя 176
 — геометрическая 91, 175, 278
 — дифференциальная 91
 — идеальная 183, 196
 — кинематическая 91, 175, 278
 — конечная 91
 — неосвобождающая 175, 278
 — нестационарная 176, 278
 — освобождающая 175, 278
 — реономная 176, 278
 — с трением 183, 196, 198
 — склерономная 176, 278
 — стационарная 176, 278
Сила 7, 14, 168, 169, 184, 185
 — активная 181
 — внешняя 181
 — внутренняя 181
 — восстанавливающая 359
 — диссипативная 342

Сила инерции 435
 — — кориолисова 439
 — — переносная 439
 — — квазиупругая 345, 359
 — — массовая 180
 — — обобщенная 290, 293
 — — ее размерность 293
 — — объемная 180
 — — пассивная 181
 — — поверхностная 179
 — — потенциальная 274, 336
 — — сопротивления среды 342
 — — сосредоточенная 180
 — — трения 197
 — — тяготения 346
 — — тяжести 211
 — — ударная 326
 — — центральная 344
 — — центростремительная 387, 437
Силы антипараллельные 206
 — параллельные 204
Система координат криволинейная 83
 — — левая 30, 31
 — — ортогональная 86
 — — правая 30, 31
 — — сферическая (полярная) 83
 — — цилиндрическая (полуполярная) 84
 — — материальных точек 47, 174, 294
 — — механическая 91, 174
 — — изменяемая 48, 175
 — — неизменяемая 48, 92, 175, 179
 — — несвободная 175
 — — свободная 175, 176
 — — основных единиц 173
 — — отсчета 48
 — — инерциальная 438
 — — неинерциальная 438
 — — неподвижная 438
 — — основная 48
 — — пар 227
 — — сил 185
 — —, находящаяся в равновесии 185, 186
 — — параллельных 207, 243, 261
 — — плоская 242, 259
 — —, приложенных в одной точке 190
 — —, произвольно расположенных в пространстве 234
 — — сходящихся 192, 257
 — —, эквивалентная нулю 185
 — — статически неопределимая 249
 — — — определимая 249

- Системы сил эквивалентные 186, 187
 Скаляр 18
 Скорости точек вращающегося тела 98
 — — плоской фигуры 107
 — — свободного твердого тела 155
 — — тела, движущегося около неподвижной точки 134
 Скорость абсолютная 89
 — в криволинейном движении 62
 — в криволинейных координатах 87
 — в круговом движении 64
 — в полярных координатах 65, 190
 — в прямолинейном движении 53, 54
 — в сферических координатах 87
 — в цилиндрических координатах 88
 — космическая вторая 348, 398
 — — первая 399
 — круговая 399
 — освобождения 393, 398
 — относительная 88
 — параболическая 392, 398
 — переносная 159
 — поступательная мгновенная 95
 — секторная 66
 — сложного движения точки 89
 — угловая 64, 97
 — — мгновенная 100, 103, 134
 Сложение векторов 22
 — мгновенных движений тела 152
 — — поступательных скоростей 139
 — — угловой и поступательной скоростей 145
 — — угловых скоростей 140
 — пар 231
 — скоростей 159
 — ускорений 162
 Составляющая вектора 22
 — скорости радиальная 65
 — — трансверсальная 65
 — ускорения касательная 73
 — — нормальная 73
 — — радиальная 76
 — — тангенциальная 73
 — — трансверсальная (поперечная) 76
 Спутник Земли искусственный 398
 Статика 9, 183
 — аналитическая 184, 272
 — геометрическая 184
 — графическая 190
 — элементарная 184
 Сумма векторов 24
 Таутохронность 415
 Тело абсолютно твердое 48, 175, 192
 Тело деформируемое 175
 Теорема Вариньона 241, 242
 — Гульдена-Паппа 222
 — Кельвина 340
 — Клеро 425
 — Кориолиса 164
 — моментов 328
 — о проекции суммы векторов 27
 — о сложении скоростей 89, 90
 — о сложении ускорений 164
 — о трех силах 193
 — об изменении кинетической энергии 333, 352, 405, 441
 — об изменении количества движения 325, 352
 — об изменении момента количества движения 328
 — Ривальса 136
 — Шаля 153, 154
 — Эйлера-Даламбера 132
 Точка материальная 9, 47, 170, 319
 Траектория 49
 — навесная 381, 402
 — невыгоднейшая 402
 — иастильная 381, 402
 Трение гибкой нити 201
 — качения 202
 — скольжения 196, 197
 Треугольник естественный (натуральный, подвижный) 70
 Угол бросания 381
 — нутации 93
 — прецессии 93
 — смежности 70
 — собственного вращения тела 93
 — трения 199
 Углы эйлеровы 92, 93
 Удар 326
 Узел фермы 265
 Уравнение геометрической связи 175
 — движения точки конечное 50
 — Кеплера 394
 — кинематической связи 175
 — мгновенной винтовой оси 158
 — — оси вращения 137
 — прямолинейного движения дифференциальное 351
 — реономной связи 176
 — центральной оси 151
 — Эйлера 418
 Уравнения движения несвободной точки по заданной кривой 405
 — — точки в обобщенных координатах 452, 454

