ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методические указания

Оглавление

§ 1. Краткие сведения из теории

1. Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Тогда уравнение любой плоскости α будет иметь вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где A, B, C одновременно не равны нулю. Данное уравнение называется общим уравнением плоскости [4 – 6].

Определение: Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости α, называется нормальным вектором этой плоскости.

Коэффициенты A, B, C в уравнении (1) имеют следующий геометрический смысл: вектор $\vec{n} = \{A; \ B; \ C\}$ перпендикулярен плоскости α. Поэтому данный вектор $\vec{n}$ называют нормальным вектором плоскости, определяемой уравнением (1).

Пример 1. Векторы $\vec{n}_1 = \{3; \ -1; \ 2\}$ и $\vec{n}_2 = \{-6; \ 2; \ -4\}$, определяемые уравнениями:

$$3x-y+2z+1=0 \text{ и } -6x+2y-4z-2=0,$$

являются нормальными векторами одной и той же плоскости α (см. рис. 1), причем $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$.

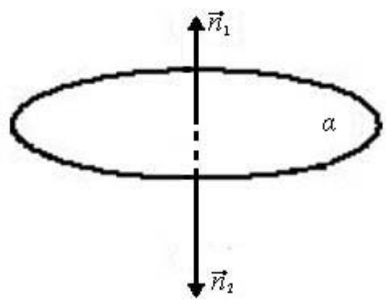


Рис. 1

2. Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение вида:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{2}$$

называется уравнением плоскости в отрезках [4 – 6], где a, b, c – это величины отрезков отсекаемых плоскостью α соответственно на осях Ox, Oy, Oz декартовой системы координат (см. рис. 2).

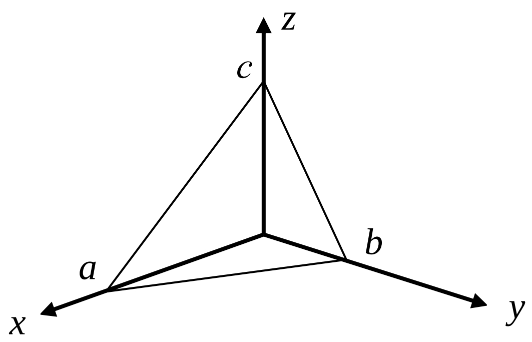


Рис. 2

Пример 2. Пусть плоскость α отсекает на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* системы координат соответственно отрезки величиной a=5; $b=-3$; c=2. Тогда уравнением плоскости в отрезках будет $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1$.

Заметим, что уравнение $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$ является уравнением плоскости α, но не является уравнением плоскости в отрезках (см. общий вид уравнения в отрезках (2)).

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, с заданным нормальным вектором

Если для плоскости α заданы – нормальный вектор $\vec{n}=\{A;\quad B;\quad C\}$ и точка $M_0(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$, через которую эта плоскость проходит, то уравнение плоскости α имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \qquad (3)$$

Для определения уравнения плоскости, в данном случае, можно прибегнуть еще и к следующему приему: так как координаты $\vec{n}=\{A;\quad B;\quad C\}$ являются коэффициентами общего уравнения плоскости (1), то оно запишется в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \text{ где } D \text{ – неизвестно.}$$

Подставив координаты точки M_0 в уравнение, найдем

$$D=-Ax_0-By_0-Cz_0.$$

Пример 3. Пусть плоскость проходит через точку $M_0(1;\quad 0;\quad 2)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n}=\{2; \ -3; \ 1\}$. Найдем уравнение этой плоскости. В виду (3) уравнение плоскости запишется так: $2(x-1)-3(y-0)+1(z-2)=0$,

$$2x-3y+z-4=0.$$

Или на основании уравнения (1) уравнение плоскости примет вид:

$$2x-3y+z+D=0.$$

Так как точка $M_0(1; \ 0; \ 2)$ лежит на плоскости, то ее координаты должны удовлетворять данному уравнению. Подставив их значения в последнее уравнение, найдем $D=-4$. И окончательно получим уравнение

$$2x-3y+z-4=0.$$

Ответ: $2x-3y+z-4=0$.

4. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; \ y_0; \ z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a}=\{l_1; \ m_1; \ n_1\}$ и $\vec{b}=\{l_2; \ m_2; \ n_2\}$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Определение уравнения плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; \ y_0; \ z_0)$, параллельной двум неколлинеарным векторам $\vec{a}=\{l_1; \ m_1; \ n_1\}$ и $\vec{b}=\{l_2; \ m_2; \ n_2\}$ можно свести к пункту 3, взяв в качестве нормального вектора $\vec{n}$ векторное произведение

$$\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}; \ -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix}; \ \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}. \qquad (5)$$

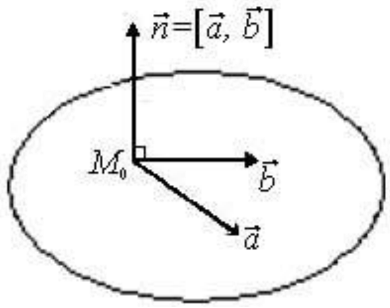


Рис. 3

Пример 4. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\quad 0;\quad 1)$ параллельно векторам $\vec{a}=\{2;\quad 1;\quad -1\}$ и $\vec{b}=\{1;\quad -1;\quad 3\}$.

Нормальным вектором плоскости будет служить векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{n}=[\vec{a},\quad \vec{b}]=\{2;\quad -7;\quad -3\}$. Тогда общее уравнение плоскости будет иметь вид:

$$2x-7y-3z+D=0.$$

Подставив координаты точки M_0 в данное уравнение, найдем D=1 и получим искомое уравнение

$$2x-7y-3z+1=0.$$

Ответ: $2x-7y-3z+1=0$.

Многие задачи на нахождение уравнения плоскости, рассматриваемые в курсе аналитической геометрии, легко сводятся к одному из случаев, рассмотренных в пунктах 3 и 4.

Пример 5. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(2;\quad -3;\quad 1)$, перпендикулярно плоскостям

$$\alpha_1:\quad x+y-z+1=0 \quad \text{и} \quad \alpha_2:\quad 2x-y+z-1=0.$$

Нормальные векторы плоскостей: $\vec{n}_1=\{1;\quad 1;\quad -1\}$ и $\vec{n}_2=\{2;\quad -1;\quad 1\}$ параллельны плоскости α (см. рис. 4). Подставим координаты точки M_0 и векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ в уравнение (4)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

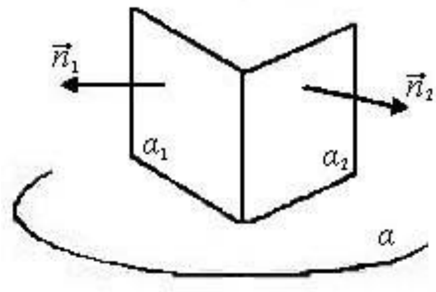


Рис. 4

Раскрывая этот определитель, получим искомое уравнение плоскости

$$y+z+2=0.$$

Ответ: $y+z+2=0.$

Пример 6. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через три заданные точки $A(1; -2; 3)$, $B(2; -4; 1)$, $C(0; 1; 2)$, не лежащие на одной прямой.

Векторы $\overrightarrow{AB}=\{1; \ -2; \ -2\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{-1; \ 3; \ -1\}$ принадлежат плоскости α (см. рис. 5).

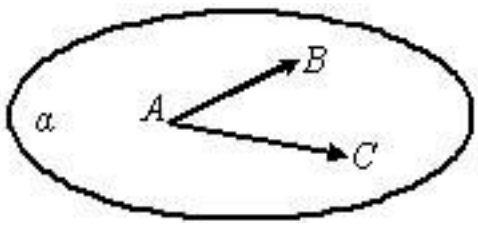


Рис. 5

Возьмем в качестве точки, лежащей на плоскости α, точку C. Подставив координаты векторов и координаты точки C в уравнение (4), получим уравнение плоскости:

$$8x+3y+z-5=0.$$

Ответ: $8x+3y+z-5=0$**.**

5. Условие перпендикулярности, параллельности и совпадения двух плоскостей заданных общими уравнениями

Если плоскости заданы уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

то условие перпендикулярности, параллельности и совпадения этих плоскостей определяются [4 – 7] соответственно соотношениями:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{7}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{8}$$

6. Геометрический смысл неравенств

$$Ax + By + Cz + D \geq 0 \text{ и } Ax + By + Cz + D \leq 0. \tag{9}$$

Пусть плоскость α задана общим уравнением (1) и начало нормального вектора $\vec{n} = \{A; \quad B; \quad C\}$ лежит на данной плоскости (см. рис. 6).

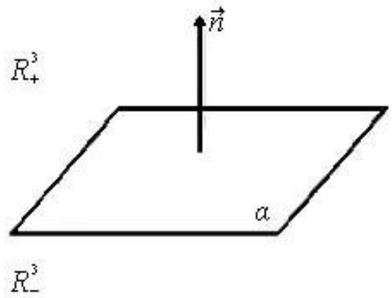


Рис. 6

Плоскость α разбивает пространство на два полупространства. Полупространство, содержащее (не содержащее) нормальный вектор $\vec{n} = \{A; \quad B; \quad C\}$, называется положительным (отрицательным) полупространством R^3_+ (R^3_-), соответствующим уравнению (1).

Решением неравенства $Ax + By + Cz + D \geq 0$ ($Ax + By + Cz + D \leq 0$) является положительное (отрицательное) полупространство R^3_+ (R^3_-), соответствующее уравнению

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пример 7. Рассмотрим координатную плоскость *Oxy*, определяемую уравнением *z*=0. Положительным полупространством этой плоскости, соответствующим уравнению *z*=0, является полупространство, содержащее вектор $\vec{n} = \{0; \quad 0; \quad 1\}$.

Очевидно, что оно является решением неравенства $z \geq 0$ (см. рис.7). Эта же плоскость может задаваться уравнением $-z = 0$. Положительным полупространством R_+^3, которое соответствует последнему уравнению плоскости будет полупространство, содержащее вектор $\vec{n} = \{0; \quad 0; \quad -1\}$ (см. рис. 8), которое и будет решением неравенства $-z \geq 0$.

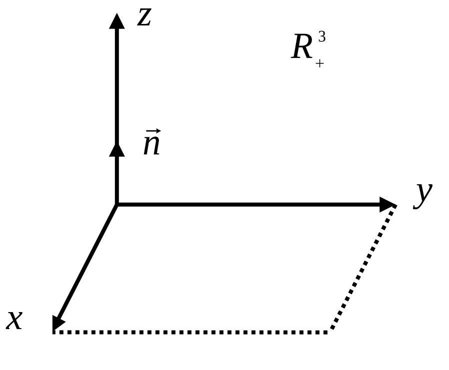


Рис. 7

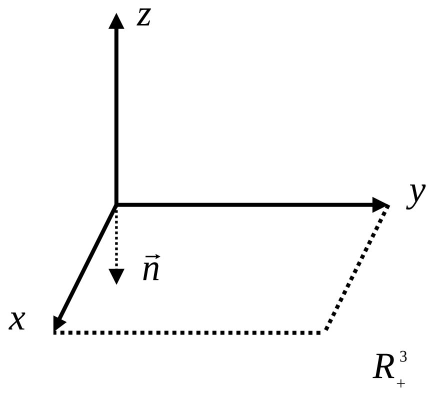


Рис. 8

7. Нормальное уравнение плоскости

Если нормальный вектор $\vec{n} = \{A_0; \quad B_0; \quad C_0\}$, определяемый общим уравнением

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0, \tag{10}$$

является единичным, а свободный член уравнения D_0 – отрицательным или равным 0, то уравнение называется нормальным.

Для того чтобы найти нормальное уравнение плоскости, если известно общее уравнение (1), достаточно последнее разделить на длину нормального вектора

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \tag{11}$$

взятого со знаком плюс, если свободный член D – отрицательный, и со знаком минус, если D – положительный.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \tag{12}$$

Если D=0, то знак выбирается произвольно. Коэффициенты и свободный член нормального уравнения будут определены соотношениями

$$A_0 = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad B_0 = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \quad C_0 = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$$D_0 = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{13}$$

Замечание. При D_0=0 существуют два нормальных уравнения, отличающихся друг от друга множителем равным –1.

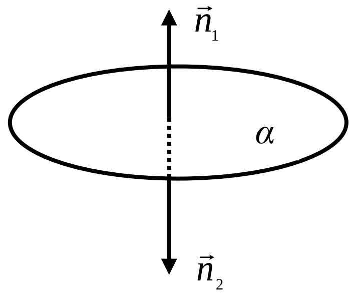


Рис. 9

Пример 8. Пусть плоскость α задана уравнением

$$2x+2y+z+3=0.$$

Существуют только два уравнения

$$\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z+1=0, \quad -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-1=0,$$

коэффициенты которых являются координатами единичных нормальных векторов: $\vec{n}_1 = \left\{\frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{3}\right\}$ и $\vec{n}_2 = \left\{-\frac{2}{3}; \quad -\frac{2}{3}; \quad -\frac{1}{3}\right\}$. Из определения нормального уравнения следует, что нормальным будет то уравнение, у которого свободный член D – отрицательный, то есть уравнение

$$-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-1=0.$$

8. Расстояние от точки $M(x_0; \quad y_0; \quad z_0)$ до плоскости α

Число

$$\sigma(M;\alpha) = A_0x_0+B_0y_0+C_0z_0+D_0,$$

получаемое в результате подстановки координат x_0, y_0, z_0 точки M в левую часть нормального уравнения плоскости (10), называется отклонением точки M от плоскости [1, 5]. Отклонение, в зависимости от того, по какую сторону плоскости находится точка M и нормальный вектор $\vec{n}$, может быть как положительным, так и отрицательным (см. пункт 6), а взятое по модулю, равняется расстоянию от точки $M(x_0;\ \ y_0;\ \ z_0)$ до плоскости α.

Таким образом, расстояние от точки $M(x_0;\ \ y_0;\ \ z_0)$ до плоскости α вычисляется по формуле

$$\rho(M;\alpha) = |\sigma| = |A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0 + D_0| \tag{14}$$

или в виду (12) так

$$\rho(M;\alpha) = \left|\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| \tag{15}$$

Замечание. Если плоскость не проходит через начало координат *O*, то подставив координаты точки *O*(0; 0; 0) в левую часть уравнения (10) и учитывая, что свободный член нормального уравнения отрицательный, получим, что отклонение от начала координат до плоскости

$$\sigma = D_0 < 0 \text{ и расстояние } \rho = -D_0. \tag{16}$$

То есть, расстояние ρ от начала координат до плоскости будет равно свободному члену, взятому со знаком минус

$$\rho = -\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{17}$$

Из (16) следует, что начало координат лежит в отрицательном полупространстве. Это означает, что нормальный вектор $\vec{n}_0 = \{A_0;\ \ B_0;\ \ C_0\}$, определяемый нормальным уравнением (10), и точка *O*(0; 0; 0) всегда лежат по разные стороны плоскости α.

Замечание. Если α, β, γ – углы между вектором $\vec{n}_0$ и осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно, то из соотношений (13) следует:

$$\cos\alpha = A_0,\ \cos\beta = B_0,\ \cos\gamma = C_0.$$

Тогда учитывая (16), нормальное уравнение запишется в виде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0 \tag{18}$$

9. Пучок плоскостей.

Определение: Совокупность всех плоскостей проходящих через одну прямую называется пучком плоскостей, а прямая – осью пучка.

Пусть даны две пересекающиеся плоскости

$$\alpha_1\colon\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad \alpha_2\colon\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Плоскость α проходит через прямую пересечения плоскостей α_1 и α_2, тогда и только тогда, когда она задается уравнением

$$p(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+q(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (19)$$

где p, q одновременно не равны нулю. Уравнение (19) называется общим уравнением пучка плоскостей.

Замечание. Если $p\neq 0$, то поделив (19) на p, получим уравнение

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (20)$$

где $\lambda = \dfrac{q}{p}$.

Полученным уравнением удобно пользоваться, так как оно зависит только от одного параметра λ, но оно обладает и недостатком: уравнение определяет все плоскости пучка, кроме плоскости

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (случай когда $p=0$).

Поэтому, если известно, что точно существует плоскость, принадлежащая пучку, удовлетворяющая условию задачи, и при использовании уравнения (20), мы придем к противоречию, то тогда нужно перейти к рассмотрению уравнения (19), либо просто заключить, что ответом будет плоскость

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Пример 9. В пучке $(x+y-z)+\lambda(x-y+z-1)=0$ найдем плоскость, параллельную вектору $\vec{a}=\{1;\quad 0;\quad -1\}$.

Очевидно, что такая плоскость существует. Уравнения пучка запишем в виде

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z-\lambda=0.$$

Так как вектор $\vec{N}=\{1+\lambda;\quad 1-\lambda;\quad \lambda-1\}$ перпендикулярен $\vec{a}$, то

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0+(\lambda-1)\cdot(-1)=0.$$

Отсюда следует 2=0.

Полученное противоречие показывает, что искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$x-y+z-1=0.$$

Ответ: $x-y+z-1=0$ **.**

10. Прямая – как пересечение двух плоскостей

Линия пересечения двух пересекающихся плоскостей α_1 и α_2, заданных соответственно уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

есть прямая, которая определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (21)$$

11. Параметрические уравнения прямой

Определение: Любой вектор, параллельный прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Положение прямой в пространстве однозначно определяется точкой $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащей прямой, и направляющим вектором $\vec{a}=\{l;\quad m;\quad n\}$ (см. рис. 10).

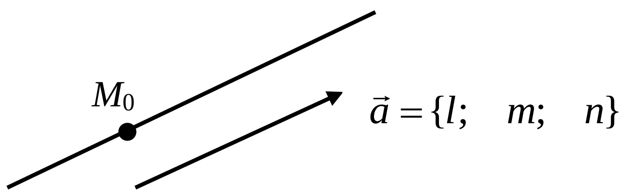


Рис. 10

Если известны точка M_0 и $\vec{a}=\{l;\quad m;\quad n\}$, то в этом случае прямую можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases} \qquad (22)$$

12. Канонические уравнения прямой

Если исключить параметр t в уравнениях (22), то получим канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (23)$$

13. Переход от одного способа задания прямой к другому

Чтобы перейти к параметрическим уравнениям (22), если прямая L задана как пересечение плоскостей α_1 и α_2, системой (21)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$$

нужно:

1) найти какое-нибудь решение этой системы.

Так как плоскости пересекаются, то хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \text{ – не равен нулю.}$$

Допустим, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда положив $z=z_0$ (обычно $z_0=0$), получим систему

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z_0+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z_0+D_2=0. \end{cases}, \text{ из которой найдем } x_0 \text{ и } y_0.$$

2) найти направляющий вектор прямой.

В качестве направляющего вектора прямой берется векторное произведение

$$[\vec{n}_1, \quad \vec{n}_2]=\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}$$

нормальных векторов $\vec{n}_1=\{A_1; \quad B_1; \quad C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2; \quad B_2; \quad C_2\}$ плоскостей α_1 и α_2 (см. рис. 11).

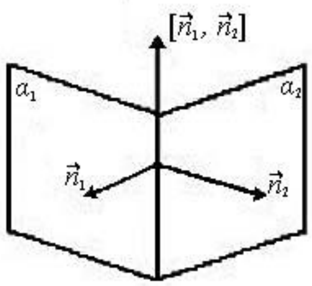


Рис. 11.

Таким образом, параметрические уравнения запишутся в виде:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t,\ y = y_0 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t,\ z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t, \tag{24}$$

а канонические уравнения соответственно:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{25}$$

Чтобы перейти от параметрических и канонических уравнений к системе (21), заметим, что система (25) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}, \\ \dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \end{cases}. \tag{26}$$

состоящей из двух уравнений первой степени, каждое из которых есть уравнение плоскости.

Пример 10. Найдем параметрические уравнения прямой L:

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ x + y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Положим x=0. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} y - z - 1 = 0, \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

решением которой является y=1, z=0. Следовательно, точка $M(0;\ \ 1;\ \ 0) \in L$.

Тогда по формулам (24) параметрическими уравнениями будут:

$$x = 0 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t, \; y = 1 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t, \; z = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t,$$

или

$$x=2t; \; y=1-2t; \; z=0,$$

а каноническими:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{0}.$$

Данные уравнения эквивалентны системе

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2}, \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{0} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x + 2y - 2 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Заметим, что полученная система отличается от первоначальной, хотя и является системой, определяющей эту же прямую.

14. Расстояние от точки до прямой

Расстояние ρ от точки $M_1(x_1; \; y_1; \; z_1)$ до прямой L, проходящей через точку $M(x_0; \; y_0; \; z_0)$ с направляющим вектором $\vec{a} = \{l; \; m; \; n\}$, вычисляется по формуле

$$\rho(M_1, L) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \; \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|} \tag{27}$$

или в координатной форме

$$\rho(M_1, L) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{28}$$

15. Расстояние между прямыми

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

$$L_1: \quad \begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + m_1 t, \\ z = z_1 + n_1 t, \end{cases} \qquad L_2: \quad \begin{cases} x = x_2 + l_2 t \\ y = y_2 + m_2 t \\ z = z_2 + n_2 t \end{cases}$$

определяется формулой:

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\left| \left(\overrightarrow{M_1 M}_2, \quad \vec{a}_1, \quad \vec{a}_2 \right) \right|}{\left| \left[\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2 \right] \right|} \tag{29}$$

где $M_1(x_1; \quad y_1; \quad z_1) \in L_1$, $M_2(x_2; \quad y_2; \quad z_2) \in L_2$, $\vec{a}_1 = \{l_1; \quad m_1; \quad n_1\}$, $\vec{a}_2 = \{l_2; \quad m_2; \quad n_2\}$ или в координатной форме

$$\rho(L_1, L_2) = \frac{\operatorname{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}} \tag{30}$$

Замечание. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то расстояние между ними находится, как расстояние от точки M_1 до прямой L_2 по формулам (27), (28). Если же воспользоваться соотношениям (29), (30) возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как в этом случае числитель в (29), (30) равен нулю, то часто делается ошибочное заключение о том, что расстояние между прямыми равно нулю.

16. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Если прямая L_1 с направляющим вектором $\vec{a}_1 = \{l_1; \quad m_1; \quad n_1\}$ проходит через точку $M_1(x_1; \quad y_1; \quad z_1)$ и L_2 с направляющим вектором $\vec{a}_2 = \{l_2; \quad m_2; \quad n_2\}$ проходит через точку $M_2(x_2; \quad y_2; \quad z_2)$, то необходимым и достаточным условием принадлежности прямых L_1, L_2 одной плоскости, является условие $\left(\overrightarrow{M_1 M_2}, \quad \vec{a}_1, \quad \vec{a}_2 \right) = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (31)$$

§2. Образцы решений индивидуальных заданий

Задача 1. Найти уравнение плоскости α, проходящей через ось Ox и точку $M(1; -1; 1)$.

Решение:

1 способ. Рассмотрим векторы $\vec{a} = \{1; \; 0; \; 0\}$ и $\overrightarrow{OM} = \{1; \; -1; \; 1\}$, лежащие на плоскости α и, следовательно, параллельные ей (см. рис. 12). Воспользуемся уравнением (4) §1 . Так как плоскость проходит через начало координат, то уравнение (4) §1 запишется в виде:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad y+z=0.$$

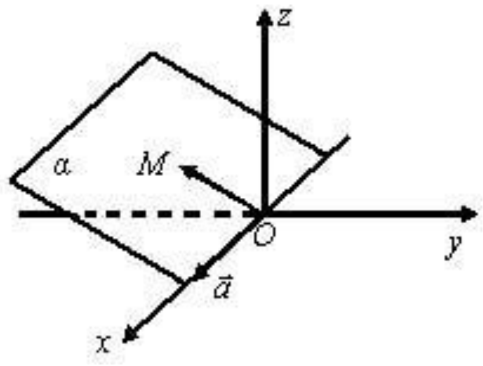


Рис. 12

2 *способ.* Уравнение плоскости найдем из пучка $y+\lambda z=0$ (см. п.9 §1), осью которого является ось Ox, определяемая уравнениеми: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Подставив в уравнение пучка координаты точки M, найдем параметр λ: $-1+\lambda=0$ или $\lambda=1$.

Уравнение плоскости, принадлежащей пучку и проходящей через точку $M(1; -1; 1)$, запишется в виде: $y+z=0$.

Ответ: $y+z=0$.

Задача 2. Найти уравнение плоскости в отрезках, параллельной вектору

$\vec{l}=\{2;\quad 6;\quad 4\}$ и отсекающей на координатных осях Ox и Oy соответственно отрезки величиной 2; –3.

Решение:

1 способ. Уравнение (2) §1 в отрезках имеет вид $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

По условию задачи *a*=2; $b=-3$. Тогда указанное уравнение плоскости можно записать в виде

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{c}=1.$$

Нормальный вектор $\vec{n}=\left\{\frac{1}{2};\quad -\frac{1}{3};\quad \frac{1}{c}\right\}$ этой плоскости перпендикулярен вектору $\vec{l}$ (см. рис. 13). Тогда из условия перпендикулярности двух векторов

$$\left(\vec{n},\quad \vec{l}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot 6+\frac{1}{c}\cdot 4=0.$$

Отсюда найдем *c*=4.

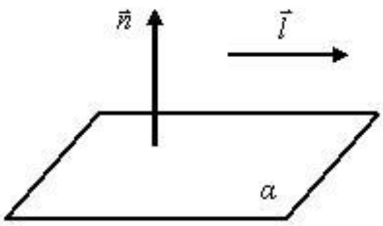


Рис. 13

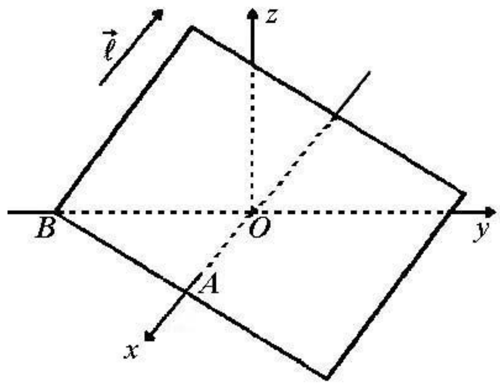
Ответ: $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$**.**

2 *способ.* Из условия задачи ясно, что плоскость проходит через точки *A*(2; 0; 0) и *B*(0; –3; 0). Векторы $\overrightarrow{AB}=\{-2;\quad -3;\quad 0\}$ и $\vec{l}$ параллельны плоскости (см. рис. 14). Уравнение (4) §1 плоскости будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad 12x–8y+6z–24=0.$$

Полученное уравнение разделим на 24:

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}-1=0 \quad \text{или} \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$$



Ответ: $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{4}=1$**.**

Рис 14

Задача 3. Найти проекцию L' прямой L: $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$ на плоскость γ: $2x-y+$ $+3z-1=0$.

Решение:

Уравнение пучка плоскостей с осью L имеет вид:

$$p(x+y-z+1)+q(x-y+z-1)=0.$$

Так как проектирующая плоскость α проходит через L, то ее уравнение запишется как

$$p_0(x+y-z+1)+q_0(x-y+z-1)=0$$

или

$$(p_0+q_0)x+(p_0-q_0)y+(-p_0+q_0)z+(p_0-q_0)=0. \qquad (32)$$

Числа p_0 и q_0 найдем из условия перпендикулярности (6) §1 проектирующей плоскости α и плоскости γ, на которую проектируется прямая L (см. рис. 15).

$$2(p_0+q_0)-(p_0-q_0)y+3(-p_0+q_0)z=0.$$

$$-2p_0+6q_0=0.$$

Возьмем любое частное решение этого уравнения, например, q_0=1, p_0 =3. Подставим эти значения в уравнение (32). Полученное уравнение

$$4x+2y-2z+2=0$$

или эквивалентное ему уравнение

$$2x+y-z+1=0$$

будут уравнениями проектирующей плоскости.

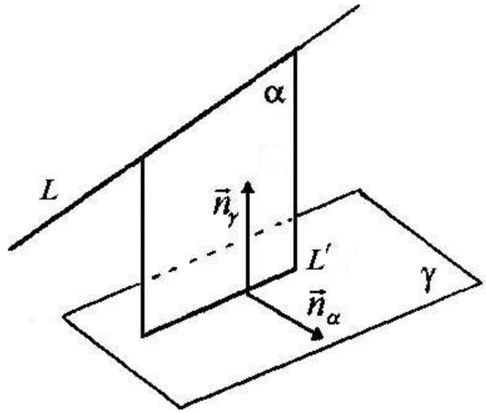


Рис.15

Проекция L' прямой L на плоскость γ есть пересечение плоскостей α и γ, задаваемой системой:

Ответ: $\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$.

Задача 4. Найти проекцию прямой

$$L\colon \begin{cases} -x+2y-z+1=0 \\ 3x-2y+4z+2=0 \end{cases} \qquad (33)$$

на координатную плоскость *Oxy*.

Решение:

1 способ. Из первого уравнения системы (33) имеем

$$z=-x+2y+1\,.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение. В результате получим уравнение плоскости α: x–6y–6=0. Любое решение системы уравнений, задающей прямую L, является и решением этого уравнения. Геометрически это означает, что плоскость α проходит через прямую L.

С другой стороны плоскость *Oxy*, задаваемая уравнением z=0, и плоскость α взаимно перпендикулярны, так как скалярное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1=\{0;\ \ 0;\ \ 1\}$ и $\vec{n}_2=\{1;\ \ -6;\ \ 0\}$, определяемых этими уравнениями, равно нулю (т.е. выполняется необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей см. п.6 §1).

Таким образом, мы имеем, что плоскость α проходит через прямую L и перпендикулярна плоскости Oxy. Следовательно, проекцией является прямая задаваемая системой уравнений

$$\begin{cases} x-6y-6=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x-6y-6=0, \\ z=0. \end{cases}$

2 *способ.* Найдем две точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, лежащих на прямой L. Допустим, что координата x_1 точки M_1 равна нулю. Координаты точки M_1 должны удовлетворять системе (33). Подставим их в уравнения этой системы, тогда получим:

$$\begin{cases} 2y-z+1=0, \\ -2y+4z+2=0, \end{cases}$$

решением которой является $y_1=-1$ и $z_1=-1$.

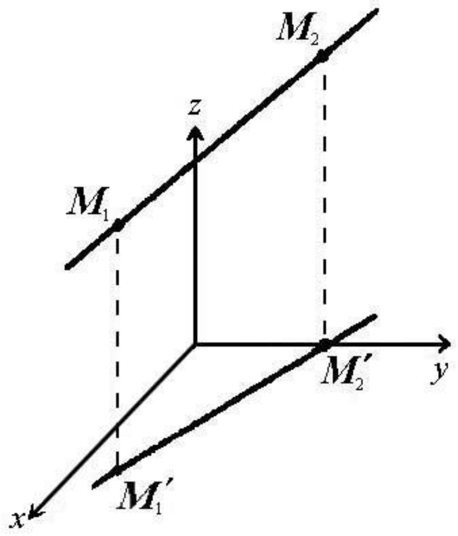


Рис. 16

Итак, координаты точки $M_1(0;\ -1;\ -1)$ удовлетворяют (33) и, следовательно, $M_1 \in L$. Аналогично, положив $y_2=0$, найдем $M_2(6;\ 0;\ -5)$, принадлежащую L. Точки $M_1'(0;\ -1;\ 0)$ и $M_2'(6;\ 0;\ 0)$ являются соответственно ортогональными проекциями точек $M_1(0;\ -1;\ -1)$ и $M_2(6;\ 0;\ -5)$ на плоскость Oxy (см. рис. 16). Следовательно, они лежат на проекции L' прямой L. Тогда в качестве направляющего вектора $\vec{a}$ прямой L' можно взять вектор $\overrightarrow{M_1'M_2'}=\{6;\ \ 1;\ \ 0\}$.

Поэтому параметрические уравнения прямой L' запишутся в виде

$$\begin{cases} x=6t \\ y=-1+t\,. \\ z=0 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 6t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}.$

Задача 5. Составить уравнение биссекторной плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями

$$\alpha_1 : \ 2x - 2y + z - 3 = 0, \tag{34}$$

$$\alpha_2 : \ x + 2y - 2z + 6 = 0, \tag{35}$$

в котором лежит точка $M(1; -1; 1)$.

Решение:

1 способ. Две пересекающиеся плоскости α_1 и α_2 образуют два двугранных угла. Поэтому существуют две биссекторные плоскости β_1 и β_2.

Будем искать обе биссекторные плоскости, как геометрическое место точек, равноудаленных от плоскостей α_1 и α_2 (см. рис. 17).

Возьмем произвольную точку $M(x^*;\ y^*;\ z^*) \in \beta_1 \cup \beta_2$. Расстояние от точки М до плоскости α_1 (п. 15, §1) равно:

$$\rho(M, \alpha_1) = \left| \frac{2x^* - 2y^* + z^* - 3}{3} \right|.$$

Расстояние от точки M до α_2 также равно:

$$\rho(M, \alpha_2) = \left| \frac{x^* + 2y^* - 2z^* + 6}{3} \right|.$$

Так как $\rho(M, \alpha_1) = \rho(M, \alpha_2)$, то

$$\left| \frac{2x^* - 2y^* + z^* - 3}{3} \right| = \left| \frac{x^* + 2y^* - 2z^* + 6}{3} \right| \text{ или}$$

$$|2x^* - 2y^* + z^* - 3| = |x^* + 2y^* - 2z^* + 6|.$$

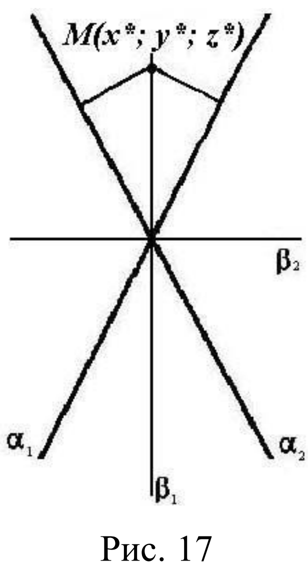


Рис. 17

Избавившись от модуля, получим, что для x^*, y^*, z^* верно одно из двух соотношений

$$x^*-4y^*+3z^*-9=0 \text{ или } 3x^*-z^*+3=0. \qquad (36)$$

Теперь рассмотрим уравнения плоскостей

$$x–4y+3z–9=0 \qquad (37)$$

и

$$3x–z+3=0. \qquad (38)$$

Из (36) вытекает, что координаты любой точки из объединения плоскостей β_1 и β_2 удовлетворяют (37) или (38). Следовательно, β_1 и β_2 совпадают с плоскостями задаваемыми этими уравнениями. Допустим, что плоскость β_1 задается уравнением (37) и β_2 – уравнением (38). Определим, какая из плоскостей β_1 и β_2 расположена внутри двухгранного угла, содержащего точку *M*.

Скалярное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{2; \ -2; \ 1\}$ и $\vec{n}_2 = \{1; \ 2; \ -2\}$ плоскостей α_1 и α_2 определяемых уравнениями (34) и (35):

$$(\vec{n}_1, \ \vec{n}_2) = 2\cdot 1 - 2\cdot 2 + 1\cdot(-2) = -4 < 0.$$

Это означает, что

$$\cos(\vec{n}_1, \ \vec{n}_2) = \frac{(\vec{n}_1, \ \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} < 0.$$

То есть угол, образованный векторами $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ – тупой. Следовательно, положительные и отрицательные полупространства R^3_+ и R^3_-, соответствующие уравнениям (34 и (35 могут быть расположены, как на рис. 18 или на рис.19.

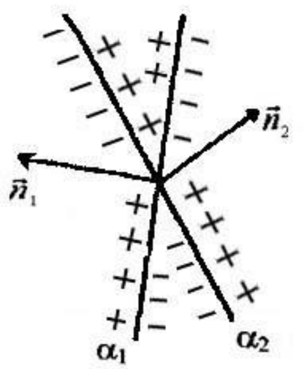


Рис. 18

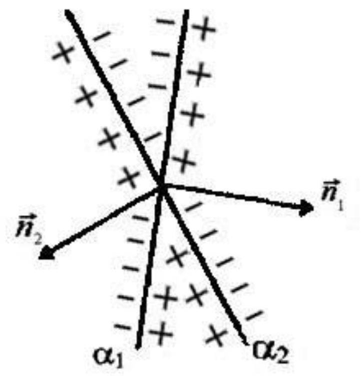


Рис.19

Заметим, что на обоих рисунках тупой двугранный угол содержит в себе часть положительного полупространства одной плоскости и часть отрицательного полупространства другой плоскости. Острый же угол содержит обязательно части только положительных полупространств или только отрицательных полупространств.

Теперь определим, где находится точка M, внутри острого или тупого угла. Для этого подставим координаты точки M в левые части уравнения плоскостей α_1 и α_2:

$$\alpha_1(M)=2\cdot 1-2\cdot(-2)+1-3>0,$$

$$\alpha_2(M)=1+2\cdot(-1)-2\cdot 1+6>0.$$

Следовательно, в первом случае точка M лежит в положительном полупространстве R^3_+ плоскости α_1, а во втором случае – лежит в положительном полупространстве R^3_+ плоскости α_2. Значит, точка M находится внутри острого угла.

Далее, возьмем любую из найденных биссекторных плоскостей, например, β_2 и любую конкретную точку A, принадлежащую этой плоскости, но не лежащую в пересечении плоскостей α_1, α_2. Координаты точки A можно найти простым подбором, либо можно воспользоваться следующим приемом:

положив в уравнении (37) $x=0$, $y=1$ (вместо чисел 0 и 1 можно брать любые) и разрешив его относительно z, получим $z=3$. Тогда точка $A(0; 1; 3)\in\beta_2$.

Подставим координаты точки A в правые части уравнений плоскостей α_1 и α_2:

$$\alpha_1(A)=2\cdot 0-2\cdot 1+3-3=-2<0,$$

$$\alpha_2(A)=2\cdot 0+2\cdot 1-6+6=2>0.$$

Как и для точки M определим, что точка A находится внутри тупого двугранного угла. Это означает, что плоскость β_2 расположена внутри этого же угла. Следовательно, плоскость β_1 задаваемая уравнением

$$x-4y+3z-9=0,$$

делит двугранный острый угол пополам, в котором находится точка M.

Ответ: $x-4y+3z-9=0$.

Замечание. Если нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ плоскостей α_1 и α_2 образуют острый угол, то полупространства, соответствующие уравнениям плоскостей будут расположены как на рисунках 20, 21.

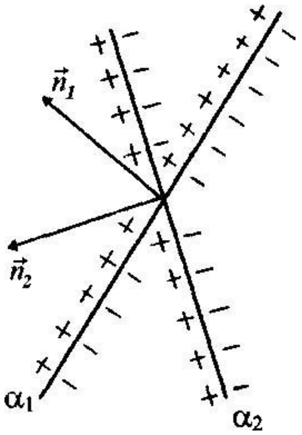


Рис. 20

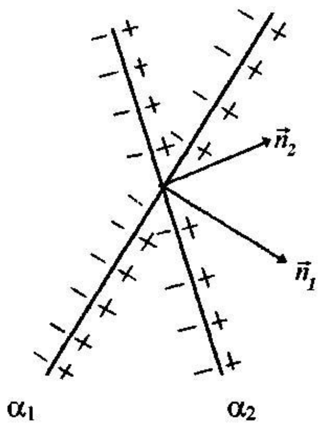


Рис. 21

2 способ. Рассмотрим нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{2; \ -2; \ 1\}$ и $\vec{n}_2 = \{1; \ 2; \ -2\}$ плоскостей α_1 и α_2. Так как $|\vec{n}_1| = |\vec{n}_2| = 3$, $\vec{N}_2 = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 = \{3; \ 0; \ -1\}$ будет перпендикулярен плоскости β_2 (см. рис. 22).

Тогда уравнение плоскости β_2 будет иметь вид

$$3 \cdot x + 0 \cdot y - z + D = 0. \tag{39}$$

Положив в уравнениях (34) и (35) $x=0$, получим систему (см. п. 13 §1): $\begin{cases} -2y + z - 3 = 0, \\ 2y - 2z + 6 = 0, \end{cases}$

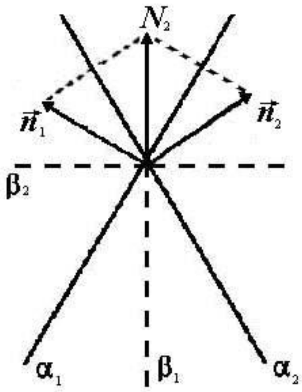


Рис. 22

решением которой является $y=0$; $z=3$. Тогда точка $A(0; 0; 3)$ лежит в пересечении плоскостей α_1 и α_2 и, следовательно, принадлежит плоскости β_2. Подставив координаты точки A в (39), определим D (см. п.3 §1)

$$3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + D = 0,$$

$$D = 3.$$

Уравнение биссекторной плоскости β_2 запишется так:

$$3x - z + 3 = 0.$$

В качестве нормального вектора плоскости β_1 (см. рис. 23) можно взять вектор

$\vec{N}_1 = \vec{n}_1 + (-\vec{n}_2) = \{2-1; \quad -2-2; \quad 1-(-2)\} =$

$= \{1; \quad -4; \quad 3\}.$

Используя условие принадлежности точки $A(0;\ 0;\ 3)$ плоскости β_1 как и в случае с плоскостью β_2, найдем уравнение плоскости

$$x–4y+3z–9=0.$$

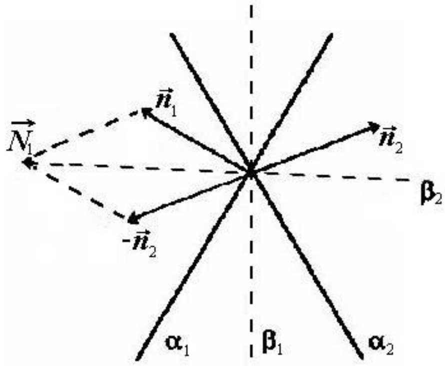


Рис. 23

Далее как и в первом способе аналогично выбираем одну из плоскостей β_1 и β_2, лежащую внутри того двугранного угла, что и точка M.

Ответ: $x–4y+3z–9=0$.

Замечание. В случае если $|\vec{n}_1| \neq |\vec{n}_2|$, то вместо векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ нужно рассмотреть нормальные вектора $\vec{n}_1' = |\vec{n}_2|\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2' = |\vec{n}_1|\vec{n}_2$ плоскостей α_1 и α_2.

Задача 6. Точки $A(4;\ 5;\ 1)$, $B(–2;\ 0;\ –1)$, $C(–2;\ 2;\ –1)$ являются вершинами треугольника. Найти уравнения биссектрисы L_C выходящей из вершины C.

Решение:

1 способ. С помощью векторов $\overrightarrow{CA} = \{6; \quad 3; \quad 2\}$ и $\overrightarrow{CB} = \{0; \quad -2; \quad 0\}$ построим векторы: $\overrightarrow{CA_1} = |\overrightarrow{CB}|\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB_1} = |\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{CB}$ одинаковой длины.

Следовательно, параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, является ромбом (см. рис. 24) и диагональ CC_1 будет параллельна биссектрисе L_C. Так как $\overrightarrow{CA} = \{6; \quad 3; \quad 2\}$ и $\overrightarrow{CB} = \{0; \quad -2; \quad 0\}$; $|\overrightarrow{CA}| = 7$ и $|\overrightarrow{CB}| = 2$,

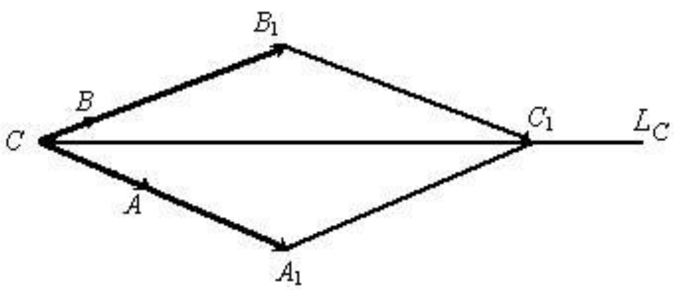


Рис. 24

то $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CB_1} = \left|\overrightarrow{CB}\right|\overrightarrow{CA} + \left|\overrightarrow{CA}\right|\overrightarrow{CB} = 2\cdot\{6;\quad 3;\quad 2\} + 7\cdot\{0;\quad -2;\quad 0\} = \{12;\quad -8;\quad 4\}$.

