Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Якутский государственный университет имени М.К. Аммосова»
Институт математики и информатики

АЛГЕБРА
Часть 1
(*учебное пособие*)

Якутск – 2009

УДК 512.8 (07)
ББК 22.143я73

Утверждено научно-методическим
советом ИМИ ЯГУ
19.11.09 протокол №9

Составители:

1. Г.Г. Гурзо, зав. кафедрой «Математика и информатика» ЯЭПИ
2. И.Н. Бочарова, доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ
3. А.О. Иванова, доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ
4. Т.К. Неустроева, доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ

Рецензент:

к.ф.-м.н. М.А. Иванова

Алгебра. Часть 1 (учебное пособие). / Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К. – Якутск: Изд. ЯГУ, 2009. – 84 с.

Данное пособие предназначено для студентов 1 курса, изучающих дисциплины «Алгебра» и «Линейная алгебра и геометрия». Пособие содержит необходимые сведения из теории, контролирующие вопросы, и решения типовых примеров по таким разделам, как «Перестановки и подстановки» и «Определители», которые входят в ГОС по специальностям 010101, 050201, 050202 и направлению 010100, а также индивидуальные задания по данным разделам.

1. Перестановки и подстановки

1.1. Основные понятия и теоремы

Определение 1.1. Всякое расположение чисел 1, 2, ... , n в некотором определенном порядке называется перестановкой из n чисел. Другими словами, под перестановками чисел принято понимать всевозможные способы, которыми эти числа можно выстроить в ряд.

Можно подсчитать число таких способов. Одно число можно выстроить в ряд одним способом. Два числа – двумя способами: 1, 2 и 2, 1. Числа 1, 2, 3 можно выстроить в ряд следующими способами:

1 2 3; 1 3 2; 2 1 3; 2 3 1; 3 1 2; 3 2 1.

Всего их шесть. Действительно, на первом месте могут стоять только числа 1, 2 и 3, а два остальных числа в каждом из трех возможных случаев можно выстроить в ряд двумя способами. Аналогичный принцип позволяет подсчитать число перестановок из четырех чисел: 1, 2, 3 и 4. Любое из чисел 1, 2, 3 и 4 может стоять на первом месте, а число всех перестановок трех остальных элементов есть 6:

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1 .

Число перестановок из четырех элементов равно $4\cdot 6=24$, т.е. умножаем число перестановок из трех элементов (всего их 6) на 4. Шесть перестановок из трех чисел мы получим, умножив число перестановок из двух чисел (всего их 2) на 3. Таким образом, число перестановок из четырех элементов можно представить в виде $24=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Можно показать, что число перестановок из пяти чисел равно $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$.

Теорема 1.1. Число различных перестановок из n чисел равно произведению $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n$, обозначаемому $n!$ (читается: "эн факториал").

Доказательство. Действительно, общий вид перестановки из n символов есть $i_1, i_2, \ldots , i_n$, где каждое из i_s есть одно из чисел 1, 2, ... , n, причем ни одно из этих чисел не встречается дважды. В качестве i_1 можно взять любое из чисел 1, 2, ... , n; это дает n различных возможностей. Если, однако, i_1 уже выбрано, то в качестве i_2 можно взять лишь одно из оставшихся n–1 чисел, т.е. число различных способов выбора пары символов i_1, i_2 равно произведению $n(n–1)$. Если, уже выбраны i_1 и i_2, то в качестве i_3 можно взять лишь одно из оставшихся n–2 чисел, т.е. число различных способов выбора тройки символов i_1, i_2, i_3 равно произведению $n(n–1)(n–2)$ и т.д. Аналогично, если выбраны числа i_1, i_2, i_3, ..., i_{n-2}, то в качестве i_{n-1} можно взять лишь одно из оставшихся двух чисел, а возможность выбора для i_n остается одна. Таким образом, число различных способов, которыми можно выбрать символы i_1, i_2, … , i_n равно произведению $n\cdot(n–1)\cdot(n–2)\cdot(n–3)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot(n–2)\cdot(n–1)\cdot n=n!$ Теорема доказана.

Определение 1.2. Говорят, что в данной перестановке числа i и j составляют инверсию, если $i>j$, но i стоит в этой перестановке раньше j.

Определение 1.3. Перестановка называется четной, если ее числа составляют четное число инверсий, и нечетной – в противоположном случае.

Например, перестановка 4, 5, 1, 3, 6, 2 четная, так как число инверсий в ней равно 8. Перестановка 1, 2, ... , n будет четной при любом n, так как число инверсий в ней равно нулю.

Определение 1.4. Преобразование в перестановке, при котором мы поменяем местами какие-либо два символа (необязательно стоящие рядом), а все остальные символы оставим на месте, называется транспозицией.