- Уравнения движения точки дифференциальные 320
 — Лагранжа второго рода 454
 — равновесия нити 310
 — траектории точки в параметрической форме 51
- Ускорение в криволинейном движении 68
 — в круговом движении 75
 — кориолисово 77, 164
 — переносное 159, 164
 — поворотное 77, 164
 — прямолинейного движения 55
 — секторное 77
 — точек вращающегося тела 99
 — — плоской фигуры 116
 — — свободного твердого тела 157
 — — тела, движущегося около неподвижной точки 135
 — угловое 75, 97
 — — мгновенное 134
 — центростремительное 75
- Условие жесткости фермы 266
 — равновесия рычага 255
- Условия равновесия в инерциальной системе координат 440
 — — в неинерциальной системе координат 440
 — — в обобщенных координатах 299, 300
 — — несвободного тела 255
 — — плоской системы сил 247
 — — произвольной системы сил 246
 — — системы параллельных сил 248
 — — системы сходящихся сил 192
- Устойчивость равновесия точки в потенциальном силовом поле 348
- Фаза колебаний 59, 361
 — начальная 361
- Ферма 265
 —, статически неопределимая 267
 — — определимая 267
- Формула Бинэ 386
 — Валлиса 413
 — Эйлера 202
- Формулы Пуассона 161
- Функционал 416
- Функция диссипативная 342
 — Лагранжа 455
 — потенциальная 274, 336
 — рассеяния 342
 — силовая 274, 336
- Центр вращения 101
 — — мгновенный 104, 121, 125
 — инерции 213
 — колебаний 59
 — кривизны 72
 — масса 213
 — параллельных сил 210, 211
 — приведения 149
 — скоростей мгновенный 104, 125
 — тяжести 211
 — — дуги окружности 217
 — — объема пирамиды
 — — — полусферы 222
 — — — сферического сектора 221
 — — площади кругового сектора 219
 — — — треугольника 218
 — — поверхности сферического сегмента 220
 — —, способы его нахождения 214—216
 — ускорений мгновенный 120, 121, 125
- Центроида неподвижная 105, 134
 — подвижная 105, 134
- Циркуляция вектора 340
- Частица материальная 170
- Частота колебаний 59, 361
 — круговая 59, 362
 — собственная 362
 — циклическая 59, 362
- Число степеней свободы 92, 177, 255
- Шаг винта 147
- Эквивалентность пар 230
 — системы сил 186
- Энергия кинетическая 331
 — — в криволинейных координатах 456
- Эффект Фуко 451

Николай Николаевич Бухгольц

Основной курс теоретической механики

Часть первая

М., 1965 г., 468 стр. с илл.

Редактор *И. А. Маркузон*

Техн. редактор *Л. А. Пыжова*

Корректор *С. М. Кайсер*

Слано в набор 7/VIII 1965 г. Подписано к печати 10/XI 1965 г. Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 29,25. Услови. печ. л. 29,25. Уч.-изд. л. 27,61. Тираж 26 000 экз. Т-13762. Цена книги 93 коп. Заказ № 1764.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома

Государственного комитета

Совета Министров СССР по печати.

Измайловский проспект, 29.