В качестве направляющего вектора биссектрисы возьмем вектор $\frac{1}{4}\overrightarrow{CC_1} = \{3;\quad -2;\quad 1\}$. Учитывая, что точка $C(-2;\quad 2;\quad -1) \in L_C$, запишем параметрические уравнения искомой прямой в виде:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = -1 + t. \end{cases}$

2 способ. Будем искать биссектрису L_C в виде пересечения двух плоскостей α и β. Первая плоскость α, содержащая биссектрису, является плоскостью треугольника ABC. Ее уравнение будем искать, как уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B и C (аналогично примеру 6, рассмотренному в п.4 §1)

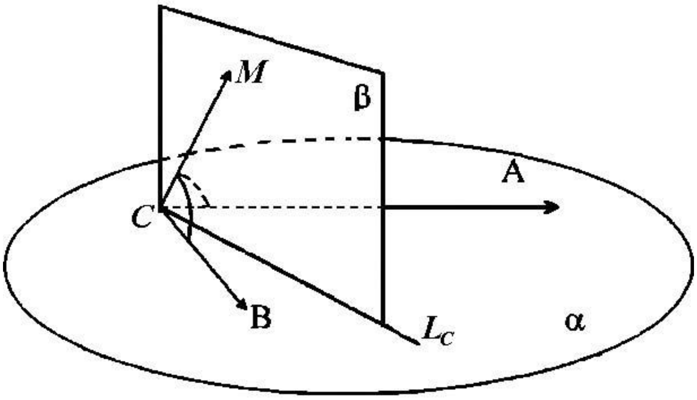


Рис. 25

$\overrightarrow{CA} = \{6;\quad 3;\quad 2\}$, $\overrightarrow{CB} = \{0;\quad -2;\quad 0\}$ и $C(-2;\quad 2;\quad -1) \in \alpha$. Подставим координаты $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и точки С в уравнение (4) §1:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z+1 \\ 6 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим уравнение плоскости

$$\alpha:\ x-3z-1=0.$$

Вторую плоскость β будем искать, как геометрическое место точек, для которых выполняется условие

$$\angle ACM=\angle BCM,\quad \text{где } M(x;\ y;\ z)\in\beta \tag{40}$$

(см. рис. 25).

Очевидно, что для любой точки биссектрисы L_C это условие выполняется. Следовательно, $L_C\subset\beta$. Из (40) вытекает, что

$$\cos\angle ACM=\cos\angle BCM$$

или

$$\frac{\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CM}\right)}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CM}\right|}=\frac{\left(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CM}\right)}{\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CM}\right|} \text{ или } \left|\overrightarrow{CB}\right|\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CM}\right)=\left|\overrightarrow{CA}\right|\left(\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{CM}\right). \tag{41}$$

Так как $\overrightarrow{CM}=\{x+2;\ \ y-2;\ \ z+1\}$, $\overrightarrow{CA}=\{6;\ \ 3;\ \ 2\}$, $\overrightarrow{CB}=\{0;\ \ -2;\ \ 0\}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=7$, $\left|\overrightarrow{CB}\right|=2$, то уравнение (41) в координатной форме примет вид:

$$2(6(x+2)+3(y-2)+2(z+1))=7(-2(y-2))$$

или

$$3x+5y+z-3=0. \tag{42}$$

Итак, любая точка $M(x;\ y;\ z)$, принадлежащая плоскости β, удовлетворяет уравнению плоскости $3x+5y+z-3=0$. Это означает, что уравнение (42) является уравнением плоскости β. Таким образом, прямую L_C можно задать, как пересечение плоскостей α и β.

Ответ: $\begin{cases} x-3z-1=0, \\ 3x+5y+z-3=0. \end{cases}$

Задача 7. Точки $A(-2;\ 0;\ 2)$, $B(-3;\ 3;\ -1)$, $C(-1;\ -3;\ 4)$ являются вершинами треугольника ABC. Найти уравнение высоты, опущенной из вершины C.

Решение:

1 способ

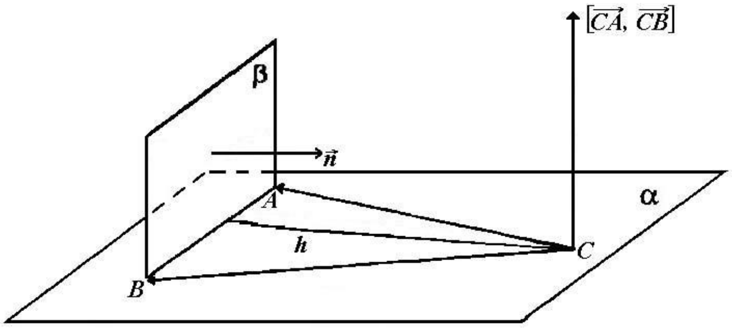


Рис. 26.

Рассмотрим плоскость β, содержащую сторону *AB* и перпендикулярную плоскости α, проходящей через точки *A*, *B*, *C* (см. рис. 26). Плоскость β параллельна вектору $\overrightarrow{AB}=\{-1;\ 3;\ -3\}$ и векторному произведению $\left[\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right]$.

Так как $\overrightarrow{CA}=\{-1;\ 3;\ -2\}$, $\overrightarrow{CB}=\{-2;\ 6;\ -5\}$, то

$$\left[\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right]=\left\{\begin{vmatrix}3 & -2\\ 6 & -5\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}-2 & -1\\ -5 & -2\end{vmatrix};\ \begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 6\end{vmatrix}\right\}=\{-3;\ -1;\ 0\}.$$

Тогда уравнение плоскости β, параллельной двум неколлинеарным векторам $\overrightarrow{AB}$, $\left[\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right]$ и проходящей через заданную точку *A*(–2; 0; 2) (см. (4), §1) запишется в виде:

$$\begin{vmatrix}x+2 & y & z-2\\ -1 & 3 & -3\\ -3 & -1 & 0\end{vmatrix}=0 \text{ или } -3x+9y+10z-26=0.$$

Так как нормальный вектор $\vec{n}=\{-3;\ 9;\ 10\}$ плоскости β будет параллельным высоте *h*, то он является ее направляющим вектором.

Учитывая, что точка $C(-1;\ -3;\ 4)\in h$, запишем параметрические уравнения высоты

$$\begin{cases}x=-1-3t,\\ y=-3+9t,\\ z=4+10t.\end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = -1 - 3t, \\ y = -3 + 9t, \\ z = 4 + 10t. \end{cases}$

2 способ. Рассмотрим плоскость γ, содержащую высоту h и перпендикулярную плоскости α (см. рис. 27). Ее уравнение запишем как уравнение плоскости, проходящей через точку C(–1; –3; 4) с заданным нормальным вектором $\overrightarrow{AB} = \{-1;\quad 3;\quad -3\}$ (см. (3) §1 и рис.27) в виде:

$$-(x+1)+3(y+3)-3(z-4)=0$$

или после раскрытия скобок

$$x-3y+3z-20=0.$$

Аналогично найдем уравнение плоскости α, проходящей через точку A(–2; 0; 2) с заданным нормальным вектором $\left[\overrightarrow{CA},\quad \overrightarrow{CB}\right] = \{-3;\quad -1;\quad 0\}$:

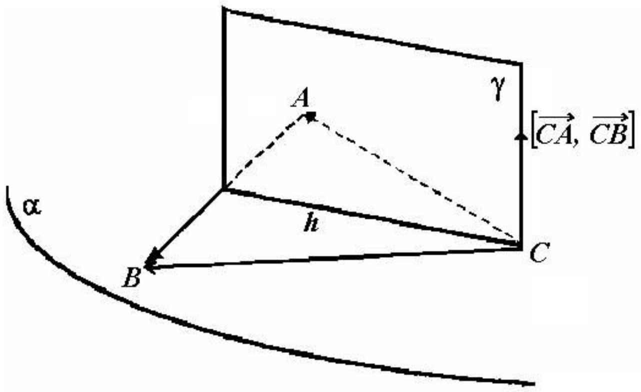


Рис. 27

$$-3(x+2)-(y-0)+0(z-2)=0 \text{ или } 3x+y+6=0.$$

Тогда система $\begin{cases} x - 3y + 3z - 20 = 0, \\ 3x + y + 6 = 0. \end{cases}$, будет определять высоту, как пересечение двух плоскостей α и γ.

Ответ: $\begin{cases} x - 3y + 3z - 20 = 0, \\ 3x + y + 6 = 0. \end{cases}$

Задача 8. Даны точки A(–3; 10; –20), B(3; –5; –2), C(5; 3; –4). Точка N делит отрезок [AB] в отношении λ=2. Найти кратчайшее расстояние между прямой P, проходящей через точки C и N и прямой L заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = -65 - 3t, \\ y = -67 + 3t, \\ z = -74 + 4t. \end{cases}$$

Решение:

Подставив координаты точек *A*, *B* и значение λ в формулы:

$$x_N = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_N = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}, \quad z_N = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda},$$

найдем координаты точки *N*: $x_N = 1$, $y_N = 0$, $z_N = -8$. В качестве направляющего вектора прямой *P* можно взять вектор $\overrightarrow{CN} = \{-4; \ -3; \ -4\}$ и так как точка $C \in P$, то параметрические уравнения прямой запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = 5 - 4t, \\ y = 3 - 3t, \\ z = -4 - 4t. \end{cases}$$

Найдем кратчайшее расстояние между прямой *P* и прямой *L*.

1 способ. Векторы $\vec{a} = \{-3; \ 3; \ 4\}$ и $\overrightarrow{CN} = \{-4; \ -3; \ -4\}$ неколлинеарны. Следовательно, прямые *P* и *L* не параллельны. Тогда для определения кратчайшего расстояния между прямыми заданными параметрическими уравнениями можно воспользоваться формулой (28) § 1

$$\rho(P,\ L) = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} -65-5 & -67-3 & -74-(-4) \\ -4 & -3 & -4 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}^2}} = \frac{70 \cdot 7}{35} = 14.$$

Ответ: ρ**=14.**

2 способ. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через точку C параллельно прямым *P* и *L* (см. рис. 28). Так как направляющие векторы $\vec{a}$ и $\overline{CN}$ неколлинеарны и параллельны плоскости α, то ее уравнение можно записать в виде ((4) §1):

$$\begin{vmatrix} -x-5 & y-3 & z+4 \\ -3 & 3 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 4y–3z–24=0.$$

Точка $M(-65;\ -67;\ -74)$ лежит на прямой L. Очевидно, что кратчайшее расстояние между прямыми P и L равно расстоянию от точки M до плоскости α, которые можно вычислить пользуясь формулой (15) §1

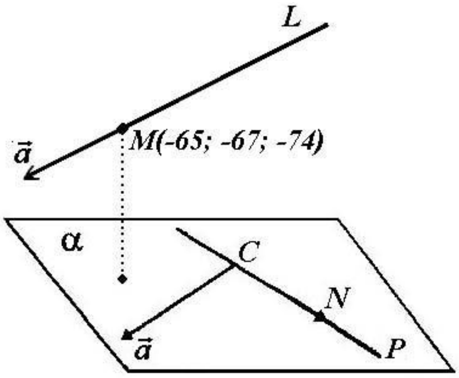


Рис. 28

$$\rho(P,\ L)=\rho(M,\ \alpha)=\frac{|4(-67)-3(-74)-24|}{\sqrt{4^2+3^2}}=14.$$

Ответ: $\rho=14$.

Задача 9. Найти точку N, симметричную точке $M(-6;\ 6;\ -7)$, относительно прямой L :

$$x=30+4t,\ y=24+t,\ z=-61-t.$$

Решение:

1 способ. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через точку M перпендикулярно прямой L. Так как L перпендикулярна плоскости α то, в качестве нормального вектора к плоскости можно взять направляющий вектор $\vec{a}=\{4;\ \ 1;\ \ -1\}$ прямой L (см. рис. 29). Уравнение плоскости α найдется, как уравнение плоскости проходящей через точку M с заданным нормальным вектором $\vec{a}$ (см. (3) §1);

$$4(x-(-6))+1(y-6)-1(z-(-7))=0 \text{ или } 4x+y-z+11=0.$$

Точка P, являющаяся проекцией точки M на прямую L, есть пересечение плоскости α и прямой L. Координаты которой найдем из системы

$$\begin{cases} 4x+y-z+11=0, \\ x=30+4t, \\ y=24+t, \\ z=-61-t. \end{cases}$$

Для этого подставим три последних уравнения в первое. В результате получим уравнения от одного неизвестного t

$$4(30+4t)+(24+t)-1(-61-t)+11=0,$$

решая его относительно t, найдем $t=-12$. Подставив полученное значение параметра t в уравнения прямой, получим координаты точки P:

$$x_P=30-48=-18,$$

$$y_P=24-12=12,$$

$$z_P=-61+12=-49.$$

Так как P есть середина отрезка $[MN]$, то координаты x_N, y_N, z_N точки N найдем из формул

$$x_P=\frac{x_M+x_N}{2},\quad y_P=\frac{y_M+y_N}{2},\quad z_P=\frac{z_M+z_N}{2}.$$

Ответ: $N(-30;\ 18;\ -91)$.

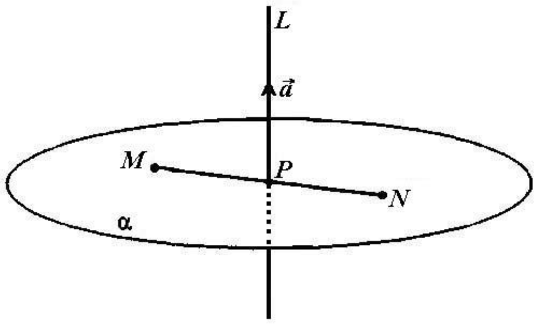


Рис. 29

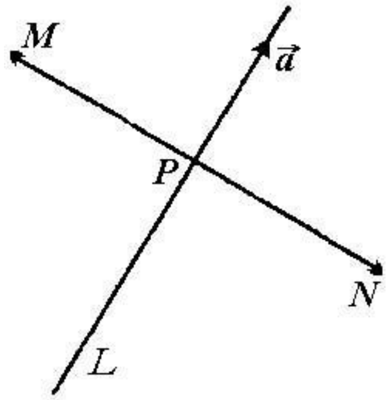


Рис. 30

2 способ. Пусть координаты точки P получены из параметрических уравнений прямой L при значении $t=t_1$, то есть

$$x_P=30+4t_1,\ y_P=24+t_1,\ z_P=-61-t_1. \qquad (43)$$

Вектор

$$\overrightarrow{PM}=\{x_M-x_P,\quad y_M-y_P,\quad z_M-z_P\}=\{-6-30-4t_1,\quad 6-24-4t_1,\quad -7+61+t_1\}=$$
$$=\{-36-4t_1,\quad -18-4t_1,\quad 54+t_1\},$$ перпендикулярен направляющему

вектору $\vec{a}=\{4;\quad 1;\quad -1\}$ прямой L (см. рис. 30). Следовательно, $(\vec{a},\ \overrightarrow{PM})=0$ или в координатной форме

$$4(-36-4t_1)+1(-18-t_1)-1(54+t_1)=0.$$

Отсюда, t_1=–12.

Подставим найденное значение параметра t_1 в уравнения (43), найдем координаты точки P

$$x_P=30+4(-12)=-18,\ y_P=12,\ z_P=-49.$$

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{PM}$. В координатной форме это равенство запишется в виде:

$$\{x_M-x_N,\quad y_M-y_N,\quad z_M-z_N\}=2\{x_M-x_P,\quad y_M-y_P,\quad z_M-z_P\},$$

которое эквивалентно равенству

$$\{x_M,\quad y_M,\quad z_M\}-\{x_N,\quad y_N,\quad z_N\}=\{x_M,\quad y_M,\quad z_M\}-\{2x_P-x_M,\quad 2y_P-y_M,\quad 2z_P-z_M\}$$

или $\{x_N,\quad y_N,\quad z_N\}=\{2x_P-x_M,\quad 2y_P-y_M,\quad 2z_P-z_M\}$.

Два вектора равны тогда и только тогда, когда их координаты равны. Следовательно, верны равенства

$$x_N=2x_P-x_M,$$

$$y_N=2y_P-y_M,$$

$$z_N=2z_P-z_M.$$

Подставив в последние выражения координаты точек P и M, получим

$$x_N=-30,\ y_N=18,\ z_N=91.$$

Ответ: $N(-30;\ 18;\ -91)$.

Задача 10. Даны точки $A(4;\ -8;\ 11)$ и $B(-4;\ 4;\ -1)$. На плоскости α:

$$3x+y-z-59=0$$

найти точку P такую, что длина ломаной APB была наименьшей.

Решение:

Определим по одну или по разные стороны плоскости α находятся точки A и B. Для этого подставим координаты точек в левую часть уравнения плоскости α:

$$\alpha(A)=3\cdot4-8-11-59<0,$$

$$\alpha(B)=3\cdot(-4)+4-(-1)-59<0.$$

Так как результат подстановки в обоих случая меньше нуля, делаем вывод, что данные точки находятся в отрицательном полупространстве (см. п.6 §1). Это означает, что точки A и B находятся по одну сторону от плоскости.

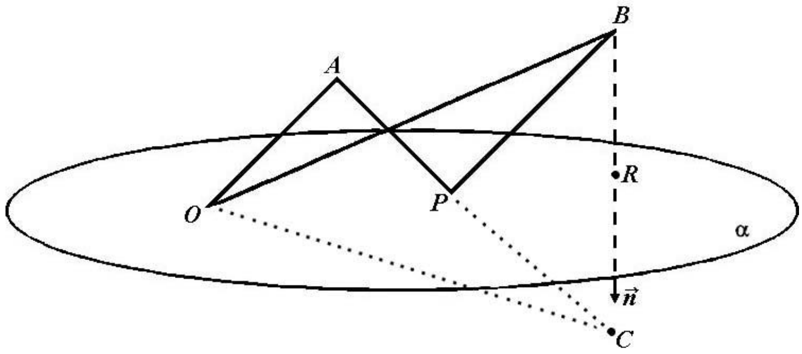


Рис. 31

Пусть точка C симметрична точке B относительно плоскости α и точка P есть пересечение прямой AC с данной плоскостью, тогда

$$|AP| + |PB| = |AP| + |PC| < |AO| + |OC| = |AO| + |OB| \qquad (44)$$

(см. рис. 31), где O произвольная точка плоскости отличная от P. Следовательно, точка P является искомой точкой.

1 способ. 1) Найдем координаты точки C.

Рассмотрим прямую BC. В качестве направляющего вектора этой прямой можно взять нормальный вектор $\vec{n} = \{3;\ \ 1;\ \ -1\}$ плоскости α. Тогда с учетом, что прямая BC проходит через точку $B(-4;\ 4;\ -1)$, ее параметрические уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = -4 + 3t, \\ y = 4 + t, \\ z = -1 - t. \end{cases}$$

Определим точку R, которая является пересечением плоскости α и прямой BC. Ее координаты должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} 3x + y - z - 59 = 0, \\ x = -4 + 3t, \\ y = 4 + t, \\ z = -1 - t. \end{cases}$$

Подставив правые части последних трех уравнений системы в первое и произведя преобразования, получим:

$$11t - 66 = 0,$$

тогда t=6.

Полученное значение t подставим в параметрические уравнения прямой BC и найдем координаты точки R:

$$x_R=14,\ y_R=10,\ z_R=-7.$$

Так как точка R является серединой отрезка BC, то координаты точки C – x_C , y_C , z_C найдем из формул

$$x_R = \frac{x_B + x_C}{2}, \quad y_R = \frac{y_B + y_C}{2}, \quad z_R = \frac{z_B + z_C}{2}.$$

где x_B, y_B, z_B и x_R, y_R, z_R соответственно координаты точек B и R. Тогда

$$x_C=32, \quad y_C=16,\ z_C=-13.$$

2) Найдем координаты точки P.

Так как $\overrightarrow{AC} = \{28; \quad 24; \quad -24\}$, то в качестве направляющего вектора прямой AC можно взять вектор $\overrightarrow{AC} = \{7; \quad 6; \quad -6\}$, тогда параметрическое прямой AC будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} x = 4 + 7t, \\ y = -8 + 6t, \\ z = 11 - 6t. \end{cases}$$

Координаты точки P как и в случае с точкой R находятся из системы:

$$\begin{cases} 3x + y - z - 59 = 0, \\ x = 4 + 7t, \\ y = -8 + 6t, \\ z = 11 - 6t. \end{cases}$$

Решением которой является

$$t=2,\ x_P=18,\ y_P=4,\ z_P=-1.$$

Ответ: P(18; 4; –1).

2 способ. Пусть точка K и точка R ортогональные проекции точки A и точки B на плоскость α. Тогда треугольник APK и треугольник BPR подобны с коэффициентом подобия

$$\lambda = \frac{|AK|}{|BR|}. \text{ (см. рис. 32).}$$

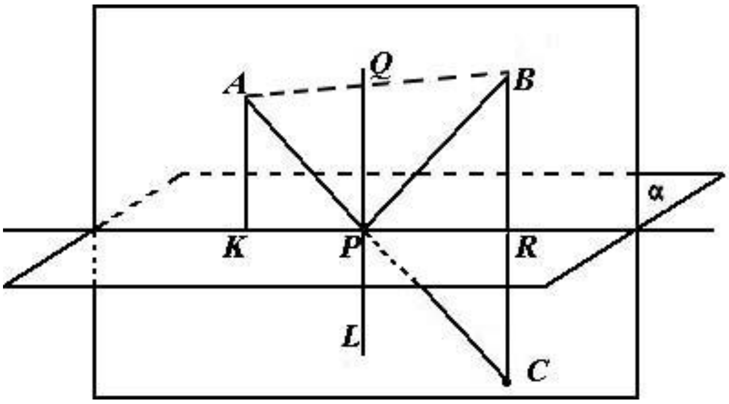


Рис. 32

Длина отрезка [*AK*] есть расстояние от точки *A* до плоскости α, которое можно вычислить по формуле (15) §1, то есть

$$|AK| = \rho(A,\alpha) = \left|\frac{3\cdot 4 + 1\cdot(-8) - 1\cdot 11 - 59}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{66}{|\sqrt{11}|},$$

аналогично

$$|BR| = \rho(B,\alpha) = \left|\frac{3\cdot(-4) + 1\cdot 4 - 1\cdot(-1) - 59}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{66}{|\sqrt{11}|}$$

или $\lambda = 1$.