Теорема 1.2. Все $n!$ перестановок из n символов можно расположить в таком порядке, что каждая следующая будет получаться из предыдущей одной транспозицией, причем начинать можно с любой перестановки.

Доказательство. Докажем эту теорему методом математической индукции.

Утверждение справедливо при n=2: если требуется начинать с перестановки 12, то искомое расположение будет 12, 21; если же мы должны начать с перестановки 21, то это будет расположение 21, 12.

Предположим, что наше утверждение уже доказано для n–1, и докажем его для n. Пусть мы должны начать с перестановки i_1, i_2, ... , i_n. Рассмотрим все перестановки из n символов, у которых на первом месте стоит i_1. Таких перестановок $(n–1)!$ и их можно упорядочить в согласии с требованиями теоремы, притом начиная с перестановки i_1, i_2, …, i_n, так как это сводится на самом деле к упорядочению всех перестановок из n-1 символов, которое, по индуктивному предположению, можно начать с любой перестановки, в частности с перестановки i_2, … , i_n. В последней из полученных таким путем перестановок из n символов совершаем транспозицию символа i_1 с любым другим символом, например с i_2, и, начиная с вновь полученной перестановки, упорядочиваем нужным образом все те перестановки, у которых на первом месте стоит i_2. И в этом случае это сводится к упорядочению всех перестановок из n–1 символов (i_1, i_3, i_4, ... , i_n), которое по индуктивному предположению, можно начать с любой перестановки. В последней из полученных таким путем перестановок из n символов совершаем транспозицию символа i_2 с i_3. Теперь будем упорядочивать все те перестановки, у которых на первом месте стоит i_3 и так далее. Получаем n групп перестановок, в каждой группе по $(n-1)!$ перестановок:

$$\left.\begin{matrix} i_1 i_2 \ldots i_n \\ i_1 \ldots\ldots i_{s_1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ i_1 \ldots\ldots i_{l_1} \end{matrix}\right\}$$ $(n-1)!$ перестановок, где $s_1, \ldots , l_1$ принимают одно из значений 2, 3, ... , $n-1$.

$$\left.\begin{matrix} i_2 \ldots\ldots i_{s_2} \\ i_2 \ldots\ldots i_{t_2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ i_2 \ldots\ldots i_{l_2} \end{matrix}\right\}$$ $(n-1)!$ перестановок, где $s_2, t_2, \ldots , l_2$ принимают одно из значений 1, 3, ... , n.

и т.д.

$$\left.\begin{matrix} i_n \ldots\ldots i_{s_n} \\ i_n \ldots\ldots i_{t_n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ i_n \ldots\ldots i_{l_n} \end{matrix}\right\}$$ $(n-1)!$ перестановок, где $s_n, t_n, \ldots , l_n$ принимают одно из значений 1, 2, ... , $n-1$.

Всего $n(n-1)!=n!$ перестановок. Этим путем можно перебрать все $n!$ перестановок из n символов. Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает, что от любой перестановки из n символов можно перейти к любой другой перестановке из тех же символов при помощи нескольких транспозиций.

Теорема 1.3. Всякая транспозиция меняет четность перестановки.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы рассмотрим сначала случай, когда транспонируемые символы i и j стоят рядом, то есть перестановка имеет вид

$$\ldots , i, j, \ldots ,$$

где многоточия заменяют те символы, которые не затрагиваются транспозицией. Транспозиция превращает нашу перестановку в перестановку $\ldots, j, i, \ldots$, причем, понятно, в обеих перестановках каждый из символов i, j составляет одни и те же инверсии с символами, остающимися на месте. Если символы i и j раньше не составляли инверсии, то в новой перестановке появляется одна новая инверсия, т.е. число инверсий увеличивается на единицу. Если же i и j раньше составляли инверсию, то теперь она пропадает, т.е. число инверсий на единицу уменьшается. В обоих случаях четность перестановки меняется.

Пусть теперь между транспонируемыми символами i и j расположены s (s>0) символов, т.е. перестановка имеет вид

$$\dots\, i,\, k_1,\, k_2,\, \dots,\, k_s,\, j,\dots$$

Транспозицию символов i, j можно получить в результате последовательного выполнения $2s+1$ транспозиций соседних элементов. А именно, это будут транспозиции, переставляющие символы i и k_1, затем i (уже стоящее на месте символа k_1) и k_2 и так далее, пока i не займет место символа k_s. За этими s транспозициями следует транспозиция, перемещающая символы i и j, а затем s транспозиций символа j со всеми k, после чего j занимает место символа i, а символы k возвращаются на свои старые места. Таким образом, мы нечетное число раз меняли четность перестановки, а поэтому перестановки $\dots, i, k_1, k_2, \dots, k_s, j, \dots$ и $\dots, j, k_1, k_2, \dots, k_s, i, \dots$ имеют противоположные четности. Теорема доказана.