Опустим в точке *P* к плоскости α перпендикуляр *L*, который пересечет отрезок *AB* в некоторой точке *Q*.

Из теоремы Фалеса следует, что точка *Q* будет делить отрезок *AB* в отношении λ. Тогда координаты точки *Q* найдем по формулам

$$x_Q = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{4-4}{2} = 0,\ \ y_Q = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{-8+4}{2} = -2,\ \ z_Q = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{11-1}{2} = 5.$$

Так как нормальный вектор $\vec{n} = \{3;\ \ 1;\ \ -1\}$ плоскости α параллелен прямой *L*, то ее параметрические уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = -2 + t, \\ z = 5 - t. \end{cases}$$

Координаты точки *P* найдем из системы

$$\begin{cases} 3x + y - z - 59 = 0, \\ x = 3t, \\ y = -2 + t, \\ z = 5 - t. \end{cases}$$

t=2, x_P=18, y_P=4, z_P=–1.

Ответ: P(18; 4; –1).

Задача 11. Найти общий перпендикуляр к прямым

L_1: $x=2t$; $y=3t$; $z=-3+4t$ и L_2: $x=-4t$; $y=2t$; $z=2-t$.

Решение:

Пусть α – плоскость, проходящая через прямую L_2 параллельно прямой L_1. В качестве нормального вектора к этой плоскости можно взять вектор $\vec{n}_\alpha = [\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2]$, где $\vec{a}_1 = \{2; \quad 3; \quad 4\}$ и $\vec{a}_2 = \{-4; \quad 2; \quad -1\}$ – направляющие векторы прямых L_1, L_2 (см. рис. 33).

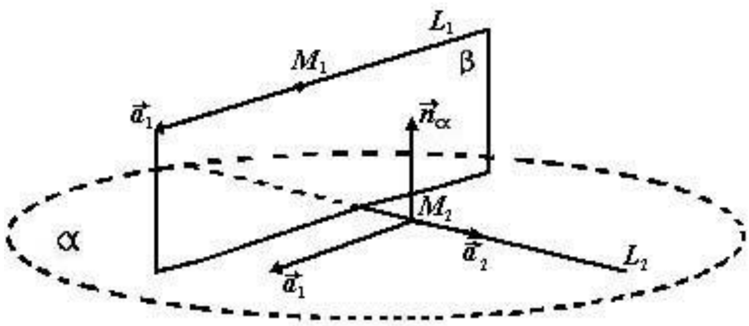


Рис. 33.

Тогда $\vec{n}_\alpha = \{-11; \quad -14; \quad 16\}$.

Через прямую L_1 проведем плоскость β перпендикулярно плоскости α. Так как она проходит через точку M_1(0; 0; –3) (см. параметрические уравнения прямой L_1) и параллельна двум неколлинеарным векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{n}_\alpha$, то ее уравнение запишется в виде (см. (4) §1):

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z+3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -11 & -14 & 16 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 104x-76y+5z+15=0.$$

Аналогично находится уравнение плоскости γ, перпендикулярной α и проходящей через L_2 (см. рис. 34)

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-2 \\ -4 & 2 & -1 \\ -11 & -14 & 16 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 6x+25y+26z-52=0.$$

Искомый общий перпендикуляр P к прямым L_1, L_2 пересекает L_1 и перпендикулярен плоскости α, следовательно, $P \in \beta$. Аналогично показывается, что $P \in \gamma$. То есть P является пересечением плоскостей β и γ и определяется системой уравнений

$$\begin{cases} 104x - 76y + 5z + 15 = 0, \\ 6x + 25y + 26z - 52 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} 104x - 76y + 5z + 15 = 0, \\ 6x + 25y + 26z - 52 = 0. \end{cases}$

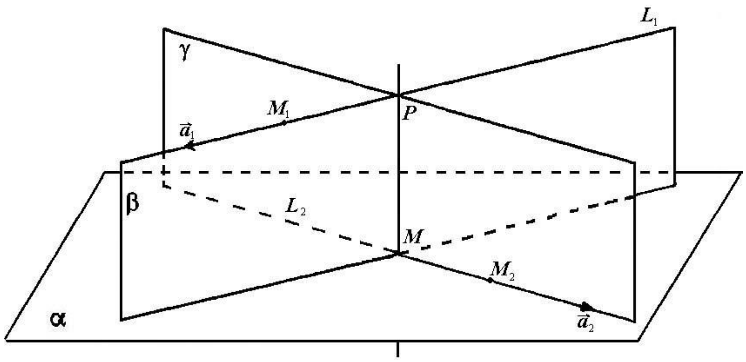


Рис. 34

2 способ. Найдем параметрические уравнения общего перпендикуляра P. Координаты точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$, являющейся пересечением плоскости β и прямой L_2 (см. рис. 34), найдем из системы:

$$\begin{cases} 104x - 76y + 5z + 15 = 0, \\ x = -4t, \\ y = 2t, \\ z = 2 - t. \end{cases}$$

Решением которой является

$$t = \frac{25}{573};\ x_M = \frac{-100}{573};\ y_M = \frac{25}{573};\ z_M = \frac{1121}{573}.$$

Очевидно, что общий перпендикуляр проходит через точку M и его направляющим вектором будет нормальный вектор $\vec{n}_\alpha$ плоскости α. Тогда параметрические уравнения прямой *P* запишутся в виде:

$$x=\frac{-100}{573}-11t;\; y=\frac{25}{573}-14t;\; z=\frac{1121}{573}+16t.$$

Ответ: $x=\frac{-100}{573}-11t;\; y=\frac{25}{573}-14t;\; z=\frac{1121}{573}+16t.$

Задача 12. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(0; -4; -2)$ и пересекающей две прямые

$$L_1:\begin{cases}x=5+5t,\\ y=-2+t,\\ z=1-t\end{cases}\quad \text{и}\quad L_2:\begin{cases}x=17-4t,\\ y=-10+3t,\\ z=2+t.\end{cases}$$

Решение:

Обозначим через P_1 и P_2 точки пересечения прямой L с прямыми L_1 и L_2, (см. рис. 35).

Пусть координаты точек $P_1(x_1; y_1; z_1)$ и $P_2(x_2, y_2, z_2)$ получаются из параметрических уравнений прямых при $t=t_1$ и $t=t_2$ соответственно.

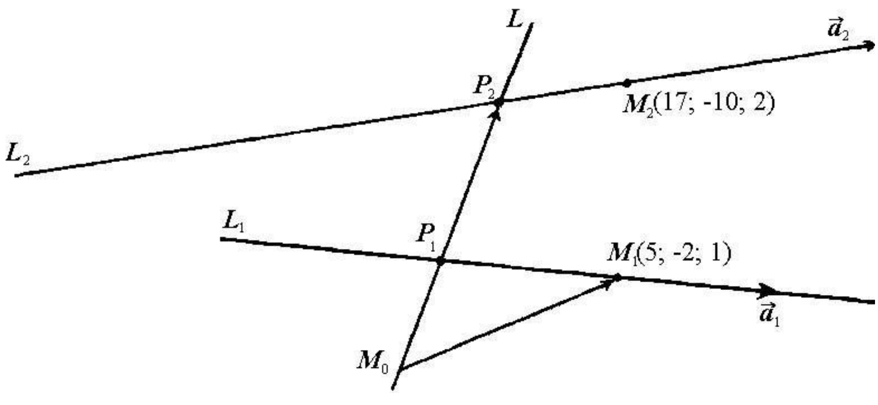


Рис. 35

То есть $\begin{cases}x_1=5+5t_1,\\ y_1=-2+t_1,\\ z_1=1-t_1\end{cases}$ и $\begin{cases}x_2=17-4t_2,\\ y_2=-10+3t_2,\\ z_2=2+t_2.\end{cases}$

Тогда

$$\overrightarrow{M_0P_1}=\{5+5t_1;\quad 2+t_1;\quad 3-t_1\} \tag{45}$$

и

$$\overrightarrow{M_0P_2} = \{17 - 4t_2; \quad -6 + 3t_2; \quad 4 + t_2\} \tag{46}$$

1 способ. Вектор $\overrightarrow{M_0P_2}$ возьмем в качестве направляющего вектора прямой L, параметрические уравнения, которой запишутся в виде:

$$\begin{cases} x = (17 - 4t_2)t, \\ y = -4 + (-6 + 3t_2)t, \\ z = -2 + (4 + t_2)t. \end{cases} \tag{47}$$

Прямые L_1 и L пересекаются и, следовательно, удовлетворяют условию принадлежности двух прямых одной плоскости п. 16 §1

$$\left(\overrightarrow{M_0M_1}, \quad \vec{a}_1, \quad \overrightarrow{M_0P_2}\right) = 0, \tag{48}$$

где $M_1(5; -2; 1) \in L_1$, вектор $\vec{a}_1 = \{5; \quad 1; \quad -1\}$ – направляющий вектор прямой L_1. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = \{5; \quad 2; \quad 3\}$, то (48) в координатной форме запишется в виде (29) §1:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -1 \\ 17 - 4t_2 & -6 + 3t_2 & 4 + t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая данное уравнение, получим t_2=3. Подставив значение (47), найдем параметрические уравнения прямой L:

$$\begin{cases} x = 5t, \\ y = -4 + 3t, \\ z = -2 + 7t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 5t, \\ y = -4 + 3t, \\ z = -2 + 7t. \end{cases}$

Замечание. Вместо векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{a}_1$, $\overrightarrow{M_0P_2}$ можно рассматривать вектора $\overrightarrow{M_0M_2}$, $\vec{a}_2$, $\overrightarrow{M_0P_1}$, но в этом случае значение t_1 может оказаться дробным.

2 способ. Через прямые L_1 и L_2 проведем параллельные друг другу плоскости α и β. В качестве нормального вектора обоих плоскостей можно взять вектор

$$\vec{n} = [\vec{a}_1, \quad \vec{a}_2] = \{4; \quad -1; \quad 19\}.$$

Так как плоскость α проходит через $M_1(5; -2; 1)$, то ее уравнение запишется как уравнение (3) § 1:

$$4(x-5)-(y+2)+19(z-1)=0, \tag{49}$$

аналогично уравнение плоскости β:

$$4(x-17)-(y+10)+19(z-2)=0. \tag{50}$$

Определим расположение точки M_0 относительно плоскостей α и β. Для этого подставим координаты точки M_0 в левые части уравнений (49) и (50). Получим

$$\alpha(M_0) = -75 < 0 \text{ и } \beta(M_0) = -150 < 0. \tag{51}$$

Следовательно, точка M_0 расположена как на рис. 36 (см. п.6 §1). Тогда векторы $\overrightarrow{M_0P_1}$ и $\overrightarrow{M_0P_2}$ коллинеарны и их соответствующие координаты (45), (46) пропорциональны, то есть

$$\frac{17-4t_2}{5+5t_1} = \frac{-6+3t_2}{2+t_1} = \frac{4+t_2}{3-t_1} = S. \tag{52}$$

Найдем S. Пусть точка Q и точка R ортогональные проекции точки M_0 на плоскости α и β, тогда треугольники M_0QP_1 и M_0RP_2 подобны с коэффициентом подобия $\lambda = \frac{|M_0R|}{|M_0Q|}$, так как длина отрезка M_0R равна расстоянию от точки M_0 до плоскости β, то по формуле (15) §1 имеем

$$|M_0R| = \rho(M_0,\ \beta) = \frac{|\beta(M_0)|}{|\vec{n}|}.$$

Аналогично для отрезка

$$|M_0Q| = \rho(M_0,\ \alpha) = \frac{|\alpha(M_0)|}{|\vec{n}|},$$

$$\lambda = \frac{|\beta(M_0)|}{|\alpha(M_0)|} = \frac{150}{75} = 2.$$

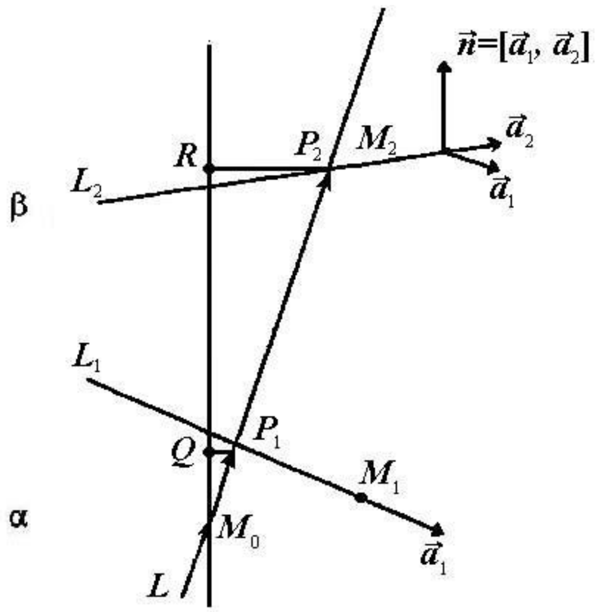


Рис. 36

Очевидно, что $\lambda = |S|$. Так как векторы $\overrightarrow{M_0P_1}$ и $\overrightarrow{M_0P_2}$ сонаправлены, то $S>0$. Следовательно, $S = \lambda$.

Из уравнений (52) можно составить систему

$$\begin{cases} \dfrac{-6+3t_2}{2+t_1}=2, \\ \dfrac{4+t_2}{3-t_1}=2, \end{cases}$$

решением которой является $t_1=-\dfrac{1}{2}$, $t_2=3$.

Подставив $t_2=3$ в (46), получим вектор $\overrightarrow{M_0P_2}=\{5;\ \ 3;\ \ 7\}$. Прямая L параллельна вектору $\overrightarrow{M_0P_2}$ и проходит через точку M_0, поэтому ее параметрические уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} x=5t, \\ y=-4+3t, \\ z=-2+7t. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x=5t, \\ y=-4+3t, \\ z=-2+7t. \end{cases}$

Замечание. Уравнение искомой прямой также можно определить как пересечение двух плоскостей, проходящих через точку M_0 и содержащих соответственно прямые L_1 и L_2.

Задача 13. Прямые L_1 и L_2 с направляющим вектором $\vec{a}=\{1;\ \ -1;\ \ 1\}$ проходят соответственно через точки $M_1(4;\ 1;\ 1)$ и $M_2(-2;\ -1;\ 1)$. Найти уравнение плоскости α, равноудаленной от данных прямых и перпендикулярной плоскости, проходящей через прямые L_1 и L_2.

Решение:

Пусть точка M_0 является серединой отрезка $[M_1M_2]$. Координаты x_0, y_0, z_0 точки M_0, найдем из формул

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=1,\ y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=0,\ z_0=\frac{z_1+z_2}{2}=1,$$

где x_1, y_1, z_1 координаты точки M_1 и x_2, y_2, z_2 координаты точки M_2.

Тогда $\overrightarrow{M_1M_0} = \{-3; \quad -1; \quad 0\}$.

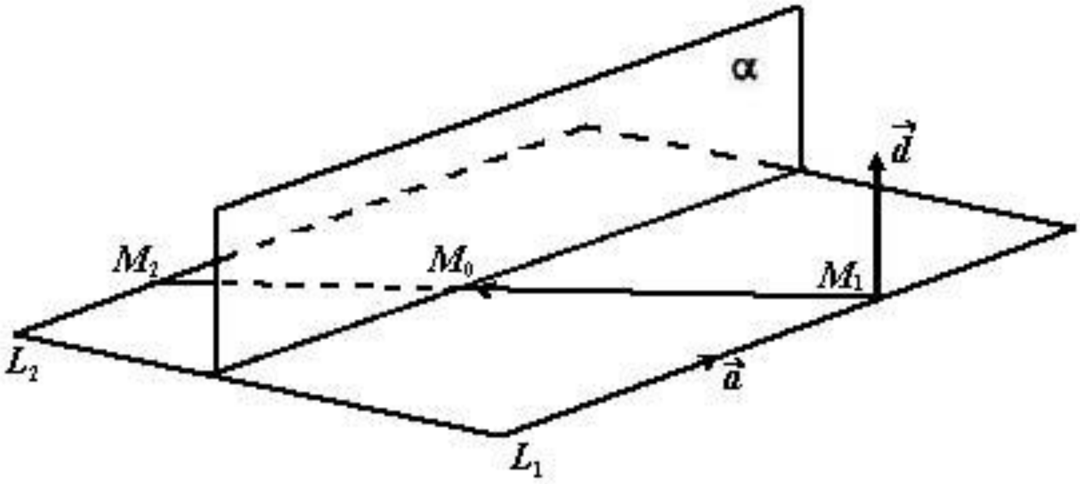


Рис. 37

Очевидно, что плоскость α проходит через точку M_0 параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{d} = \left[\overrightarrow{M_1M_0}, \quad \vec{a}\right] = \{-1; \quad 3; \quad 4\}$(см. рис. 37).

Воспользуемся уравнением (4) §1 $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Раскрывая определитель получим искомое уравнение плоскости

$$-7x-5y+2z+5=0.$$

Ответ: $-7x-5y+2z+5=0$.

Задача 14. Точки $A(2; -1; 1)$, $B(1; 1; 3)$ являются вершинами пирамиды $ABCD$. Известно, что грань ABC лежит в плоскости α: $8x-y+5z-22=0$. Ребра $[AD]$ и $[BD]$ лежат соответственно на прямых

$$AD: \begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -1 + t, \\ z = 1 \end{cases} \text{ и } BD: \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + t, \\ z = 3 + 2t. \end{cases}$$

Ребро $[CD]$ перпендикулярно ребрам $[AD]$ и $[BD]$. Найти вершины D и С.

Решение:

1) Точку D найдем, как точку пересечения прямых AD и BD (см. рис. 38). Допустим, что координаты x_D, y_D, z_D точки D получаются из параметрических

уравнений прямой AD при t=t_2 и из параметрических уравнений прямой BD при t=t_2, то есть

$$\begin{cases} x_D = 2 - t_1, \\ y_D = -1 + t_1, \\ z_D = 1 \end{cases} \quad (53) \qquad \text{и} \qquad \begin{cases} x_D = 1, \\ y_D = 1 + t_2, \\ z_D = 3 + 2t_2. \end{cases} \quad (54)$$

Приравнивая правые части (53) и (54), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 - t_1 = 1, \\ -1 + t_1 = 1 + t_2, \\ 1 = 3 + 2t_2. \end{cases}$$

Выберем из них любые два линейно–независимых уравнения.

Например:

$$\begin{cases} 2 - t_1 = 1, \\ -1 + t_1 = 1 + t_2. \end{cases}$$

Из полученной системы найдем неизвестные

t_1=1 и t_2=–1. (55)

Подставив значение t_1 в равенства (53), получим координаты точки D:

x_D=1; y_D=0; z_D=1.

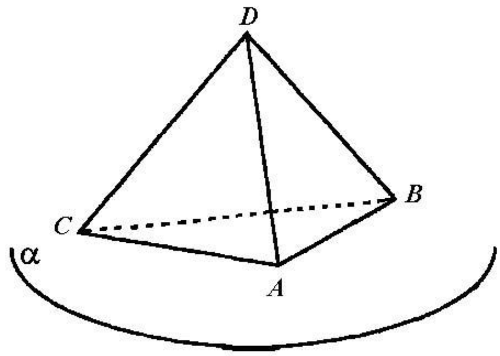


Рис. 38

2) Найдем точку C. По условию задачи ребро [CD] перпендикулярно направляющим векторам $\vec{a}_1 = \{-1;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{a}_2 = \{0;\ 1;\ 2\}$ прямых AD и BD. Поэтому направляющим вектором прямой CD может служить вектор $\vec{d} = [\vec{a}_1,\ \vec{a}_2] = \{2;\ 2;\ -1\}$. Параметрические уравнения прямой CD запишем в виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 0 + 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Так как точка C является пересечением прямой CD и плоскости α, то ее координаты должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} 8x - y + 5z - 22 = 0, \\ x = 1 + 2t, \\ y = 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Решением которой является t=1, x=3, y=2, z=0.

Ответ: $D(1; 0; 1)$, $C(3; 2; 0)$.

Замечание. Из условия нашей задачи ясно, что пересечение прямых AD и BD существует и является точкой D. В случаях, когда существование точки пересечения не гарантировано, нужно дополнительно подставить найденные значения параметра t_1 (см. (55)) в равенства (54). Если левые части равенств (53) и (54) совпадут, то полученные координаты являются координатами точки пересечения. В противоположном случае – прямые не пересекаются.

Задача 15. Найти точку P, являющейся пересечением ортогональных проекций прямых

$$L_1: \begin{cases} x = -4 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = -1 \end{cases} \quad \text{и} \quad L_2: \begin{cases} x = -t, \\ y = -1, \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

на плоскость $\alpha: 2x-y+z-12=0$.

Решение:

1 способ: Проведем через прямую L_2 плоскость β перпендикулярно плоскости α (см. рис. 39).

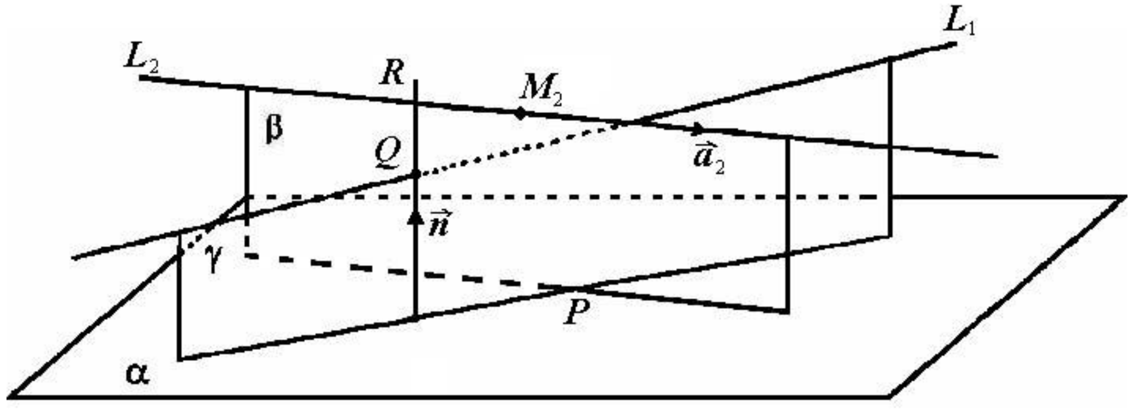


Рис. 39

Направляющий вектор $\vec{a}_2 = \{-1; \quad 0; \quad 1\}$ прямой L_2 и нормальный вектор $\vec{n} = \{2; \quad -1; \quad 1\}$ плоскости α параллельны плоскости β. Точка $M_2(0; -1; 3)$ по условию задачи принадлежит прямой L_2. Следовательно, плоскость β проходит через нее. Пользуясь уравнением (4) §1, представим уравнение плоскости β в виде:

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z-3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x+3y+z=0.$$

Найдем точку Q, являющейся пересечением прямой L_1 и плоскости β из системы

$$\begin{cases} x+3y+z=0, \\ x=-4+2t, \\ y=-2+3t, \\ z=-1. \end{cases}$$

Решая данную систему, получим $t=1$, $x=-2$, $y=1$, $z=-1$. Таким образом, точкой пересечения прямой L_1 и плоскости β служит точка $Q(-2; 1; -1)$. Заметим, что перпендикуляр L_P к плоскости α выходящий из точки P, являющейся пересечением проекций, параллелен вектору $\vec{n} = \{2; \quad -1; \quad 1\}$ и проходит через точку Q. В силу этого параметрические уравнения прямой L_P примут вид

$$\begin{cases} x=-2+2t, \\ y=1-t, \\ z=-1+t. \end{cases}$$

Искомая точка P служит основанием перпендикуляра L_P к плоскости α. Поэтому ее координаты $x_P=4$; $y_P=-2$; $z_P=2$ находятся из системы

$$\begin{cases} 2x-y+z-12=0, \\ x=-2+2t, \\ y=1-t, \\ z=-1+t. \end{cases}$$

Ответ: $P(4; -2; 2)$.

2 способ. Аналогично как и для плоскости β, найдем уравнение:

$$3x-2y-8z=0$$

плоскости γ, проходящей через прямую L_1 перпендикулярно плоскости α. Точка P является пересечением трех плоскостей α, β и γ. В силу этого, координаты точки P x_P=4; $y_P = -2$; z_P=2 находятся из системы

$$\begin{cases} 2x - y + z - 12 = 0, \\ x + 3y + z = 0, \\ 3x - 2y - 8z = 0. \end{cases}$$

Ответ: P(4; –2; 2).

§ 3. Индивидуальные задания

Задача 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через одну из осей координат и точку M:

1. Ось Оx; M (0; –2; 6).
2. Ось Oz, M (2, –3, –3).
3. Ось Ox, M (–7; 1; 4).
4. Ось Oz, M(–2; 1; –2).
5. Ось Ox, M(–4; –8; 1).
6. Ось Oy, M(–5; 6; –9).
7. Ось Oy, M(–2; –2; 7).
8. Ось Ox, M(–5; –9; –3).
9. Ось Oz, M(–9; –7; 1).
10. Ось Oy, M(–5; –6; 0).
11. Ось Ox, M(8; 2; –9).
12. Ось Ox, M(2; 5; 2).
13. Ось Oy, M(–8; 6; 7).
14. Ось Ox, M(8;–1; 0).
15. Ось Oz, M(6; 5; 3).
16. Ось Оy, M(3; –6; –3).
17. Ось Oy, M(7;–5;–4).
18. Ось Ox, M(–8; –1; 4).
19. Ось Oz, M(5; 0;–8).
20. Ось Ox, M(–2;–7; 6).
21. Ось Ox, M(9; 1;–3).
22. Ось Ox, M(8; –6; 6)
23. Ось Oy, M(9;–3; 9).
24. Ось Oz, M(4; 8; –1).
25. Ось Oy, M(1; –4; 8).
26. Ось Ox, M(6; –5; 4).
27. Ось Ox, M(6; –6;–5).
28. Ось Oz, M(–1; 8; –4).
29. Ось Оy, M(4; –4;–8).
30. Ось Oz, M(3; –8;–2).
31. Ось Oy, M(–8; 3; –7).
32. Ось Oz, M(6; –7; –1).
33. Ось Ox, M(2; –4;–1).
34. Ось Ox, M(8; 8; –9).
35. Ось Oy, M(8; 2; 5).
36. Ось Ox, M(1; –3; 5).
37. Ось Oy, M(2; 7; 7).
38. Ось Ox, M(–8; 2; –6).
39. Ось Oy, M(1; 4; 0).
40. Ось Ox, M(–5; 8; 4).

Задача 2. Плоскость параллельна вектору L и отсекает на координатных осях Ox, Oy и Oz отрезки величиной a, b, c. Найти уравнение плоскости, если:

1. L={–6; 5; 4}; $b = -5$; $c = -2$.

21. L={6; 12; –4}; a=3; $c = -4$.

2. $L=\{-25;\ 14;\ -4\}$; $a=-5$; $c=-2$.

3. $L=\{5;\ 9;\ 40\}$; $a=-1$; $b=-3$.

4. $L=\{-20;\ 3;\ -16\}$; $a=-4$; $c=4$.

5. $L=\{6;\ 8;\ -10\}$; $a=2$; $c=2$.

6. $L=\{-10;\ -4;\ -16\}$; $a=2$; $b=-4$.

7. $L=\{-10;\ -10;\ 28\}$; $a=5$; $b=2$.

8. $L=\{-4;\ 18;\ 4\}$; $a=1$; $c=-2$.

9. $L=\{3; -2; -20\}$; $a=1$; $b=-1$.

10. $L=\{8;\ -5;\ 5\}$; $a=-2$; $b=5$.

11. $L=\{-12;\ 4;\ -20\}$; $b=2$; $c=-5$.

12. $L=\{-16;\ 21;\ 9\}$; $a=-4$; $c=3$.

13. $L=\{-4;\ -12;\ 5\}$; $b=-3$; $c=-1$.

14. $L=\{4;\ -15;\ -6\}$; $a=-4$; $b=3$.

15. $L=\{2;\ 20;\ -24\}$; $a=-1$; $b=-5$.

16. $L=\{8;\ 5;\ -6\}$; $a=2$; $b=-5$.

17. $L=\{2;\ -12;\ -15\}$; $b=3$; $c=-5$.

18. $L=\{6;\ -8;\ -28\}$; $a=2$; $b=-2$.

19. $L=\{3;\ -6;\ 4\}$; $b=-2$; $c=-1$.

20. $L=\{-12;\ 6;\ 20\}$; $b=-3$; $c=4$.

22. $L=\{-12;\ 12;\ 2\}$; $b=3$; $c=1$.

23. $L=\{2;\ 3;\ -2\}$; $a=-2$; $b=1$.

24. $L=\{8;\ -8;\ 16\}$; $a=-2$; $b=2$.

25. $L=\{-15;\ -16;\ 2\}$; $a=5$; $c=-2$.

26. $L=\{20;\ 25;\ 2\}$; $b=5$; $c=-2$.

27. $L=\{4;\ 16;\ 25\}$; $a=4$; $b=4$.

28. $L=\{-3;\ -10;\ -10\}$; $a=-1$; $c=2$.

29. $L=\{-8;\ -10;\ 12\}$; $b=2$; $c=4$

30. $L=\{4;\ 12;\ 12\}$; $b=-3$; $c=4$.

31. $L=\{-4;\ -12;\ 15\}$; $b=4$; $c=3$.

32. $L=\{-5;\ 25;\ -4\}$; $a=5$; $b=5$.

33. $L=\{6;\ 3;\ -5\}$; $a=3$; $b=-1$.

34. $L=\{9;\ 1;\ 8\}$; $a=-3$; $c=4$.

35. $L=\{-9;\ 4;\ 8\}$; $b=-4$; $c=2$.

36. $L=\{4;\ 15;\ -21\}$; $a=-1$; $b=-5$.

37. $L=\{-16;\ -24;\ -6\}$; $a=4$; $c=3$.

38. $L=\{-15;\ 24;\ -10\}$; $a=-5$; $c=-2$.

39. $L=\{4;\ -20;\ -16\}$; $b=4$; $c=-4$.

40. $L=\{12;\ 12;\ -14\}$; $a=3$; $b=4$.

Задача 3. Найти проекцию прямой L на плоскость γ:

1. L: $\begin{cases} -x+2y-5z-2=0, \\ -3x-4y-6z-3=0, \end{cases}$ γ: $x+y+2z+1=0$.

2. L: $\begin{cases} -3x-2y+2z-2=0, \\ 3x+7y-7z+1=0, \end{cases}$ γ: $-2x+y+z+5=0$.

3. L: $\begin{cases} -7x+5y-5z-3=0, \\ 4x-4y+3z-4=0, \end{cases}$ γ: $-6x+2y+4z-7=0$.

4. L: $\begin{cases} 2x-2y-3z-3=0, \\ -2x+2y+3z+1=0, \end{cases}$ γ: $-5x+5y-5z+7=0$.

5. L: $\begin{cases} x-3y-z-2=0, \\ -x-5y-3z+2=0, \end{cases}$ γ: $-3x-5y-6z+4=0$.

21. L: $\begin{cases} -5x+4y-6z-5=0, \\ -6x+y-z+6=0, \end{cases}$ γ: $2x+y-2z-1=0$.

22. L: $\begin{cases} -2x-5y-2z+6=0, \\ -3x+2y+3z+1=0, \end{cases}$ γ: $-x-5y+3z-7=0$.

23. L: $\begin{cases} 4x-4y+7z+1=0, \\ x+4y+3z+6=0, \end{cases}$ γ: $-4x-6y+z-4=0$.

24. L: $\begin{cases} 4x+3y-z-7=0, \\ 6x-4y+z-1=0, \end{cases}$ γ: $-7x-7y+2z+2=0$.

25. L: $\begin{cases} -7x+5y+2z-6=0, \\ 2x-2y+2z+1=0, \end{cases}$ γ: $-3x+2y+4z+1=0$.

6. L: $\begin{cases} x+y+3z+5=0, \\ 5x+4y-7z-2=0, \end{cases}$ γ: $-5x+y+6z-2=0$.

7. L: $\begin{cases} x+6y+4z-2=0, \\ 7x-4y+7z+6=0, \end{cases}$ γ: $2x-5y+2z-6=0$.

8. L: $\begin{cases} 3x-4y+6z-1=0, \\ 2x-3y+7z-2=0, \end{cases}$ γ: $-3x+4y+6z+4=0$.

9. L: $\begin{cases} 4x-4y-3z+6=0, \\ 2x-6y-3z-1=0, \end{cases}$ γ: $5x-5y-5z+6=0$.

10. L: $\begin{cases} -x-2y+2z-1=0, \\ 4x+2y-3z+4=0, \end{cases}$ γ: $3x-6y+5z+4=0$.

11. L: $\begin{cases} x-y-5z-6=0, \\ -5x-4y+z+3=0, \end{cases}$ γ: $x+3y-2z-3=0$.

12. L: $\begin{cases} -3x-7y-5z+4=0, \\ -3x-4y-4z-2=0, \end{cases}$ γ: $4x-7y+5z-3=0$.

13. L: $\begin{cases} 5x-5y+2z+1=0, \\ -6x+2y+5z+2=0, \end{cases}$ γ: $2x-3y+5z-3=0$.

14. L: $\begin{cases} -4x+2y+5z-5=0, \\ 5x-7y-6z+4=0, \end{cases}$ γ: $6x+4y+6z-1=0$.

15. L: $\begin{cases} -x+5y+z+5=0, \\ 3x+6y+z-4=0, \end{cases}$ γ: $6x-3y-7z-1=0$.

16. L: $\begin{cases} 5x+y-z+1=0, \\ -x-5y-5z-5=0, \end{cases}$ γ: $-x+7y-6z-5=0$.

17. L: $\begin{cases} -2x-7y-2z-5=0, \\ -3x+6y+2z+6=0, \end{cases}$ γ: $2x-3y+3z-2=0$.

18. L: $\begin{cases} -4x+7y-7z+1=0, \\ 5x-7y+5z+3=0, \end{cases}$ γ: $-x+4y+2z-5=0$.

19. L: $\begin{cases} 6x+y-2z+2=0, \\ -x+y+7z+5=0, \end{cases}$ γ: $3x+4y-3z-1=0$.

20. L: $\begin{cases} -7x-7y-3z+4=0, \\ -3x-6y+4z+1=0, \end{cases}$ γ: $-4x+2y+6z+5=0$.

26. L: $\begin{cases} -x+2y-z-2=0, \\ 4x-y+4z-6=0, \end{cases}$ γ: $3x-6y-5z+3=0$.

27. L: $\begin{cases} -x+4y+2z-5=0, \\ -6x-y+3z-4=0, \end{cases}$ γ: $-3x+y-z+3=0$.

28. L: $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0, \\ -7x-y-3z+5=0, \end{cases}$ γ: $-4x-7y+6z+2=0$.

29. L: $\begin{cases} x+4y+3z-6=0, \\ 4x+3y-3z-5=0, \end{cases}$ γ: $-3x-6y-3z+5=0$.

30. L: $\begin{cases} -2x+2y-5z+4=0, \\ -3x+2y+6z+3=0, \end{cases}$ γ: $-3x+3y+3z-4=0$.

31. L: $\begin{cases} 3x+4y+3z+7=0, \\ -5x-2y+5z-2=0, \end{cases}$ γ: $-2x+5y+7z-6=0$.

32. L: $\begin{cases} 2x+7y-2z+2=0, \\ x-4y+2z-2=0, \end{cases}$ γ: $-3x+2y+7z-7=0$.

33. L: $\begin{cases} 5x-y+6z-6=0, \\ -5x+4y+2z+6=0, \end{cases}$ γ: $-7x-2y+6z+5=0$.

34. L: $\begin{cases} -x-5y+7z+2=0, \\ 5x+6y+4z-3=0, \end{cases}$ γ: $-x+3y+2z-4=0$.

35. L: $\begin{cases} -2x-2y-3z-3=0, \\ -7x+6y+3z+4=0, \end{cases}$ γ: $x-2y-z+1=0$.

36. L: $\begin{cases} -2x-y-z+2=0, \\ -5x-3y-3z+1=0, \end{cases}$ γ: $-2x-4y+5z-3=0$.

37. L: $\begin{cases} 6x-4y-7z+1=0, \\ -4x-y+2z-5=0, \end{cases}$ γ: $2x-2y+3z-2=0$.

38. L: $\begin{cases} -7x-y+z+7=0, \\ 4x+4y-4z-3=0, \end{cases}$ γ: $2x-3y+3z+2=0$.

39. L: $\begin{cases} 7x+y+7z-5=0, \\ -6x+y-z-4=0, \end{cases}$ γ: $-7x+5y+5z-2=0$.

40. L: $\begin{cases} 7x-4y+4z-2=0, \\ 2x+5y+6z-3=0, \end{cases}$ γ: $4x+y-4z+7=0$.

Задача 4. Найти плоскость, проектирующую прямую L на координатную плоскость.

1. L: $\begin{cases} -x-7y-5z-9=0, \\ 3x-2y-5z-3=0, \end{cases}$ на Oxy.

2. L: $\begin{cases} -8x+8y-5z-5=0, \\ -7x-2y-9z-9=0, \end{cases}$ на Oyz.

3. L: $\begin{cases} 10x+y+z+7=0, \\ -9x-2y+z+8=0, \end{cases}$ на Oxz.

4. L: $\begin{cases} -7x+10y-z+6=0, \\ 10x-7y+5z+10=0, \end{cases}$ на Oxy.

5. L: $\begin{cases} -x+8y+8z+3=0, \\ 10x-2y-9z-7=0, \end{cases}$ на Oyz.

6. L: $\begin{cases} 2x+2y-6z-7=0, \\ -6x-3y-3z+8=0, \end{cases}$ на Oyz.

7. L: $\begin{cases} -x+4y+5z+2=0, \\ -8x+5y-9z-1=0, \end{cases}$ на Oyz.

8. L: $\begin{cases} -7x-4y-7z-5=0, \\ -3x+2y+5z-4=0, \end{cases}$ на Oxy.

9. L: $\begin{cases} 8x+9y-5z+7=0, \\ -6x+2y-z-10=0, \end{cases}$ на Oxy.

10. L: $\begin{cases} 10x+5y-10z+4=0, \\ -4x+y-z-1=0, \end{cases}$ на Oxy.

11. L: $\begin{cases} 7x-4y-5z-5=0, \\ -7x+6y+4z-9=0, \end{cases}$ на Oxy.

12. L: $\begin{cases} -10x+5y+2z+4=0, \\ -2x-9y+10z-3=0, \end{cases}$ на Oyz.

13. L: $\begin{cases} 10x+y-9z+2=0, \\ 7x+2y+5z-2=0, \end{cases}$ на Oyz.

14. L: $\begin{cases} -4x-6y+6z+9=0, \\ -x-7y-4z+3=0, \end{cases}$ на Oxy.

15. L: $\begin{cases} 9x+8y+9z-8=0, \\ -4x-3y+10z-3=0, \end{cases}$ на Oxy.

16. L: $\begin{cases} -10x-9y+10z+1=0, \\ -x-9y-4z-1=0, \end{cases}$ на Oxz.

21. L: $\begin{cases} -4x+3y-9z+4=0, \\ -x+10y+5z-8=0, \end{cases}$ на Oxy.

22. L: $\begin{cases} -7x-10y-6z+10=0, \\ 10x-7y+9z-5=0, \end{cases}$ на Oxy.

23. L: $\begin{cases} -2x+y-2z+8=0, \\ -7x+9y+z+5=0, \end{cases}$ на Oyz.

24. L: $\begin{cases} -6x-10y+10z+9=0, \\ x+9y-2z-1=0, \end{cases}$ на Oxy.

25. L: $\begin{cases} 5x+9y+3z+8=0, \\ -2x-6y-5z+4=0, \end{cases}$ на Oyz.

26. L: $\begin{cases} 3x-y-4z+5=0, \\ -5x+9y-10z-9=0, \end{cases}$ на Oyz.

27. L: $\begin{cases} -4x-3y+5z+5=0, \\ 9x-4y+8z+7=0, \end{cases}$ на Oyz.

28. L: $\begin{cases} -x-2y+z+1=0, \\ 7x-4y+9z+2=0, \end{cases}$ на Oxy.

29. L: $\begin{cases} -2x+5y-4z+2=0, \\ -7x-5y+9z-8=0, \end{cases}$ на Oyz.

30. L: $\begin{cases} -3x+y+6z+9=0, \\ -10x+y+2z+5=0, \end{cases}$ на Oxy.

31. L: $\begin{cases} 2x+9y+2z-6=0, \\ -10x+3y-4z+7=0, \end{cases}$ на Oxy.

32. L: $\begin{cases} 2x-5y-3z-1=0, \\ -5x-4y+6z-10=0, \end{cases}$ на Oxz.

33. L: $\begin{cases} 4x+7y+3z-10=0, \\ -8x+6y-10z-9=0, \end{cases}$ на Oyz.

34. L: $\begin{cases} -x+9y+3z-5=0, \\ 2x+2y+z-5=0, \end{cases}$ на Oyz.

35. L: $\begin{cases} -2x-9y-5z+4=0, \\ -7x-7y+2z+3=0, \end{cases}$ на Oxy.

36. L: $\begin{cases} 5x+4y+4z-2=0, \\ 3x-5y+8z-5=0, \end{cases}$ на Oxz.

17. L: $\begin{cases} -x-4y-3z-8=0, \\ -8x+3y-8z+6=0, \end{cases}$ на Oxy.

18. L: $\begin{cases} -3x-2y-2z+6=0, \\ 7x-5y-6z-9=0, \end{cases}$ на Oyz.

19. L: $\begin{cases} -x-9y-10z-2=0, \\ -7x+5y-z+10=0, \end{cases}$ на Oyz.

20. L: $\begin{cases} -8x-6y+7z+9=0, \\ 5x+10y+8z+8=0, \end{cases}$ на Oxy.

37. L: $\begin{cases} -5x+6y+6z+6=0, \\ -2x-9y-3z-7=0, \end{cases}$ на Oxy.

38. L: $\begin{cases} -7x+9y+8z-5=0, \\ -5x-10y-10z-9=0, \end{cases}$ на Oxz.

39. L: $\begin{cases} -5x+3y-6z-10=0, \\ -5x+7y+8z-8=0, \end{cases}$ на Oxz.

40. L: $\begin{cases} 6x+7y-10z+3=0, \\ 9x+5y-8z+10=0, \end{cases}$ на Oxy.

Задача 5. Составить уравнение плоскости, делящей пополам тот двугранный угол между двумя плоскостями α и β, в котором лежит точка M:

1. $M(3; 4; 3)$, α: $4x–10y–4z–1=0$ и β: $5x+2y–2z+2=0$.
2. $M(0; 2; 0)$, α: $–4x+4y–4z+3=0$ и β: $2x+2y–2z+1=0$.
3. $M(0; 3; 2)$, α: $–12x–12y–9z+2=0$ и β: $4x–4y–3z+4=0$.
4. $M(3; 1; 4)$, α: $4x–16y+12z+2=0$ и β: $–3x–4y+z–5=0$.
5. $M(0; 0; 0)$, α: $–2x+6y+4z+1=0$ и β : $3x–y+2z+3=0$.
6. $M(4; 1; 1)$, α: $12x–12y+8z–2=0$ и β: $–2x–3y–3z+5=0$.
7. $M(0; 0; 2)$, α: $12x–9y+15z–1=0$ и β: $–5x+3y+4z–3=0$.
8. $M(4; 1; 0)$, α: $16x+20y+8z+3=0$ и β: $5x–4y–2z–4=0$.
9. $M(0; 4; 3)$, α: $–2x+6y+2z–1=0$ и β: $–3x–y–z+5=0$.
10. $M(0; 3; 4)$, α: $–6x–4y–10z–1=0$ и β: $–3x+5y+2z–3=0$.
11. $M(1; 1; 0)$, α: $–12x+9y–6z+5=0$ и β: $–3x+4y+2z–4=0$.
12. $M(1; 3; 3)$, α: $–6x–15y–9z+2=0$ и β: $–3x–5y–2z+3=0$.
13. $M(4; 1; 4)$, α: $12x+3y+12z+2=0$ и β : $4x–4y–z–2=0$.
14. $M(1; 0; 3)$, α: $–20x–8y–8z+3=0$ и β: $–2x+5y+2z+3=0$.
15. $M(1; 4; 2)$, α: $8x–4y+10z–5=0$ и β: $–4x–5y+2z–4=0$.
16. $M(4; 4; 2)$, α: $15x–3y–3z+2=0$ и β: $5x+y+z–5=0$.
17. $M(0; 4; 4)$, α: $–15x+12y–12z–1=0$ и β: $–4x–5y–4z–1=0$.
18. $M(3; 4; 3)$, α: $6x+12y+6z+4=0$ и β :$–2x+4y–2z–3=0$.
19. $M(4; 3; 4)$, α: $–12x–12y–8z–1=0$ и β: $3x–2y+3z–4=0$.
20. $M(4; 2; 2)$, α: $9x–15y–6z+1=0$ и β: $2x–5y+3z–5=0$.