Из теорем 1.2 и 1.3 вытекает, что при $n \geq 2$ число четных перестановок из n символов равно числу нечетных, то есть равно $\frac{n!}{2}$.

Определим новое понятие, понятие подстановки n-й степени.

<u>Определение</u> 1.5. Всякое взаимно однозначное отображение A множества первых n натуральных чисел на себя называется подстановкой n-ой степени.

Всякая подстановка A может быть записана при помощи двух перестановок, подписанных одна под другой

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \alpha_{i_3} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix},$$

через α_i обозначается то число, в которое при подстановке A переходит в число i (i принимает значения 1, 2, … , n). Подстановка A обладает многими различными записями. Так при n=5 подстановка $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ может иметь другие записи, например, $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и так далее.

Во всех этих записях мы имеем одно и то же взаимно однозначное отображение множества из первых пяти натуральных чисел на себя. При этом отображении число 1 переходит в 4, число 2 переходит в 3, число 3 – в 2, число 4 - в 3, число 5 - в 1. Эту же подстановку мы можем записать в виде

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. с натуральным расположением чисел в верхней строке.

Также всякая подстановка n-ой степени A может быть записана в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

При такой записи различные подстановки отличаются друг от друга только перестановками, стоящими в нижней строке, и поэтому число подстановок n-ой степени равно числу перестановок из n символов, то есть равно $n!$

Примером подстановки n-ой степени служит тождественная подстановка

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix},$$

в которой на месте остаются все числа.

Рассмотрим произвольную запись

$$A=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \alpha_{i_1} & \alpha_{i_2} & \dots & \alpha_{i_n} \end{pmatrix}$$

некоторой подстановки n-й степени. Перестановки, составляющие верхнюю и нижнюю строки в этой записи, могут иметь или одинаковые, или противоположные четности. Переход к любой другой записи подстановки A можно осуществить путем последовательного выполнения нескольких транспозиций в верхней строке и соответствующих им транспозиций в нижней строке. Однако, совершая одну транспозицию в верхней строке (перестановке) записи A и одну транспозицию соответствующих элементов в нижней строке (перестановке) мы одновременно меняем четности обеих перестановок и поэтому сохраняем совпадение или противоположность этих четностей.

При всех записях подстановки A четности верхней и нижней строк совпадают, либо же при всех записях они противоположны.

<u>Определение</u> 1.6. Подстановка A называется четной (нечетной), если четности верхней и нижней строк совпадают (противоположны). В частности, тождественная подстановка E будет четной.

Если подстановка A записана в виде

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

то четность подстановки A будет определяться четностью перестановки α_1, α_2, ... , α_n. Отсюда следует, что число четных подстановок n-й степени равно числу нечетных, то есть равно $\frac{n!}{2}$.

Определению четности подстановки можно дать другие формы.

Определение 1.7. Подстановка A будет четной, если общее число инверсий в двух строках четно, и нечетной в противном случае.

Определение 1.8. Результат последовательного выполнения двух взаимно однозначных отображений множества 1, 2, ... , n на себя снова будет, некоторым взаимно однозначным отображением этого множества на себя, то есть подстановкой n-й степени, называемой произведением первой из заданных подстановок (первое отображение) на вторую.

Например: если даны подстановки третьей степени

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то } AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Действительно, при подстановке A число 1 переходит в 3, но при B число 3 переходит в 1 и так далее. Можно перемножить лишь подстановки одинаковой степени.

Умножение подстановок n-ой степени при $n \geq 3$ не коммутативно.

Из ассоциативности композиции отображений, вытекает, что умножение подстановок ассоциативно. Очевидно, что $EA=AE=A$.

Определение 1.9. Обратной для подстановки A называется подстановка той же степени A^{-1} такая, что $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Так для подстановки

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

обратной служит подстановка

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Если нам нужно решить уравнения в подстановках: а) $AX=B$; б) $XA=B$; в) $AXB=C$, то мы поступим таким образом: 1) в случае а) умножим обе части уравнения $AX=B$ слева (в виду не коммутативности умножения) на A^{-1}, получим, $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$, а так как умножение подстановок ассоциативно, то $(A^{-1}A)X=A^{-1}B$, $EX=A^{-1}B$, $X=A^{-1}B$ – решение уравнения $AX=B$; 2) в случае б) $XA=B$, $(XA)A^{-1}=BA^{-1}$, $X(AA^{-1})=BA^{-1}$, $X=BA^{-1}$; 3) в случае в) $AXB=C$, $A^{-1}(AXB)=A^{-1}C$, $XB=A^{-1}C$, $(XB)B^{-1}=(A^{-1}C)B^{-1}$, $X(BB^{-1})=A^{-1}CB^{-1}$, $X=A^{-1}CB^{-1}$.