21. $M(4;\ 1;\ 1)$, α: $3x–12y+12z–1=0$ и β: $4x–y–4z+3=0$.

22. $M(3;\ 4;\ 2)$, α: $6x+3y+12z+1=0$ и β: $–4x+y–2z+2=0$.

23. $M(2;\ 0;\ 1)$, α: $6x–12y–9z–2=0$ и β: $–2x+3y–4z+5=0$.

24. $M(3;\ 0;\ 3)$, α: $–6x+9y–9z+1=0$ и β: $–3x+3y+2z–5=0$.

25. $M(2;\ 0;\ 1)$, α: $–3x–9y–15z–2=0$ и β: $–x–5y–3z–4=0$.

26. $M(2;\ 4;\ 2)$, α: $–12x+9y+15z–2=0$ и β: $3x–4y–5z+1=0$.

27. $M(0;\ 2;\ 0)$, α: $–6x–9y+15z+4=0$ и β: $2x–5y–3z–5=0$.

28. $M(2;\ 2;\ 0)$, α: $16x–16y–20z+2=0$ и β: $4x–5y+4z+5=0$.

29. $M(0;\ 1;\ 2)$, α: $12x+16y+20z–2=0$ и β: $5x+4y–3z–2=0$.

30. $M(3;\ 4;\ 1)$, α: $9x+3y+9z+1=0$ и β: $3x+y–3z+5=0$.

31. $M(0;\ 2;\ 1)$, α: $–9x–15y–15z–4=0$ и β: $3x–5y+5z–4=0$.

32. $M(2;\ 3;\ 4)$, α: $–6x+9y–12z–2=0$ и β: $–2x–4y+3z–4=0$.

33. $M(3;\ 1;\ 0)$, α: $6x+12y+15z+2=0$ и β: $5x+4y–2z–5=0$.

34. $M(0;\ 1;\ 1)$, α: $8x+10y–6z+5=0$ и β: $–4x+3y–5z+1=0$.

35. $M(0;\ 4;\ 2)$, α: $–6x–10y–8z+1=0$ и β: $3x–4y+5z+3=0$.

36. $M(0;\ 4;\ 2)$, α: $16x+20y+20z–1=0$ и β: $4x–5y+5z–5=0$.

37. $M(3;\ 2;\ 0)$, α: $–8x–2y–2z–1=0$ и β: $–4x–y+z–1=0$.

38. $M(1;\ 3;\ 4)$, α :$–20x–12y–8z+2=0$ и β : $–2x–3y–5z+1=0$.

39. $M(3;\ 1;\ 1)$, α: $10x–2y–2z–1=0$ и β: $x+y+5z+1=0$.

40. $M(1;\ 3;\ 2)$, α:$–15x+12y–12z+4=0$ и β: $–5x+4y–4z+2=0$.

Задача 6. Заданы три вершины треугольника *A*, *B*, *C*. Написать уравнение биссектрисы, выходящей из вершины *C*.

1. $A(4;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ –3)$, $B(–3;\ 0;\ –3)$.
2. $A(2;\ 0;\ 0)$, $C(–4;\ 2;\ –3)$, $B(0;\ –2;\ 4)$.
3. $A(0;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 1;\ –2)$, $B(–4;\ –1;\ 2)$.
4. $A(1;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 3;\ –2)$, $B(0;\ 3;\ 4)$.
5. $A(0;\ 2;\ –4)$, $C(4;\ 0;\ 0)$, $B(–1;\ 0;\ 0)$.
6. $A(3;\ 0;\ 0)$, $C(1;\ –4;\ 4)$, $B(–2;\ –4;\ 4)$.
7. $A(–2;\ –4;\ 0)$, $C(2;\ 0;\ –2)$, $B(0;\ 0;\ –2)$.

21. $A(–3;\ 0;\ –4)$, $C(0;\ 2;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ –3)$.
22. $A(2;\ 0;\ 0)$, $C(4;\ 1;\ –2)$, $B(4;\ 1;\ –4)$.
23. $A(3;\ 2;\ 2)$, $C(–3;\ –1;\ 0)$, $B(–3;\ 2;\ 4)$.
24. $A(2;\ –1;\ 0)$, $C(–4;\ –4;\ –2)$, $B(–4;\ 4;\ 4)$.
25. $A(–3;\ 2;\ –4)$, $C(–1;\ 2;\ –4)$, $B(–4;\ 0;\ 2)$.
26. $A(–1;\ 0;\ –4)$, $C(–1;\ 0;\ 2)$, $B(1;\ –2;\ 3)$.
27. $A(–4;\ 4;\ –2)$, $C(0;\ 0;\ 0)$, $B(–1;\ 0;\ 0)$.

8. $A(0; 0; –4)$, $C(1; 4; 4)$, $B(0; –4; 0)$.
9. $A(1; 1; 1)$, $C(2; 1; 1)$, $B(2; –3; –2)$.
10. $A(–2; 2; –1)$, $C(–2; –4; –1)$, $B(–1;–2; –3)$.
11. $A(–2; –1; 1)$, $C(–2; 3; –2)$, $B(0; 2; 0)$.
12. $A(–2; 0; 0)$, $C(0; 4; 4)$, $B(–3; 4; 0)$.
13. $A(–3; –4; –3)$, $C(–2; –2; –1)$, $B(0; 0; 0)$.
14. $A(3; –2; 2)$, $C(–1; 2; 0)$, $B(–2; 0; 2)$.
15. $A(0; –2; 0)$, $C(2; –3; –2)$, $B(0; –4; 0)$.
16. $A(–1; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 4)$.
17. $A(2; 1; 0)$, $C(2; –3; 0)$, $B(0; –4; 2)$.
18. $A(–3; 1; 2)$, $C(1; –3; 4)$, $B(–3; –1; 0)$.
19. $A(2; –3; 0)$, $C(0; –2; –2)$, B(–2; –3; 0).
20. $A(0; 2; –4)$, $C(0; 2; 0)$, $B(0; 1; 0)$.
28. $A(2; 0; 1)$, $C(3; 0; 1)$, $B(3; 1; 1)$.
29. $A(0; –4; 4)$, $C(4; –3; –4)$, $B(–3; 1; 0)$.
30. $A(0; –1; 2)$, $C(–1; 1; 0)$, $B(2; 1; 0)$.
31. $A(4; –3; 2)$, $C(2; –3; 2)$, $B(0; –4; 0)$.
32. $A(0; –1; –4)$, $C(0; –4; 0)$, $B(4; –2; –4)$.
33. $A(–3; 2; –4)$, $C(–3; 4; –4)$, $B(–3; 4; 3)$.
34. $A(0; 0; 0)$, $C(4; 3; 0)$, $B(1; –1; 0)$.
35. $A(1; –4; 3)$, $C(2; –2; 1)$, $B(0; –3; 3)$.
36. $A(2; –1; –1)$, $C(2; –1; –3)$, $B(–2; –1; 0)$.
37. $A(1; 1; 2)$, $C(3; 2; 0)$, $B(1; 0; –1)$.
38. $A(–2; 0; 0)$, $C(2; –2; 4)$, $B(2; 2; 1)$.
39. $A(1; –3; 2)$, $C(–1; 0; –4)$, $B(–1; 0; 4)$.
40. $A(0; –2; 0)$, C(0; –2; 4), $B(–2; 4; 1)$.

Задача 7. Даны три вершины треугольника *ABC*. Найти параметрические уравнения высоты, опущенной из вершины *C*.

1. $A(1; 1; 4)$, $B(–1; 2; 2)$, $C(3; 2; –2)$
2. $A(–2; 2; 1)$, $B(–4; 1; –2)$, $C(–2; –2; –4)$
3. $A(4; –1; –3)$, $B(–1; –1; –1)$, $C(1; –3; –3)$
4. $A(–3; 4; –3)$, $B(–1; 4; 1)$, $C(–2; –3; –4)$
5. $A(–3; –4; 4)$, $B(1; –2; 2)$, $C(–4; 3; –4)$
6. $A(1; 1; 1)$, $B(1; –3; 4)$, $C(–2; –1; –2)$
7. $A(–2; –1; –1)$, $B(–2; 1; –2)$, $C(4; 1; 4)$
8. $A(2; 2; 3)$, $B(–3; –3; –4)$, $C(–2; –3; –1)$
9. $A(2; 4; –3)$, $B(1; –3; 3)$, $C(–3; –2; 1)$
10. $A(–2; 4; 2)$, $B(4; –3; –3)$, $C(1; 3; 2)$
11. $A(–2; –1; 1)$, $B(2; –2; –3)$, $C(4; 4; 3)$
12. $A(–3; –4 ; –1)$, $B(2; –3; 4)$, $C(1; –1; –2)$
13. $A(–1; 2; –4)$, $B(1; 2; –2)$, $C(2; –2; 3)$
14. $A(–3; 2 ; –4)$, $B(3; –4; –4)$, $C(–4; 1; 4)$
15. $A(2; 1; –2)$, $B(–2; –2; 4)$, $C(–1; –4; 1)$
21. $A(–1; –3 ; 4)$, $B(–1; –3; 1)$, $C(–2; –2; 3)$
22. $A(–1; –1; 1)$, $B(–4; –4; –4)$, $C(1; –2; 2)$
23. $A(–4; 3; –2)$, $B(–3; –1; 1)$, $C(–1; 4; 4)$
24. $A(3; –3; 1)$, $B(–1; –2; 1)$, $C(2; 3; 3)$
25. $A(–2; 1; –4)$, $B(2; –2; 2)$, $C(–3; 2; 2)$
26. $A(–2; –3; –1)$, $B(–4; 1; –1)$, $C(–2; 3; 4)$
27. $A(3; 4; –2)$, $B(–3; 1; 2)$, $C(3; 3; 2)$
28. $A(–4; 2; 3)$, $B(–1; 1; 3)$, $C(3; –3; –4)$
29. $A(4; –1; –2)$, $B(–3; 4; –1)$, $C(4; –4; 2)$
30. $A(3, 1; 1)$, $B(–3; 2; –3)$, $C(–4; –1; –1)$
31. $A(2; 4; –1)$, $B(–3; –3; 4)$, $C(–2; –3; 4)$
32. $A(4; 3; 4)$, $B(2; –4; 2)$, $C(4; 3; 1)$
33. $A(–1; 4 ; –1)$, $B(1; 3; –2)$, $C(3; 2; –2)$
34. $A(–4; 2; –2)$, $B(3; 4; 2)$, $C(3; 3; 2)$
35. $A(2; 4; –3)$, $B(1; –3; 3)$, $C(–3; 2; –2)$

16. $A(3; 2; 3)$, $B(1; -2; 4)$, $C(3; 2; -3)$

17. $A(-1, 1; -4)$, $B(4; 2; -1)$, $C(-1; 1; -1)$

18. $A(1; -2; 1)$, $B(3; 4; -4)$, $C(4; 1; 1)$

19. $A(-4; -3; -4)$, $B(1; -4; -4)$, $C(-4; -3; 2)$

20. $A(1; 4; 3)$, $B(-2; -2; -2)$, $C(-4; -2; -3)$

36. $A(-1; -3; 2)$, $B(4; -2; -3)$, $C(-1; -1; 2)$

37. $A(2; 3; 3)$, $B(-2; -3; -3)$, $C(-3; 4; -3)$

38. $A(-3; -1; -4)$, $B(-4; -4; 1)$, $C(1; 3; 4)$

39. $A(4; 1; -4)$, $B(-4; -4; 1)$, $C(-2; 3; 4)$

40. $A(2; 2; 2)$, $B(2; 1; -1)$, $C(1; 4; 2)$

Задача 8. Даны три точки A, B, C и прямая L. Точка M делит AB в отношении λ. Найти расстояние между прямыми CM и L.

1. $A(11; 8; -26)$, $B(-1; 4; -2)$, $C(5; 1; -5)$; $\lambda=3$; L: $x=-26+3t$; $y=-61-2t$; $z=-36-4t$;
2. $A(7; 15; -15)$, $B(4; -3; 3)$, $C(2; 1; -1)$; $\lambda=2$; L: $x=-10+t$; $y=-23+2t$; $z=-13+2t$;
3. $A(1; 1; 0)$, $B(3; -1; 4)$, $C(2; 2; 2)$; $\lambda=-3$; L: $x=-34-4t$; $y=-16+2t$; $z=-16-5t$;
4. $A(-38; -11; 51)$, $B(2; 1; -5)$, $C(-5; -5; 5)$; $\lambda=3$; L: $x=-55-2t$; $y=-30-3t$; $z=-20-4t$;
5. $A(33; 41; -2)$, $B(-3; -3; -2)$, $C(4; 4; 1)$; $\lambda=3$; L: $x=-16-4t$; $y=-6-4t$; $z=-19+3t$;
6. $A(15; -12; -10)$,$B(5; 2; -2)$, $C(1; 5; 5)$; $\lambda=-3$; L: $x=-5-t$; $y=2+2t$; $z=-1-2t$;
7. $A(7; -3; 9)$, $B(4; 2; 2)$, $C(5; 4; -4)$; $\lambda=-2$; L: $x=-25-4t$; $y=-56+3t$; $z=-34+5t$;
8. $A(7; 2; 1)$, $B(3; 2; 1)$, $C(-2; 5; -3)$; $\lambda=-3$; L: $x=-52-3t$; $y=-45-2t$; $z=-53-4t$;
9. $A(4; -10; 3)$, $B(-2; -4; -3)$, $C(-2; -2; -2)$; $\lambda=-3$; L: $x=-38+t$; $y=-38-t$; $z=-38-4t$;
10. $A(-11; 17; 29)$, $B(-3; -1; 5)$, $C(-3; -5; -5)$; $\lambda=-3$; L: $x=-57-4t$; $y=-59+2t$; $z=-59+5t$;
11. $A(3; -6; -12)$, $B(3; 3; 3)$, $C(-1; 1; 1)$; $\lambda=2$; L: $x=-25-4t$; $y=-11-t$; $z=-23+t$;
12. $A(1; -7; -6)$,$B(3; -3; -5)$, $C(3; 5; 1)$; $\lambda=-2$; L: $x=-45+2t$; $y=-43+4t$; $z=-47+3t$;
13. $A(-8; 6; 2)$,$B(-5; 3; -1)$, $C(1; -4; -5)$; $\lambda=-2$; L: $x=-71+3t$; $y=-40+4t$; $z=-41-5t$;
14. $A(-10; 5; -31)$, $B(-2; 5; 5)$, $C(-3; 1; -5)$; $\lambda=3$; L: $x=-27-3t$; $y=-47-4t$; $z=-53-5t$;
15. $A(0; 2; 11)$, $B(2; 2; -3)$, $C(-3; -1; 1)$; $\lambda=1$, L: $x=-40+4t$; $y=-38-3t$; $z=-36-4t$;
16. $A(-10; -5; -8)$, $B(-4; 1; -2)$, $C(5; 3; 5)$; $\lambda=-2$; L: $x=-25+t$; $y=-12+2t$; $z=-10+2t$;
17. $A(13; 9; -12)$, $B(-5; -5; -4)$, $C(2; -2; -3)$; $\lambda=1$; L: $x=-7+t$; $y=-11+4t$; $z=-12-3t$;
18. $A(7; 1; 2)$, $B(-2; -5; 5)$, $C(-3; -2; 3)$; $\lambda=2$; L: $x=-12-4t$; $y=-20+2t$; $z=-15-3t$;
19. $A(-15; 17; 3)$, $B(5; -3; 3)$, $C(3; 3; -1)$; $\lambda=3$; L: $x=-3-4t$; $y=-9-2t$; $z=-7+4t$;
20. $A(-11; -3; -6)$, $B(-2; -3; -3)$, $C(-2; 1; -5)$; $\lambda=2$; L: $x=-62-4t$; $y=-29+4t$; $z=-35-2t$;
21. $A(5; -7; 0)$, $B(3; -2; 3)$, $C(4; 1; 2)$; $\lambda=-2$; L: $x=-29-5t$; $y=-65-4t$; $z=-64+3t$;
22. $A(9; -11; -25)$, $B(3; 4; 5)$, $C(1; 2; -2)$; $\lambda=2$; L: $x=-39-4t$; $y=-18-t$; $z=-42+3t$;

23. $A(17; -23; 7)$, $B(1; -3; 3)$, $C(-3; 5; -4)$; $\lambda=-3$; L: $x=-30-t$; $y=-49-4t$; $z=-31-t$;

24. $A(-2; 3; -4)$, $B(-1; -2; 3)$, $C(-4; -4; 5)$; $\lambda=-2$; L: $x=-39-4t$; $y=-74+3t$; $z=-65+2t$;

25. $A(5; -18; -10)$, $B(2; 3; 2)$, $C(5; -1; 2)$; $\lambda=2$; L: $x=-16-4t$; $y=-22+t$; $z=-40-t$;

26. $A(-2; -1; -12)$, $B(4; -4; 3)$, $C(-1; -1; 2)$; $\lambda=2$; L: $x=-61+3t$; $y=-31+4t$; $z=-28-4t$;

27. $A(-30; -49; 8)$, $B(2; 3; -4)$, $C(-4; -5; -5)$; $\lambda=3$; L: $x=-58+5t$; $y=-59+2t$; $z=-59-4t$;

28. $A(-14; 4; 9)$, $B(-2; -2; 3)$, $C(-4; 4; 2)$; $\lambda=2$; L: $x=-64+4t$; $y=-26-2t$; $z=-58+4t$;

29. $A(3; -1; 12)$, $B(-1; 1; -2)$, $C(-1; 4; 2)$; $\lambda=1$; L: $x=-41+2t$; $y=-16+4t$; $z=-18-3t$;

30. $A(-1; -2; 0)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-2; 1; -2)$; $\lambda=2$; L: $x=-56+2t$; $y=-53-5t$; $z=-56-4t$;

31. $A(-2; -9; 9)$, $B(2; 3; -1)$, $C(4; 2; 2)$; $\lambda=1$; L: $x=-23-4t$; $y=-52-2t$; $z=-52+5t$;

32. $A(-6; -16; -2)$, $B(4; -2; -2)$, $C(5; 3; -5)$; $\lambda=-3$; L: $x=-10+t$; $y=-27-2t$; $z=-35+2t$;

33. $A(-1; -8; 17)$, $B(-1; 4; 2)$, $C(1; -4; 3)$; $\lambda=2$; L: $x=-5-t$; $y=-16+3t$; $z=-3+4t$;

34. $A(15; -16; 7)$, $B(-1; -4; 3)$, $C(-5; 5; 3)$; $\lambda=-3$; L: $x=-65-2t$; $y=-25-4t$; $z=-57+4t$;

35. $A(-12; -11; 0)$, $B(-2; -1; 4)$, $C(-1; 1; 1)$; $\lambda=-3$; L: $x=-91+4t$; $y=-89+3t$; $z=-44-4t$;

36. $A(-14; 2; 29)$, $B(-4; 2; 3)$, $C(4; -2; -5)$; $\lambda=-3$; L: $x=-2-t$; $y=-8+2t$; $z=-11-2t$;

37. $A(-1; -20; -9)$, $B(-3; -2; -1)$, $C(-1; 2; -1)$; $\lambda=-3$; L: $x=-25-t$; $y=-22+3t$; $z=-25+4t$;

38. $A(-6; -13; -11)$, $B(4; 1; -5)$, $C(1; -4; -5)$; $\lambda=1$; L: $x=-23-4t$; $y=-52+4t$; $z=-53+2t$;

39. $A(23; -21; -15)$, $B(3; 3; 5)$, $C(5; 1; -5)$; $\lambda=3$; L: $x=-25-t$; $y=-14-2t$; $z=-35+2t$;

40. $A(9; -14; 14)$, $B(1; -5; 5)$, $C(-3; 3; -3)$; $\lambda=-2$; L: $x=-57+4t$; $y=-24+2t$; $z=-30-5t$.

Задача 9. Найти точку M_C, симметричную данной точке $M(x; y; z)$ относительно прямой L:

1. $M(0; 2; -6)$, L: $x=27-t$; $y=11-2t$; $z=-15-2t$.
2. $M(3; 8; 3)$, L: $x=3-2t$; $y=-1-t$; $z=-24+2t$.
3. $M(-8; 0; -1)$, L: $x=-30+t$; $y=t$; $z=-23+3t$.
4. $M(6; 2; 2)$, L: $x=-76-4t$; $y=2-4t$; $z=-121+3t$.
5. $M(7; -1; 7)$, L: $x=94+4t$; $y=28+2t$; $z=-80-3t$.
6. $M(-1; -1; 4)$, L: $x=-1-t$; $y=32+3t$; $z=-7+t$.
7. $M(4; 4; -8)$, L: $x=4+t$; $y=1-t$; $z=1-t$.
8. $M(-3; 6; 3)$, L: $x=41-2t$; $y=-60+3t$; $z=3+3t$.
9. $M(-4; 0; 6)$, L: $x=-62-4t$; $y=58+3t$; $z=6+2t$.

10. $M(3; –9; 0)$, L: $x=37–4t$; $y=-77+3t$; $z=34–3t$.

11. $M(3; –4; –8)$, L: $x=3+t$; $y=-46+2t$; $z=34–4t$.

12. $M(5; –4; –1)$, L: $x=5+4t$; $y=74+3t$; $z=-27+t$.

13. $M(1; –1; –3)$, L: $x=-8–t$; $y=-4–t$; $z=3+t$.

14. $M(6; –6; 8)$, L: $x=-57–2t$; $y=-69+4t$; $z=71–t$.