Определение 1.10. Назовем транспозицией (если речь идет о подстановке), нечетную подстановку вида

$$\begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix},$$

которая получается из тождественной подстановки E при помощи одной транспозиции, производимой в нижней строке. Многоточиями заменены символы, остающиеся на месте. Условимся обозначать эту транспозицию символом (i, j). (В дальнейшем символ (i, j) мы назовем циклом длины два).

Применение транспозиции символов i, j к нижней строке подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ равносильно умножению подстановки A справа на подстановку $\begin{pmatrix} \dots & i & \dots & j & \dots \\ \dots & j & \dots & i & \dots \end{pmatrix}$, то есть на (i, j). Мы знаем, что все перестановки из n символов можно получить из одной из них, например, из 1, 2, … , n, последовательным выполнением транспозиций, поэтому всякая подстановка может быть получена из тождественной подстановки путем последовательного выполнения нескольких транспозиций в нижней строке, то есть путем последовательного умножения на подстановки вида (i, j). Можно утверждать, следовательно (опуская множитель E), что всякая подстановка представима в виде произведения транспозиций. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}=(12)(15)(34)=(14)(24)(45)(34)(13).$$

Всякую подстановку можно многими разными способами разложить в произведение транспозиций. Всегда можно добавить два одинаковых множителя вида $(i, j)(i, j)$, которые дают в произведении подстановку E, то есть, взаимно уничтожаются.

Новый способ определения четности подстановки основан на следующей теореме:

Теорема 1.4. При всех разложениях подстановки в произведение транспозиций четность числа этих транспозиций будет одна и та же, причем она совпадает с четностью самой подстановки.

Доказательство. Эта теорема будет доказана, если мы покажем, что произведение любых k транспозиций есть подстановка, четность которой совпадает с четностью k. Это утверждение доказываем по методу математической индукции. При k=1 это верно, так как всякая транспозиция есть нечетная подстановка. Пусть наше утверждение уже доказано для случая k–1 множителей. Тогда его справедливость для k множителей вытекает из того, что числа k–1 и k имеют противоположные четности, а умножение подстановки (в данном случае – произведение первых k–1 множителей – мы предположили, что это подстановка, четность которой совпадает с четностью числа k–1) на транспозицию равносильно выполнению этой транспозиции в нижней строке подстановки, то есть, меняет ее четность. Теорема доказана.

Согласно этой теореме, определить четность подстановки можно разложением подстановки в произведение транспозиций – их число определяет четность подстановки.

Рассмотрим подробнее один из способов разложения подстановки в произведение транспозиций. Он заключается в следующем: сначала разложим подстановку в произведение циклов, а затем каждый цикл разложим в произведение транспозиций. Для этого приведем новые определения и факты.

Определение 1.11. Циклической подстановкой или циклом называется такая подстановка, что при повторении ее достаточное число раз, всякий из действительно перемещаемых ею символов может быть переведен в любой другой из этих символов. Такова, например, подстановка восьмой степени

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 4 & 5 & 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Она действительно перемещает символы 2, 3, 6 и 8, причем переводит символ 2 в 8, символ 8 в 3, символ 3 в 6, а символ 6 снова в 2.

Для циклов употребляется следующая запись: действительно переставляемые символы записываются в круглых скобках друг за другом в том порядке, в каком они друг в друга переходят при повторении подстановки; начинается запись с любого из действительно перемещаемых символов, а последний символ считается переходящим в первый. Так, для указанного выше примера эта запись имеет вид (2836).

Число символов, действительно перемещаемых циклом, называется длиной цикла.

Два цикла n-й степени называются независимыми, если они не имеют общих действительно переставляемых символов. Понятно, что при перемножении независимых циклов порядок расположения множителей не влияет на результат.

Всякая подстановка может быть единственным способом разложена в произведение независимых циклов.

Практически разложение осуществляется следующим образом: начинаем с любого из действительно перемещаемых символов и выписываем за ними те символы, в которые он переходит при повторении подстановки, пока не вернемся к исходному символу. После этого "закрытия" цикла начинаем с одного из оставшихся действительно перемещаемых символов, получаем второй цикл и так далее. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 5\ 4).$$

Обратно, для всякой подстановки, заданной разложением в независимые циклы, можно найти запись в обычной форме (при условии, что степень этой подстановки известна). Например,

$$(1\ 3\ 7\ 2)(4\ 5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 1 & 7 & 5 & 4 & 6 & 2\end{pmatrix},$$

если известно, что степень этой подстановки есть 7.

Циклическая подстановка длины k при возведении в k степень дает тождественную подстановку E.

Пусть дана подстановка n-й степени и пусть s есть число независимых циклов в ее разложении плюс число символов, оставляемых ею на месте.

Определение 1.12. Разность $n–s$ называется декрементом этой подстановки.

Для рассмотренных выше примеров декремент равен соответственно 3 и 4.

Теорема 1.5. Четность подстановки совпадает с четностью декремента этой подстановки.

Доказательство. Заметим, что всякий цикл длины k можно представить в виде произведения k–1 транспозиций: $(i_1,\ i_2,\ \dots\ ,\ i_k)=(i_1,\ i_2)(i_1,\ i_3)\ \dots(i_1,\ i_k)$, а любую подстановку можно разложить в циклы. Каждый цикл разложить в произведение транспозиций. Число этих транспозиций будет совпадать с декрементом подстановки.

Действительно, пусть $A=(i_{11},i_{12},\dots,i_{1k_1})(i_{21},i_{22},\dots,i_{2k_2})\dots(i_{s1},i_{s2},\dots,i_{sk_s})$ – разложение произвольной подстановки A n-й степени в произведение s независимых циклов ($k_1+k_2+\dots+k_s=n$). Разложим эти циклы в произведение транспозиций $(i_{11},i_{12},\dots,i_{1k_1})=(i_{11},i_{12})(i_{11},i_{13})\dots(i_{11},i_{1k_1})$ – цикл длины k_1 разложили в произведение k_1–1 транспозиций $(i_{21},i_{22},\dots,i_{2k_2})=$ $=(i_{21},i_{22})(i_{21},i_{23})\dots(i_{21},i_{2k_2})$ – цикл длины k_2 разложили в произведение k_2–1 транспозиций. И так далее, последний s-й цикл длины k_s разложим в произведение k_s–1 транспозиций. таким образом, $A=(i_{11},i_{12})(i_{11},i_{13})\dots(i_{s1},i_{s2})\ \dots$ (i_{s1},i_{sk_s}). Суммарное число транспозиций в разложении подстановки A будет равно

$$(k_1–1)+(k_2–1)+\dots+(k_s–1)=(k_1+k_2+\dots+k_s) – (1+1+\dots+1)=n–s.$$

Было доказано, что произведение $n–s$ транспозиций есть подстановка, четность которой совпадает с четностью числа $n–s$. А так как $n–s$ – декремент подстановки, то доказано, что четность подстановки совпадает с четностью декремента этой подстановки. Теорема доказана.

1.2. Контрольные вопросы

1. Что такое перестановка из n символов?
2. Сколько существует различных перестановок из семи символов?
3. Что такое инверсия?
4. Что такое транспозиция (если речь идет о перестановках)?
5. Сколько существует четных перестановок из девяти символов?
6. Теорема о расположении всех перестановок из n символов.
7. Что такое подстановка n-й степени?
8. Сколько существует различных подстановок пятой степени?
9. Сколько существует нечетных подстановок шестой степени?
10. При каких значениях i и j подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & i & 1 & 7 & j & 5 & 3 \end{pmatrix}$ является четной?
11. Что такое транспозиция (если речь идет о подстановках)?
12. Какую четность имеет транспозиция?
13. Что мы называем произведением подстановок?
14. Какими свойствами обладает операция умножения подстановок?
15. Теорема о произведении k транспозиций.
16. Какая подстановка называется циклической?
17. В какой наименьшей степени циклическая подстановка длины k дает тождественную?
18. Как можно разложить в произведение транспозиций цикл длины k?
19. Что такое декремент?
20. Какова зависимость четности подстановки от декремента?

1.3. Решения типовых примеров

Пример 1. Определить число инверсий в перестановке 4, 3, 1, 2.

Решение. Первое число в данной перестановке есть 4, оно образует инверсию с числами 3, 1, 2. Переходим к следующему числу, 3. Оно образует инверсии с 1 и 2. Переходим к следующему числу, 1. Единица не образует инверсий ни с одним из последующих чисел.

Суммарное число инверсий равно: 3+2=5. Таким образом, в данной перестановке 5 инверсий.

Пример 2. Определить число инверсий в перестановках и указать общий признак тех n, для которых эта перестановка четна, и тех, для которых нечетная:

а) $1, 4, 2, 3, 5, 8, 6, 7, \ldots, 4n–3, 4n, 4n–2, 4n–1$;

б) $2, 6, \ldots, 4n–2, 3, 7, \ldots, 4n–1, 4, 8, \ldots, 4n, 4n–3, \ldots, 5, 1$.

Решение.