15. $M(–2; 4; 1)$, L: $x=-23–t$; $y=67+2t$; $z=1+4t$.

16. $M(–5; 0; –7)$, L: $x=1–t$; $y=9+t$; $z=-13–t$.

17. $M(0; –8; 0)$, L: $x=-18–t$; $y=-8–2t$; $z=-t$.

18. $M(0; –6; –8)$, L: $x=2t$; $y=-69–4t$; $z=-8–t$.

19. $M(9; 0; 8)$, L: $x=-93+3t$; $y=-102+4t$; $z=42+3t$.

20. $M(0; 2; 9)$, L: $x=12–2t$; $y=-4+t$; $z=-3+t$.

21. $M(1; 0; 3)$, L: $x=67+3t$; $y=3t$; $z=47+2t$.

22. $M(0; 8; –1)$, L: $x=t$; $y=-55+4t$; $z=20+2t$.

23. $M(8; 7; 2)$, L: $x=-18–3t$; $y=7+t$; $z=-76–4t$.

24. $M(–5; 2; –4)$, L: $x=-5+3t$; $y=2+2t$; $z=40–3t$.

25. $M(3; –4; 7)$, L: $x=-24–t$; $y=5+2t$; $z=16–2t$.

26. $M(4; 7; 4)$, L: $x=4+3t$; $y=7–t$; $z=61–3t$.

27. $M(–5; 6; –5)$, L: $x=-31–4t$; $y=32–t$; $z=21–3t$.

28. $M(8; 1; –7)$, L: $x=36–2t$; $y=29–t$; $z=-49+3t$.

29. $M(–8; 6; –7)$, L: $x=-41+t$; $y=6–4t$; $z=26+4t$.

30. $M(–5; 6; 9)$, L: $x=-5–t$; $y=-6–2t$; $z=9+t$.

31. $M(–4; 5; 3)$, L: $x=-4–4t$; $y=107+3t$; $z=105+3t$.

32. $M(–8; –4; –9)$, L: $x=94–3t$; $y=30+4t$; $z=-9–3t$.

33. $M(0; –1; –6)$, L: $x=–4t$; $y=-30–3t$; $z=-35–2t$.

34. $M(8; –5; –7)$, L: $x=-21–2t$; $y=24–4t$; $z=22–3t$.

35. $M(–4; –1; 5)$, L: $x=-62–4t$; $y=57+3t$; $z=-24–2t$.

36. $M(0; –8; 2)$, L: $x=14+3t$; $y=-36+2t$; $z=16+t$.

37. $M(–4; 2; 6)$, L: $x=64–3t$; $y=-66+3t$; $z=-62–4t$.

38. $M(5; 8; 0)$, L: $x=-73+t$; $y=8+4t$; $z=78–3t$.

39. $M(–9; 9; 3)$, L: $x=-87–t$; $y=9+4t$; $z=81–3t$.

40. $M(-3;-4;-1)$, L: $x=18-2t$; $y=-4-t$; $z=20-4t$.

Задача 10. Найти точку P на плоскости α, чтобы сумма $|M_1P|+|PM_2|$ была минимальной.

1. $M_1(32;\ 9;\ -12)$, $M_2(0;\ 1;\ -4)$ и α: $-y-z-11=0$.
2. $M_1(1;\ -3;\ 7)$, $M_2(5;\ 1;\ -1)$ и α: $-x+y+8=0$.
3. $M_1(-2;\ -2;\ 12)$, $M_2(0;\ 0;\ 0)$ и α: $3x+3y+z+114=0$.
4. $M_1(14;\ -5;\ 77)$, $M_2(-4;\ -5;\ 3)$ и α: $3x+4z+350=0$.
5. $M_1(-15;\ 10;\ -5)$, $M_2(1;\ -3;\ -5)$ и α: $-x+4y+81=0$.
6. $M_1(32;\ -8;\ -12)$, $M_2(0;\ 0;\ -4)$ и α: $x+2y+2z-10=0$.
7. $M_1(43;\ -35;\ -4)$, $M_2(1;\ -5;\ -1)$ и α: $3x+y-z+100=0$.
8. $M_1(-66;\ -50;\ 2)$, $M_2(0;\ -2;\ 0)$ и α: $3x-4y+3z-382=0$.
9. $M_1(-13;\ 8;\ -53)$, $M_2(-5;\ 0;\ -5)$ и α: $3x-3y-z+105=0$.
10. $M_1(69;\ -29;\ -87)$, $M_2(2;\ -5;\ -1)$ и α: $2x-3y+2z+17=0$.
11. $M_1(0;\ 8;\ 3)$, $M_2(0;\ 0;\ -5)$ и α: $x-4=0$.
12. $M_1(-2;\ -95;\ -147)$, $M_2(4;\ 1;\ -3)$ и α: $3x-3y+4z-303=0$.
13. $M_1(29;\ -4;\ -94)$, $M_2(-3;\ -4;\ 2)$ и α: $-4x-140=0$.
14. $M_1(-13;\ -7;\ -96)$, $M_2(3;\ 5;\ 4)$ и α: $4x+3y-z-75=0$.
15. $M_1(2;\ -12;\ -6)$, $M_2(2;\ -4;\ 2)$ и α: $x+2=0$.
16. $M_1(-5;\ 31;\ -52)$, $M_2(-5;\ -1;\ -4)$ и α: $4y+132=0$.
17. $M_1(38;\ 35;\ 4)$, $M_2(-2;\ 5;\ 4)$ и α: $x-3y-33=0$.
18. $M_1(15;\ 7;\ 18)$, $M_2(-3;\ 1;\ -2)$ и α: $3x+y-3z+59=0$.
19. $M_1(18;\ 38;\ 26)$, $M_2(-2;\ 4;\ 0)$ и α: $x-y+4z+96=0$.
20. $M_1(2;\ 21;\ -37)$, $M_2(2;\ 3;\ -1)$ и α: $-x+20=0$.
21. $M_1(-2;\ -1;\ 54)$, $M_2(-2;\ -1;\ 4)$ и α: $-3y-z-49=0$.
22. $M_1(-5;\ 67;\ 28)$, $M_2(-5;\ 3;\ -4)$ и α: $-4y+4z-100=0$.
23. $M_1(9;\ 10;\ -3)$, $M_2(5;\ 0;\ -1)$ и α: $x+2z+7=0$.
24. $M_1(234;\ -57;\ 41)$, $M_2(-4;\ 4;\ 3)$ и α: $x-4y-4z+362=0$.
25. $M_1(82;\ 105;\ 41)$, $M_2(0;\ 1;\ 1)$ и α: $4x-2y-3z+92=0$.
26. $M_1(-41;\ -18;\ -10)$, $M_2(-1;\ -2;\ -2)$ и α: $2y-4z-84=0$.

27. $M_1(4; -32; 17)$, $M_2(0; -4; 1)$ и α: $3x+y+z-30=0$.

28. $M_1(-57; -19; -140)$, $M_2(3; -3; 4)$ и α: $-4x-3y+2z-208=0$.

29. $M_1(-187; -35; 68)$, $M_2(5; -3; 4)$ и α: $-4y-4z-124=0$.

30. $M_1(28; 0; 69)$, $M_2(-2; 0; -2)$ и α: $-3x+2z+50=0$.

31. $M_1(-13; -10; -36)$, $M_2(-5; -2; -4)$ и α: $x-y+11=0$.

32. $M_1(-2; -50; 5)$, $M_2(4; 0; -3)$ и α: $3x-y-4z-50=0$.

33. $M_1(30; 147; 82)$, $M_2(0; -3; -3)$ и α: $-3x+4z+262=0$.

34. $M_1(24; -3; -34)$, $M_2(0; -3; -2)$ и α: $4x+3z+81=0$.

35. $M_1(-39; 69; -105)$, $M_2(-3; -3; 3)$ и α: $-3x-3y-126=0$.

36. $M_1(-37; -47; 11)$, $M_2(-5; 0; 3)$ и α: $-4x+2y+z+19=0$.

37. $M_1(81; 75; 51)$, $M_2(1; -1; -5)$ и α: $4x-2y-3z+269=0$.

38. $M_1(59; -66; -64)$, $M_2(-5; -2; 0)$ и α: $4x+4z+276=0$.

39. $M_1(-76; -10; 48)$, $M_2(-1; 1; 0)$ и α: $4y+3z+96=0$.

40. $M_1(-10; -20; -27)$, $M_2(-4; 1; -3)$ и α: $-2x+2y+z-61=0$.

Задача 11. Найти уравнение общего перпендикуляра к прямым L_1, L_2:

1. L_1: $x=3t$; $y=1+4t$; $z=-1-4t$; L_2: $x=t$; $y=1+2t$; $z=-1-2t$;
2. L_1: $x=1-2t$; $y=-1+4t$; $z=-t$; L_2: $x=t$; $y=-3-t$; $z=-3t$;
3. L_1: $x=-2-3t$; $y=4t$; $z=-2+t$; L_2: $x=-3t$; $y=-1+4t$; $z=-2-4t$;
4. L_1: $x=-2-4t$; $y=-1+4t$; $z=-3+t$; L_2: $x=-4t$; $y=2+2t$; $z=-2t$;
5. L_1: $x=-t$; $y=3-2t$; $z=3+t$; L_2: $x=-2+t$; $y=-1-2t$; $z=t$;
6. L_1: $x=4t$; $y=-2+2t$; $z=-2-4t$; L_2: $x=-1+2t$; $y=-1-3t$; $z=2-t$;
7. L_1: $x=1-3t$; $y=-2-3t$; $z=4t$; L_2: $x=4t$; $y=-1+3t$; $z=-1+t$;
8. L_1: $x=3+3t$; $y=-2-2t$; $z=3-2t$; L_2: $x=-2+2t$; $y=1+2t$; $z=4t$;
9. L_1: $x=3t$; $y=1-4t$; $z=4t$; L_2: $x=-2-3t$; $y=-3t$; $z=-2t$;
10. L_1: $x=2t$; $y=1-4t$; $z=2+3t$; L_2: $x=2t$; $y=-1-2t$; $z=-2-4t$;
11. L_1: $x=1+t$; $y=-3+2t$; $z=-2t$; L_2: $x=-3-4t$; $y=3-2t$; $z=-4t$;
12. L_1: $x=-1+t$; $y=2t$; $z=1+4t$; L_2: $x=3+3t$; $y=2-2t$; $z=2-3t$;
13. L_1: $x=-t$; $y=1-4t$; $z=3t$; L_2: $x=3+t$; $y=-t$; $z=4t$;
14. L_1: $x=-1+t$; $y=-3-4t$; $z=-3-4t$; L_2: $x=3+t$; $y=t$; $z=-2-3t$;

15. L_1: $x=-3+2t$; $y=-1+4t$; $z=-1-2t$; L_2: $x=-3+t$; $y=-3-2t$; $z=2-3t$;

16. L_1: $x=-2t$; $y=-2+4t$; $z=2-4t$; L_2: $x=-3t$; $y=-1+t$; $z=t$;

17. L_1: $x=-2t$; $y=-3-4t$; $z=-t$; L_2: $x=-3+t$; $y=1-3t$; $z=2+4t$;

18. L_1: $x=-1-4t$; $y=-3t$; $z=2+t$; L_2: $x=3t$; $y=1-2t$; $z=3t$;

19. L_1: $x=-1-3t$; $y=-1-4t$; $z=1-4t$; L_2: $x=1+t$; $y=1+2t$; $z=-1-2t$;

20. L_1: $x=-2+3t$; $y=3t$; $z=2+t$; L_2: $x=-t$; $y=3-3t$; $z=3+3t$;

21. L_1: $x=-1-2t$; $y=2t$; $z=-2+3t$; L_2: $x=1-4t$; $y=2+t$; $z=2-4t$;

22. L_1: $x=3+4t$; $y=3-2t$; $z=1-3t$; L_2: $x=-2-t$; $y=-3-t$; $z=2-4t$;

23. L_1: $x=-t$; $y=-2+2t$; $z=-1-3t$; L_2: $x=1+t$; $y=-3t$; $z=3-3t$;

24. L_1: $x=4t$; $y=1+3t$; $z=2+2t$; L_2: $x=3+4t$; $y=3-4t$; $z=3+t$;

25. L_1: $x=3t$; $y=2-t$; $z=-1+3t$; L_2: $x=4t$; $y=1-2t$; $z=-3+3t$;

26. L_1: $x=1+3t$; $y=1+2t$; $z=-2-3t$; L_2: $x=3-2t$; $y=1+t$; $z=3+2t$;

27. L_1: $x=-2-2t$; $y=3-3t$; $z=-3t$; L_2: $x=2-t$; $y=-2t$; $z=1+2t$;

28. L_1: $x=1-3t$; $y=-2+3t$; $z=-2-4t$; L_2: $x=-1+3t$; $y=3-3t$; $z=-2+t$;

29. L_1: $x=3t$; $y=4t$; $z=-1-4t$; L_2: $x=-3-4t$; $y=3-4t$; $z=3t$;

30. L_1: $x=-3+4t$; $y=1+2t$; $z=3-t$; L_2: $x=2t$; $y=t$; $z=1+2t$;

31. L_1: $x=3-3t$; $y=-3t$; $z=1-2t$; L_2: $x=3t$; $y=2+4t$; $z=2+3t$;

32. L_1: $x=-t$; $y=-1-t$; $z=-3+4t$; L_2: $x=-2-3t$; $y=-3+3t$; $z=1+t$;

33. L_1: $x=-2+t$; $y=3t$; $z=4t$; L_2: $x=-t$; $y=2+3t$; $z=-3+3t$;

34. L_1: $x=-1+3t$; $y=-3-2t$; $z=t$; L_2: $x=2-4t$; $y=2+t$; $z=3-2t$;

35. L_1: $x=1+t$; $y=1-t$; $z=-2t$; L_2: $x=3+3t$; $y=-3-4t$; $z=1+t$;

36. L_1: $x=3+3t$; $y=-2+3t$; $z=-3-3t$; L_2: $x=3t$; $y=3+t$; $z=1+2t$;

37. L_1: $x=1+4t$; $y=-2-3t$; $z=-2t$; L_2: $x=-3-t$; $y=3-2t$; $z=-2+3t$;

38. L_1: $x=4t$; $y=2-2t$; $z=3+3t$; L_2: $x=3+3t$; $y=-3+2t$; $z=-3+3t$;

39. L_1: $x=-1+3t$; $y=3-t$; $z=t$; L_2: $x=3-t$; $y=1-4t$; $z=-3-2t$;

40. L_1: $x=-3+2t$; $y=-4t$; $z=-1+2t$; L_2: $x=-t$; $y=-3t$; $z=-2+t$;

Задача 12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей прямые L_1 и L_2:

1. $M_0(-1; 0; -4)$; L_1: $x=1-2t$; $y=-5t$; $z=4$; L_2: $x=5$; $y=14-3t$; $z=18-2t$.

2. $M_0(0; 0; 3)$; L_1: $x=1+5t$; $y=0$; $z=4+t$; L_2: $x=-4-4t$; $y=0$; $z=1+2t$.
3. $M_0(-4; 5; 1)$; L_1: $x=2t$; $y=2-4t$; $z=-5+3t$; L_2: $x=2+2t$; $y=-18+3t$; $z=-14+3t$.
4. $M_0(-5; -1; 0)$; L_1: $x=-1+5t$; $y=2$; $z=-4t$; L_2: $x=-2$; $y=-1+3t$; $z=2+t$.
5. $M_0(-2; -4; -3)$; L_1: $x=4$; $y=-3-2t$; $z=5-2t$; L_2: $x=10$; $y=-7+t$; $z=20-3t$.
6. $M_0(-3; 0; 1)$; L_1: $x=5$; $y=4-5t$; $z=4-3t$; L_2: $x=19-2t$; $y=-11+3t$; $z=4-t$.
7. $M_0(1; 0; -2)$; L_1: $x=3t$; $y=-5+t$; $z=4t$; L_2: $x=2$; $y=-5-4t$; $z=10-4t$.
8. $M_0(-1; -2; 0)$; L_1: $x=3-3t$; $y=-1+5t$; $z=-5t$; L_2: $x=4+2t$; $y=-14+3t$; $z=-1+2t$.
9. $M_0(0; -4; 1)$; L_1: $x=-2$; $y=3-2t$; $z=3+2t$; L_2: $x=-2-2t$; $y=4+4t$; $z=10-3t$.
10. $M_0(5; 2; 4)$; L_1: $x-5-4t$; $y=1-t$; $z=1-5t$; L_2: $x=2-t$; $y=-2+t$; $z=-6-t$.
11. $M_0(0; 0; -1)$; L_1: $x=1-3t$; $y=1+3t$; $z=4$; L_2: $x=8$; $y=-12+4t$; $z=13-2t$.
12. $M_0(4; -3; 0)$; L_1: $x=1$; $y=-4+2t$; $z=5t$; L_2: $x=-2$; $y=-3-4t$; $z=-4-t$.
13. $M_0(-3; 5; -4)$; L_1: $x=5+3t$; $y=4$; $z=-5$; L_2: $x=13+3t$; $y=5-t$; $z=-14+4t$.
14. $M_0(-4; 0; 2)$; L_1: $x=2+3t$; $y=2+3t$; $z=-5-t$; L_2: $x=2$; $y=-8+3t$; $z=-4-3t$.
15. $M_0(2; 0; 5)$; L_1: $x=-3-5t$; $y=-3$; $z=5$; L_2: $x=-21+4t$; $y=2-4t$; $z=-3+4t$.
16. $M_0(2; 1; -3)$; L_1: $x=5t$; $y=-2+4t$; $z=-t$; L_2: $x=-1-2t$; $y=-12+t$; $z=13-3t$.
17. $M_0(-5; -5; -3)$; L_1: $x=2-4t$; $y=2-2t$; $z=4-3t$; L_2: $x=5$; $y=10-3t$; $z=7+t$.
18. $M_0(1; 4; -3)$; L_1: $x=-5t$; $y=-3-5t$; $z=2-2t$; L_2: $x=10-2t$; $y=-5$; $z=12-t$.
19. $M_0(-1; 0; 4)$; L_1: $x=1-t$; $y=3t$; $z=2+4t$; L_2: $x=13-4t$; $y=6$; $z=11-t$.
20. $M_0(1; 4; 1)$; L_1: $x=-2t$; $y=5$; $z=3t$; L_2: $x=1-2t$; $y=9-t$; $z=2+t$.
21. $M_0(3; 5; 0)$; L_1: $x=-2+5t$; $y=2t$; $z=2t$; L_2: $x=-18+2t$; $y=-10+t$; $z=-14+4t$.
22. $M_0(-5; 0; -2)$; L_1: $x=-2$; $y=-3-4t$; $z=t$; L_2: $x=1$; $y=-4-3t$; $z=1+t$.
23. $M_0(1; 4; 0)$; L_1: $x=2-2t$; $y=-1-2t$; $z=-5+2t$; L_2: $x=-3+t$; $y=-8-t$; $z=-14+4t$.
24. $M_0(3; -4; 1)$; L_1: $x=-3+t$; $y=1+4t$; $z=-2+3t$; L_2: $x=-8$; $y=9+t$; $z=-2t$.
25. $M_0(-3; 2; 3)$; L_1: $x=2+4t$; $y=3+3t$; $z=2-5t$; L_2: $x=3$; $y=-7+4t$; $z=12-3t$.
26. $M_0(4; 5; -3)$; L_1: $x=-5t$; $y=2$; $z=5$; L_2: $x=-1-4t$; $y=-7+3t$; $z=21-4t$.
27. $M_0(-2; 1; 2)$; L_1: $x=-2-t$; $y=-3-t$; $z=-4+2t$; L_2: $x=-t$; $y=-6$; $z=-12$.
28. $M_0(3; 2; 0)$; L_1: $x=-5-2t$; $y=-3$; $z=4+2t$; L_2: $x=-5-3t$; $y=-12+2t$; $z=-2+4t$.
29. $M_0(4; -5; -1)$; L_1: $x=2-t$; $y=3-2t$; $z=-2+2t$; L_2: $x=-3+2t$; $y=12-3t$; $z=-2+t$.
30. $M_0(5; -4; -3)$; L_1: $x=-4-4t$; $y=-3+5t$; $z=1$; L_2: $x=-19+2t$; $y=3t$; $z=5$.
31. $M_0(-5; 0; -4)$; L_1: $x=-2t$; $y=1-3t$; $z=4-2t$; L_2: $x=7+2t$; $y=4+4t$; $z=20-4t$.

32. $M_0(-5;\ 3;\ 5)$; L_1: $x=-3t$; $y=-4-4t$; $z=-1+4t$; L_2: $x=11-3t$; $y=-7$; $z=-9-2t$.

33. $M_0(2;\ 5;\ 5)$; L_1: $x=3-5t$; $y=3$; $z=-2+2t$; L_2: $x=6+t$; $y=13-4t$; $z=-11$.

34. $M_0(-3;\ -1;\ -3)$; L_1: $x=-3+5t$; $y=-5+4t$; $z=1-4t$; L_2: $x=-1+t$; $y=1-2t$; $z=10-3t$.

35. $M_0(2;\ -5;\ 5)$; L_1: $x=-4-4t$; $y=-5t$; $z=-4t$; L_2: $x=-16+t$; $y=8-4t$; $z=-5-2t$.

36. $M_0(5;\ -1;-4)$; L_1: $x=4+2t$; $y=-4t$; $z=1-3t$; L_2: $x=-3+2t$; $y=7+2t$; $z=14-2t$.

37. $M_0(-3;\ 2;\ 4)$; L_1: $x=1-3t$; $y=-3+4t$; $z=2-5t$; L_2: $x=6-2t$; $y=-2t$; $z=-9+2t$.

38. $M_0(0;\ 0;\ -5)$; L_1: $x=1-4t$; $y=0$; $z=-t$; L_2: $x=-2+4t$; $y=12-4t$; $z=16-3t$.

39. $M_0(2;\ -5;\ 5)$; L_1: $x=1+2t$; $y=1-t$; $z=-1-4t$; L_2: $x=-7+t$; $y=-3+4t$; $z=10-3t$.

40. $M_0(3;\ -1;\ 5)$; L_1: $x=-1-t$; $y=-3-3t$; $z=4-2t$; L_2: $x=2-3t$; $y=-23+4t$; $z=-1$.