а) В этом примере перестановка из чисел $1, 2, 3, \ldots, 4n$. $4n$ чисел расположены в ряд таким образом: они разбиты на четверки чисел, где в каждой четверке на первом месте стоит число, которое при делении на 4 дает остаток 1; на втором месте стоит число, которое нацело делится на 4; на третьем месте – остаток 2; на четвертом месте – остаток 3. Числа каждой последующей четверки больше чисел любой предыдущей четверки. Общий вид четверки задан последней четверкой чисел в перестановке $4n–3, 4n, 4n–2, 4n–1$, где $n=1, 2, \ldots, n$ – номер четверки в нашем ряде. Запишем нашу перестановку, добавив третью и четвертую четверки чисел:
$1, 4, 2, 3, 5, 8, 6, 7, 4·3–3, 4·3, 4·3–2, 4·3–1, 4·4–3, 4·4, 4·4–2, 4·4–1, \ldots, 4n–3, 4n, 4n–2, 4n–1$, или $1, 4, 2, 3, |5, 8, 6, 7,| 9, 12, 10, 11,|13, 16, 14, 15,| \ldots,| 4n–3, 4n, 4n–2, 4n–1$. Заметим, что инверсии имеются только внутри четверок.

Подсчитаем инверсии в каждой четверке: в первой четверке – 2 инверсии; во второй – 2 инверсии; в третьей четверке – 2 инверсии; в четвертой – 2 инверсии и так далее в последней n-ой четверке – 2 инверсии. Таким образом, суммарное число инверсий $2+2+2+\ldots+2+2=2n$. $2n$ четное для любого n.

б) $4n$ чисел разбили на 4 группы и расположили эти группы таким образом: в первую группу записали все числа, которые при делении на 4 дают остаток 2 – это числа $2, 6, 10, 14, \ldots, 4n–2$ всего n чисел; вторая группа – числа, которые при делении на 4 дают остаток 3: $3, 7, 11, 15, \ldots, 4n–1$ – всего n чисел; в третью группу записаны все числа, которые нацело делятся на 4: $4, 8, 12, 16, \ldots, 4n$ – всего n чисел; в четвертую группу записаны все числа, которые при делении на 4 дают остаток 1, но эти числа (в отличие от трех первых групп, где числа были записаны в порядке возрастания) записали в убывающем порядке: $4n–3, 4n–7, \ldots, 13, 9, 5, 1$. Запишем еще раз нашу перестановку: $2, 6, 10, 14, 18, \ldots, 4n–2,|3, 7, 11, 15, 19, \ldots, 4n–1,|4, 8, 12, 16, 20, \ldots 4n,|4n–3, 4n–7, \ldots, 13, 9, 5, 1$.

Теперь найдем инверсии:

1) Подсчитаем число инверсий, которые образуют числа первой группы с числами второй, третьей и четвертой групп:

2 образует одну инверсию с числом 1;

6 – четыре инверсии (с числами 3, 4, 5, 1);

10 – семь инверсий (с числами 3, 7, 4, 8, 9, 5, 1);

14 – десять инверсий;

18 – тринадцать инверсий,

и так далее,

$4n$-2 – $3n$–2 инверсий (число $4n$–2 образует инверсию с каждым, стоящим за ним числом, кроме $4n$–1 и $4n$).

Суммарное число инверсий для чисел первой группы с числами второй, третьей, четвертой групп:

$$1+4+7+10+13+\ldots+3n-2 \text{ обозначим его } I_1.$$

Имеем сумму n членов арифметической прогрессии, разность которой равна 3.

$$I_1=(1+3n-2)n/2=(3n-1)n/2.$$

2) Подсчитаем число инверсий, которые образуют числа второй группы с числами третьей и четвертой групп:

3 – одну инверсию;

7 – три инверсии;

11 – пять инверсий;

15 – семь инверсий,

и так далее,

$4n$-1 – $2n$–1 инверсию (число $4n$–1 образует инверсию с каждым, стоящим за ним числом, кроме числа $4n$) .

Суммарное число инверсий обозначим:

$$I_2=(1+2n-1)n/2=n^2.$$

3) Подсчитаем число инверсий, которые образуют числа третьей группы с числами четвертой группы:

4 – одну инверсию;

8 – две инверсии;

12 – три инверсии,

и так далее,

$4n$ – n инверсий.

$$I_3=(1+n)n/2.$$

4) Подсчитаем инверсии в четвертой группе чисел:

$4n$–3 – n–1 инверсий;

$4n$–7 – n–2 инверсий,

и так далее,

13 – три инверсии;

9 – две инверсии;

5 – одну инверсию;

1 – ноль инверсий.

$$I_4=(n-1+0)n/2.$$

Общее число инверсий в данной перестановке: $I=I_1+I_2+I_3+I_4$;

$$I=(3n-1)n/2+n^2+(1+n)n/2+(n-1)n/2;$$

$$I=(7n^2-n)/2=n(7n-1)/2.$$

Остается выяснить, при каких значениях n эта перестановка четна, и при каких нечетна.

Рассмотрим четыре случая:

а) $n=4k$, где $k\in N$,

$I=4k(28k–1)/2=2k(28k–1)$ – четное число;

б) $n=4k+1$, где k принадлежит N,

$I=(4k+1)[7(4k+1)–1]/2=(4k+1)(28k+6)/2=(4k+1)(14k+3)$ – нечетное число;

в) $n=4k+2$, где k принадлежит N,

$I=(4k+2)(28k+13)/2=(2k+1)(28k+13)$ – нечетное число;

г) $n=4k+3$, где k принадлежит N,

$I=(4k+3)(28k+20)/2=(4k+3)(14k+10)$ – четное число.

Таким образом, при n, принадлежащем множеству $\{4, 8, 12, 16\ldots\}\cup\{3, 7, 11, 15,\ldots\}$ – наша перестановка четная, а при n, принадлежащем множеству $\{1, 5, 9, 13,\ldots\}\cup\{2, 6, 10, 14,\ldots\}$ – перестановка нечетная.

Проверим справедливость нашего решения для частных случаев, например: а) $n=1$ – имеем перестановку из четырех чисел 2, 3, 4, 1. Простым подсчетом выясняем, что в ней три инверсии (по нашей формуле $I=\frac{n(7n-1)}{2}$, $I=\frac{1(7\cdot 1-1)}{2}=3$ инверсии – верно);

б) $n=2$ – будет перестановка из восьми чисел 2, 6, 3, 7, 4, 8, 5, 1 – в ней $I=1+4+1+3+1+2+1=13$ (по формуле $I=\frac{2(14-1)}{2}=13$ инверсий – верно) и так далее.

Пример 3. Следующие подстановки разложить в произведение независимых циклов, в произведение транспозиций. Определить четность подстановки тремя способами:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 11 & 10 & 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$;

б) $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$

Решение.

а)

1) Подсчетом числа инверсий в верхней и нижней строках перестановки определяем, что подстановка четная (суммарное число инверсий – 18).

2) Разложим в произведение независимых циклов

$$A=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(6\ 11)(7\ 10\ 8\ 9).$$

Декремент равен $d=n–s=11–3=8$. По декременту подстановка тоже четная.

3) Разложим в произведение транспозиций (см. доказательство теоремы 1.5)

$$A= (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 5)(6\ 11)(7\ 10)\cdot(7\ 8)(7\ 9).$$

Подстановку A разложили в произведение восьми транспозиций. По числу транспозиций подстановка тоже четная. Таким образом, тремя способами установили, что подстановка четная.

б)

1) По числу инверсий в верхней и нижних строках, четность подстановки зависит от числа n. Если $n=2k$, то есть четное число, то подстановка четная, а если $n=2k+1$, то подстановка нечетная. (Суммарное число инверсий $3n$)

2) B можно разложить в произведение $2n$ циклов: $B=(13)(2)(46)(5)\ldots(3n\text{-}2\ 3n)(3n\text{--}1)$ (каждая тройка чисел дает два цикла). $d=3n–2n=n$. Таким образом, по декременту подстановка четная, если $n=2k$ и если $n=2k+1$, подстановка нечетная.

3) $B=(13)(46)(8\ \ 10)\ldots(3n\text{-}2\ \ 3n)$. B можно представить в произведение n транспозиций (каждая тройка чисел дает один цикл длины 2 (транспозиций) и один цикл длины один, то есть всего $2n$ циклов, из них n циклов длины два).

Можно доказать, что если некоторая степень цикла равна единице, то показатель степени делится на длину цикла.

Среди всех степеней подстановки, равных единице, наименьший показатель равен наименьшему общему кратному длин циклов, входящих в разложение подстановки.

Пример 4. Найти A^{100}, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Разложим A в произведение циклов $A=(1,3,4)(2,5,7)(6,10,8)(9)$. Наименьшее общее кратное длин циклов равно 3. Значит $A^3=E$, а тогда $A^{100} = A^{99}\cdot A = (A^3)^{33}\cdot A = = E\cdot A = A$.

Итак,

$$A^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Пример 5. Перемножить подстановки (из шести символов)

$$(16), (13), (24), (12), (34).$$

Решение.

$$(16)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$(24)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&4&3&2&5&6\end{pmatrix},\ (12)(34)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&5&6\end{pmatrix},$$

$$(16)(13)(24)(12)(34)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&1&5&4\end{pmatrix}.$$

1.4. Индивидуальные задания

1. Определить число инверсий в перестановках.