Задача 13. Прямые L_1 и L_2 с направляющим вектором $\vec{a}$ проходят соответственно через точки M_1 и M_2. Написать уравнение плоскости α, равноудаленную от данных прямых и перпендикулярную плоскости, проходящей через прямые L_1 и L_2.

1. $\vec{a}=\{4;\ 2;\ -2\}$; $M_1(0;\ 0;\ 4)$; $M_2(0;\ 2;\ 0)$.
2. $\vec{a}=\{-1;\ -1;\ -5\}$; $M_1(0;\ 0;\ 0)$; $M_2(-4;\ 0;\ 0)$.
3. $\vec{a}=\{0;\ -3;\ -3\}$; $M_1(4;\ 0;\ -4)$; $M_2(0;\ 0;\ 0)$.
4. $\vec{a}=\{-1;\ -3;\ -5\}$; $M_1(-2;\ 4;\ -4)$; $M_2(0;\ 4;\ 0)$.
5. $\vec{a}=\{-4;\ 3;\ -5\}$; $M_1(-4;\ -4;\ 4)$; $M_2(0;\ 0;\ 0)$.
6. $\vec{a}=\{-2;\ 0;\ -2\}$; $M_1(0;\ 0;\ 0)$; $M_2(0;\ -4;\ 4)$.
7. $\vec{a}=\{-1;\ -4;\ 0\}$; $M_1(0;\ 0;\ 2)$; $M_2(-4;\ -4;\ -4)$.
8. $\vec{a}=\{-4;\ -1;\ 1\}$; $M_1(2;\ 4;\ -4)$; $M_2(0;\ -4;\ 2)$.
9. $\vec{a}=\{0;\ 4;\ 2\}$; $M_1(-2;\ 4;\ 0)$; $M_2(4;\ -4;\ -2)$.
10. $\vec{a}=\{5;\ 5;\ 3\}$; $M_1(-2;\ 0;\ 0)$; $M_2(2;\ -2;\ -2)$.
11. $\vec{a}=\{1;\ 0;\ -2\}$; $M_1(-2;\ -4;\ 0)$; $M_2(2;\ -4;\ 4)$.
12. $\vec{a}=\{2;\ -2;\ 3\}$; $M_1(0;\ 2;\ -4)$; $M_2(0;\ 2;\ 0)$.
13. $\vec{a}=\{-5;\ 1;\ 4\}$; $M_1(-2;\ 2;\ -4)$; $M_2(4;\ -4;\ -4)$.
14. $\vec{a}=\{-1;\ -4;\ 1\}$; $M_1(0;\ 0;\ 0)$; $M_2(-2;\ 0;\ 4)$.
15. $\vec{a}=\{4;\ 1;\ -3)$; $M_1(2;\ 2;\ 4)$; $M_2(0;\ 0;\ 4)$.
16. $\vec{a}=\{4;\ 0;\ 1\}$; $M_1(0;\ -2;\ 0)$; $M_2(2;\ 4;\ -4)$.

17. $\vec{a}=\{-4;-4;2\}$; $M_1(-4;-2;-4)$; $M_2(0;-4;-4)$.

18. $\vec{a}=\{-5;-2;-3\}$; $M_1(0;4;4)$; $M_2(0;-2;-2)$.

19. $\vec{a}=\{-2;-2;4\}$; $M_1(0;-2;4)$; $M_2(0;-2;0)$.

20. $\vec{a}=\{1;-2;2\}$; $M_1(0;0;0)$; $M_2(-4;-4;-4)$.

21. $\vec{a}=\{-1;4;-5\}$; $M_1(-4;2;-2)$; $M_2(-4;0;0)$.

22. $\vec{a}=\{2;3;3\}$; $M_1(2;-4;0)$; $M_2(0;0;0)$.

23. $\vec{a}=\{-4;2;2\}$; $M_1(-2;0;-4)$; $M_2(2;0;0)$.

24. $\vec{a}=\{-2;4;5\}$; $M_1(-2;-2;0)$; $M_2(-4;0;0)$.

25. $\vec{a}=\{3;3;1\}$; $M_1(2;4;-2)$; $M_2(-4;0;2)$.

26. $\vec{a}=\{4;-4;-4\}$; $M_1(-4;2;2)$; $M_2(0;0;2)$.

27. $\vec{a}=\{4;-5;2\}$; $M_1(4;0;0)$; $M_2(-2;4;0)$.

28. $\vec{a}=\{-5;-1;-1\}$; $M_1(2;0;0)$; $M_2(-4;0;-2)$.

29. $\vec{a}=\{-2;-3;5\}$; $M_1(2;4;0)$; $M_2(-2;-4;4)$.

30. $\vec{a}=\{5;3;0\}$; $M_1(4;4;4)$; $M_2(2;-4;2)$.

31. $\vec{a}=\{4;3;2\}$; $M_1(-4;2;-2)$; $M_2(2;4;0)$.

32. $\vec{a}=\{-3;1;-1\}$; $M_1(2;4;-2)$; $M_2(0;-2;2)$.

33. $\vec{a}=\{-1;-1;2\}$; $M_1(0;-4;2)$; $M_2(4;0;-2)$.

34. $\vec{a}=\{-3;5;-4\}$; $M_1(2;2;4)$; $M_2(0;-4;-2)$.

35. $\vec{a}=\{0;3;5\}$; $M_1(-2;0;-4)$; $M_2(-4;-4;0)$.

36. $\vec{a}=\{-2;3;5\}$; $M_1(4;0;-4)$; $M_2(-4;-4;0)$.

37. $\vec{a}=\{0;5;2\}$; $M_1(2;0;2)$; $M_2(2;0;0)$.

38. $\vec{a}=\{-3;3;2\}$; $M_1(4;4;-2)$; $M_2(0;0;4)$.

39. $\vec{a}=\{3;0;-4\}$; $M_1(4;0;-4)$; $M_2(-2;-2;-2)$.

40. $\vec{a}=\{-4;0;0\}$; $M_1(0;2;-2)$; $M_2(2;4;0)$.

Задача 14. Точки A и B являются вершинами пирамиды $ABCD$. Грань ABC лежит на заданной плоскости α, ребра AD и BD лежат соответственно на прямых L_1 с направляющим векторам $\vec{a}$ и L_2 с направляющим вектором $\vec{b}$. Ребро CD перпендикулярно ребрам AD, BD. Найти вершины D, C.

1. $A(-2;-2;2)$; $B(0;2;-2)$; $\vec{a}=\{2;3;-3\}$; $\vec{b}=\{0;1;-1\}$; α: $-8x+y-3z-8=0$

2. $A(–1; 3; 0)$; $B(0; 0; 4)$; $\vec{a}=\{–1; 3; 0\}$; $\vec{b}=\{0; 0; –2\}$; α: $x+7y+5z–20=0$

3. $A(0; –3; –1)$; $B(0; –3; 2)$; $\vec{a}=\{–2; 3; 0\}$; $\vec{b}=\{–2; 3; –3\}$; α: $–15x+16y+48=0$

4. $A(–5; 3; –2)$; $B(–8; 2; –4)$; $\vec{a}=\{–3; 3; 0\}$; $\vec{b}=\{–3; 1; –1\}$; α: $–x+y+z–6=0$

5. $A(–3; –3; 1)$; $B(–1; 0;–2)$; $\vec{a}=\{3; 1; –3\}$; $\vec{b}=\{1; –2; 0\}$; α: $–66x+61y+17z–32=0$

6. $A(–1; –4; 3)$; $B(–2; –4; 0)$; $\vec{a}=\{–2; –2; 3\}$; $\vec{b}=\{3; 2; 0\}$; α: $–21x–29y+7z–158=0$

7. $A(–2; 1; 4)$; $B(3; 0; 5)$; $\vec{a}=\{2; –1; –1\}$; $\vec{b}=\{1; 1; 3\}$; α: $y+z–5=0$

8. $A(–4; 7; –6)$; $B(–2; –1; –1)$; $\vec{a}=\{2; –3; 3\}$; $\vec{b}=\{–2; –2; –1\}$; α: $–118x–57y–44z–337=0$

9. $A(1; –2; 3)$; $B(–1; 2; 4)$; $\vec{a}=\{1; –3; 2\}$; $\vec{b}=\{1; –1; –3\}$; α: $–17x–35y+106z–371=0$

10. $A(1; –4; 2)$; $B(–5; –4; –6)$; $\vec{a}=\{0; 1; –1\}$; $\vec{b}=\{–3; –1; –3\}$; α: $20x+19y–15z+86=0$

11. $A(0; 2; 6)$; $B(4; –2; –4)$; $\vec{a}=\{0; 1; 3\}$; $\vec{b}=\{2; –1; –2\}$; α: $35x+5y+12z–82=0$

12. $A(0; –5; 4)$; $B(0; 1; 3)$; $\vec{a}=\{0; –3; 2\}$; $\vec{b}=\{0; 0; 3\}$; α: $–2x+y+6z–19=0$

13. $A(–1; –8; –8)$; $B(–1; –2; –4)$; $\vec{a}=\{0; –3; –3\}$; $\vec{b}=\{0; 0; –2\}$; α: $x–4y+6z+17=0$

14. $A(–4; –6; 1)$; $B(–2; 2; 3)$; $\vec{a}=\{1; 3; –1\}$; $\vec{b}=\{0; –1; –2\}$; α: $–13x–4y+29z–105=0$

15. $A(1; –4; 5)$; $B(2; –1; 2)$; $\vec{a}=\{–1; 3; –3\}$; $\vec{b}=\{–2; 0; 0)$; α: $–3x+y+7=0$

16. $A(2; 4; 0)$; $B(0; –4; 3)$; $\vec{a}=\{–1; –3; 0\}$; $\vec{b}=\{0; –2; 3\}$; α: $–8x–13y–40z+68=0$

17. $A(–4; –2; 1)$; $B(1; –1; 3)$; $\vec{a}=\{–3; –2; 0\}$; $\vec{b}=\{2; –1; 2\}$; α: $–9x–37y+41z–151=0$

18. $A(–3; –3;–2)$; $B(–1; 1; 0)$; $\vec{a}=\{–2; –3; –3\}$; $\vec{b}=\{0; 1; –1\}$; α: $5x–9y+13z+14=0$

19. $A(1; 2; 1)$; $B(–1; –4; 5)$; $\vec{a}=\{2; 2; 0\}$; $\vec{b}=\{0; –2; 2\}$; α: $11x+y+7z–20=0$

20. $A(0; 1; 0)$; $B(–7; 0; –8)$; $\vec{a}=\{1; 1; 2\}$; $\vec{b}=\{–3; 0; –3\}$; α: $–10x+14y+7z–14=0$

21. $A(–4; 4; 5)$; $B(2; 2; 7)$; $\vec{a}=\{3; –1; –2\}$; $\vec{b}=\{0; 0; –3\}$; α: $–x+2y+5z–37=0$

22. $A(0; 0; –3)$; $B(0; 1; 1)$; $\vec{a}=\{0; 1; –2\}$; $\vec{b}=\{0; –2; –2)$; α: $x–8y+2z+6=0$

23. $A(6; 5; 3)$; $B(6; –5; 1)$; $\vec{a}=\{3; 2; 1\}$; $\vec{b}=\{3; –3; 0\}$; α: $4x–24=0$

24. $A(2; 2; 2)$; $B(3; 1; 2)$; $\vec{a}=\{2; 0; 2\}$; $\vec{b}=\{3; –1; 2\}$; α: $–x–y–5z+14=0$

25. $A(5; 2; –5)$; $B(0; 0; 0)$; $\vec{a}=\{2; 1; –2\}$; $\vec{b}=\{–1; 0; 1\}$; α: $–x+10y+3z=0$

26. $A(–3; –2; –4)$; $B(–1; 3; –1)$; $\vec{a}=\{–1; –2; –2)$; $\vec{b}=\{0; –1; 1\}$; α: $5x–8y+10z+39=0$

27. $A(3; –4; 1)$; $B(5; –6; –2)$; $\vec{a}=\{–2; 2; –3\}$; $\vec{b}=\{2; –2; 0\}$; α: $2x–y+2z–12=0$

28. $A(–4; –6; 5)$; $B(–6; –6; 3)$; $\vec{a}=\{2; 3; –3\}$; $\vec{b}=\{–3; –3 ;2\}$; α: $11x–4y–11z+75=0$

29. $A(1; 2; 2)$; $B(– 1; 1; 3)$; $\vec{a}=\{3; 1; 0\}$; $\vec{b}=\{1; 0; 1\}$; α: $5x–4y+6z–9=0$

30. $A(0; -2; 0)$; $B(6; 6; 5)$; $\vec{a}=\{-2; -2; -1\}$; $\vec{b}=\{2; 3; 2\}$; α: $-3x+y+2z+2=0$

31. $A(0; -1; -8)$; $B(4; -5; -2)$; $\vec{a}=\{0; 0; 3\}$; $\vec{b}=\{-2,2,0\}$; α: $x-5y-4z-37=0$

32. $A(-1; -2; -3)$; $B(-1; 4; 4)$; $\vec{a}=\{0; 2; 3\}$; $\vec{b}=\{0; 2; 2\}$; α: $x+7y-6z-3=0$

33. $A(3; -4; 0)$; $B(-7; -2; -2)$; $\vec{a}=\{2; -1; 0\}$; $\vec{b}=\{-3; 0; -1\}$; α: $y-z-4=0$

34. $A(0; 1; -2)$; $B(-4; 7; 0)$; $\vec{a}=\{0; 0; -1\}$; $\vec{b}=\{2; -3; 0\}$; α: $8x+y+13z+25=0$

35. $A(0; -3; 0)$; $B(6; -1; 0)$; $\vec{a}=\{2; 2; -2\}$; $\vec{b}=\{2; 0; 1)$; α: $-3x+9y-8z+27=0$

36. $A(-5; 3; 2)$; $B(1; -3; 4)$; $\vec{a}=\{3; -2; -1\}$; $\vec{b}=\{0; -1; 2\}$; α: $-5x+y+18z-64=0$

37. $A(6; -1; 6)$; $B(-4; -1; -2)$; $\vec{a}=\{3; -1; 2\}$; $\vec{b}=\{2; 1; 2\}$; α: $4x-13y-5z-7=0$

38. $A(4; 2; 0)$; $B(0; -1; -1)$; $\vec{a}=\{2; 0; 0)$; $\vec{b}=\{0; -3; -1\}$; α: $-10x+13y+z+14=0$

39. $A(-3; 3; -2)$; $B(-2; 2; -1)$; $\vec{a}=\{1; -3; 1\}$; $\vec{b}=\{0; -2; 0\}$; α: $-x-4y-3z+3=0$

40. $A(-2; 3; 0)$; $B(0; -1;-6)$; $\vec{a}=\{2; -1; -1\}$; $\vec{b}=\{-1; -1; -2\}$; α: $19x-10y+13z+68=0$

Задача 15. Найти точку пересечения ортогональных проекций прямых L_1, L_2 на заданную плоскость α:

1. L_1: $x=3+t$; $y=7+t$; $z=-5-3t$; L_2: $x=t$; $y=-4-t$; $z=-t$; α: $x+3y-z-11=0$
2. L_1: $x=2$; $y=3-t$; $z=-6$; L_2: $x=-4+3t$; $y=-1-t$; $z=3$; α: $-x-2y+3z+14=0$
3. L_1: $x=-4-t$; $y=-5-2t$; $z=-3$; L_2: $x=-9+t$; $y=-12+2t$; $z=-9+t$; α: $-3x-3y-3z+9=0$
4. L_1: $x=5+2t$; $y=5+3t$; $z=-5-2t$; L_2: $x=6$; $y=4$; $z=-10+2t$; α: $-3x-2y+3z-44=0$
5. L_1: $x=-2t$; $y=4-3t$; $z=2$; L_2: $x=1+t$; $y=3-2t$; $z=-4+3t$; α: $2x+y-z-12=0$
6. L_1: $x=-4+2t$; $y=3-3t$; $z=6$; L_2: $x=-5-2t$; $y=t$; $z=-6-3t$; α: $-x+3y-3z-19=0$
7. L_1: $x=11+3t$; $y=-4$; $z=-7-t$; L_2: $x=1$; $y=4+2t$; $z=1+t$; α: $-x+2y+2z-9=0$
8. L_1: $x=-2$; $y=-7-3t$; $z=-2$; L_2: $x=-1+t$; $y=-1$; $z=-3+2t$; α: $-x+y-z+6=0$
9. L_1: $x=-2-t$; $y=-2t$; $z=-t$; L_2: $x=2t$; $y=4$; $z=6-2t$; α: $-2x-2y-z+9=0$
10. L_1: $x=-7-3t$; $y=-5-3t$; $z=-7-2t$; L_2: $x=3-t$; $y=-3+t$; $z=6$; α: $-x+y-3z+11=0$
11. L_1: $x=1+2t$; $y=-2-2t$; $z=2$; L_2: $x=3$; $y=-t$; $z=-2$; α: $-3x+2y+2z-34=0$
12. L_1: $x=-3+t$; $y=7-t$; $z=-4+2t$; L_2: $x=-2-t$; $y=-9-2t$; $z=1$; α: $x-3y+z+11=0$
13. L_1: $x=4$; $y=2+2t$; $z=8-2t$; L_2: $x=-8-2t$; $y=-11-3t$; $z=6+3t$; α: $2x+2y+3z+34=0$
14. L_1: $x=6$; $y=2$; $z=t$; L_2: $x=-3+t$; $y=-8-2t$; $z=-8-2t$; α: $-3x-y-z-11=0$
15. L_1: $x=-t$; $y=2t$; $z=-1+2t$; L_2: $x=-7-3t$; $y=4+t$; $z=1-t$; α: $-x+2y+3z-28=0$
16. L_1: $x=2+2t$; $y=5+3t$; $z=-5-t$; L_2: $x=6-t$; $y=2$; $z=6$; α: $-2x-y-3z-28=0$

17. L_1: $x=-10-3t$; $y=3t$; $z=4$; L_2: $x=-2$; $y=6-3t$; $z=11-3t$; α: $2x+3y-2z-17=0$

18. L_1: $x=6-2t$; $y=-2+2t$; $z=4+t$; L_2: $x=5+2t$; $y=-3-2t$; $z=7+2t$; α: $x+y+3z+11=0$

19. L_1: $x=-1$; $y=-2+2t$; $z=-9+3t$; L_2: $x=7+2t$; $y=-2$; $z=9+2t$; A: $-x+2y-3z+28=0$

20. L_1: $x=-8+3t$; $y=-5+t$; $z=-5+2t$; L_2: $x=-1$; $y=-1+3t$; $z=-2+t$; α: $x-2y+z-12=0$

21. L_1: $x=-2$; $y=1+2t$; $z=1+3t$; L_2:$x=-7+3t$; $y=-5+2t$; $z=-4+2t$; α: $-2x-y-2z+18=0$

22. L_1: $x=-4-2t$; $y=-5-t$; $z=-5-t$; L_2: $x=11+3t$; $y=4$; $z=10+2t$; α: $-x-2y-2z-9=0$

23. L_1: $x=-3-3t$; $y=-t$; $z=3$; L_2: $x=-5+2t$; $y=-5+3t$; $z=-6+3t$; α: $3x+2y+3z+44=0$

24. L_1: $x=3+t$; $y=-2$; $z=5-t$; L_2: $x=1$; $y=-4-3t$; $z=1-2t$; α: $-x+y-3z-11=0$

25. L_1: $x=-5-3t$; $y=-9-3t$; $z=5+t$; L_2: $x=-1$; $y=-3$; $z=5-3t$; α: $x+3y-2z-14=0$

26. L_1: $x=-1$; $y=3$; $z=12+3t$; L_2: $x=11+3t$; $y=-6$; $z=-15-3t$; α: $-x+3y+3z-38=0$

27. L_1: $x=-2+2t$; $y=3+t$; $z=4-2t$; L_2: $x=-2t$; $y=-1$; $z=-5-2t$; α: $2x-y-3z-28=0$

28. L_1: $x=-5-3t$; $y=-7-t$; $z=2t$; L_2: $x=6-2t$; $y=2+2t$; $z=6-2t$; α: $x+3y+z+11=0$

29. L_1: $x=3+2t$; $y=12+3t$; $z=5+2t$; L_2: $x=-6$; $y=2+2t$; $z=-2$; α: $3x-3y+z-19=0$

30. L_1: $x=-6-t$; $y=5+t$; $z=3$; L_2: $x=3$; $y=-3-t$; $z=-3$; α:$-3x+2y+3z-44=0$

31. L_1: $x=-6+t$; $y=7-3t$; $z=-4+t$; L_2: $x= -8-2t$; $y=-3+t$; $z=-5-3t$; α: $3x+2y+z-28=0$

32. L_1: $x=-7-3t$; $y=-5-t$; $z=8+2t$; L_2: $x=4+t$; $y=-1$; $z=-2-t$; α: $x-y+z+3=0$

33. L_1: $x=6$; $y=8-2t$; $z=-15+3t$; L_2: $x=-3-3t$; $y=-1-t$; $z=1+2t$; α: $-3x-y+3z-19=0$

34. L_1: $x=9-3t$; $y=-1$; $z=3$; L_2: $x=-2+t$; $y=4+3t$; $z=-3$; α: $3x-y+3z+38=0$

35. L_1: $x=10+2t$; $y=4$; $z=4$; L_2: $x=-2$; $y=-4+2t$; $z=-1-t$; α: $-2x-2y-2z+6=0$

36. L_1: $x=4-3t$; $y=6-2t$; $z=-4$; L_2: $x=-1-t$; $y-5+3t$; $z=8+3t$; α: $-x+y-2z+12=0$

37. L_1: $x=2-t$; $y=8-3t$; $z-5-t$; L_2: $x=1$; $y=3-t$; $z=-t$; α: $-x-y+2z+12=0$

38. L_1: $x=-1$; $y=3-2t$; $z=-4+3t$; L_2: $x=5-2t$; $y=-3+2t$; $z=-6+2t$; α: $x+y-2z-12=0$

39. L_1: $x=-6-2t$; $y=-2$; $z=3$; L_2: $x=2$; $y=8+2t$; $z=-6-t$; α: $-2x-2y+3z+34=0$

40. L_1: $x=10-2t$; $y=2-2t$; $z=2$; L_2 : $x=3t$; $y=1$; $z=1+2t$; α: $-3x+y-z+11=0$