1) 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5;	16) 2, 4, 10, 1, 9, 8, 7, 6, 5, 3;
2) 2, 3, 4, 6, 7, 8, 1, 9, 5;	17) 3, 4, 10, 8, 7, 6, 5, 1, 2, 9;
3) 3, 4, 1, 2, 5, 7, 9, 8, 6;	18) 2, 1, 4, 3, 9, 10, 8, 7, 6, 5;
4) 1, 9, 7, 6, 5, 2, 3, 4, 8;	19) 5, 10, 9, 4, 8, 7, 6, 3, 2, 1;
5) 1, 8, 2, 7, 9, 3, 5, 6 ,4;	20) 6, 10, 8, 9, 7, 2, 1, 3, 4, 5;
6) 1, 4, 2, 5, 9, 8, 6 ,7, 3;	21) 8, 10, 9, 7, 1, 2, 3, 4, 6, 5;
7) 2 ,5, 1, 3, 9, 6 ,4, 7, 8;	22) 7, 1, 8, 2, 9, 3, 10, 4, 5, 6;
8) 3 ,6, 1, 2, 8, 5 ,9, 7, 4;	23) 10, 8, 9, 1, 2, 3, 7, 6, 4, 5;
9) 1, 8, 3 ,4, 2, 7, 6, 5, 9;	24) 10, 1, 8, 9, 2, 3, 4 ,7, 6, 5;
10) 2 ,9, 1, 7, 8, 6, 3 ,4, 5;	25) 8, 10, 9, 7, 1, 3, 6, 2, 4, 5;
11) 3 ,9 ,5, 1, 2, 4 ,8, 7, 6;	26) 10, 1, 9, 2, 5, 4, 6, 7, 3, 8;
12) 4, 3, 9, 1, 5, 2, 6, 7, 8;	27) 9, 10, 7, 8, 5, 6, 1, 2, 3 ,4;
13) 1, 9, 6 ,3, 2 ,5, 4, 7, 8;	28) 10, 1, 8, 7, 6, 9, 5, 4, 3, 2;
14) 4, 5, 9, 8, 1, 2, 7, 6, 3;	29) 9, 7, 8, 10, 6, 1, 2, 4, 3, 5;
15) 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5;	30) 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 10, 9.

2. В следующих перестановках определить число инверсий и указать общий признак тех чисел n, для которых эта перестановка чётна и тех, для которых она нечётна:

1) *a*) 1,3,4,5,2,6,8,9,10,7,…,5n-4,5n-2,5n-1,5n,5n-3;
   b) 1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,3,7,…,4n-1,4,8,…,4n;
2) *a*) 1,3,5,2,4,6,8,10,7,9,…,5n-4,5n-2,5n,5n-3,5n-1;
   b) 1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1,2,6,…,4n-2,4,8,…,4n;
3) *a*) 4,5,3,2,1,9,10,8,7,6,…,5n-1,5n,5n-2,5n-3,5n-4;
   b) 4n,…,8,4,4n-1,…,7,3,4n-2,…,6,2,4n-3,…,5,1;
4) *a*) 4,3,5,2,1,9,8,10,7,6,…,5n-1,5n-2,5n,5n-3,5n-4;
   b) 2,6,…,4n-2,3,7,…,4n-1,4,8,…,4n,4n-3,…,5,1;
5) *a*) 5,4,1,2,3,10,9,6,7,8,…,5n,5n-1,5n-4,5n-3,5n-2;
   b) 1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,3,7,…,4n-1,4n,…,8,4;
6) *a*) 1,4,5,2,3,6,9,10,7,8,…,5n-4,5n-1,5n,5n-3,5n-2;

b) 1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,4,8,…,4n,3,7,…,4n-1;

7) *a*) 5,4,1,3,2,10,9,6,8,7,…,5n,5n-1,5n-4,5n-2,5n-3;

b) 2,6,…,4n-2,1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1,4,8,…,4n;

8) *a*) 1,3,5,4,2,6,8,10,9,7,…,5n-4,5n-2,5n,5n-1,5n-3;

b) 2,6,…,4n-2,1,5,…,4n-3,4,8,…,4n,3,7,…,4n-1;

9) *a*) 1,3,4,2,5,6,8,9,7,10,…,5n-4,5n-2,5n-1,5n-3,5n;

b) 1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1,4,8,…,4n,2,6,…,4n-2;

10) *a*) 4,3,2,5,1,9,8,7,10,6,…,5n-1,5n-2,5n-3,5n,5n-4;

b) 1,5,…,4n-3,4,8,…,4n,2,6,…,4n-2,3,7,…,4n-1;

11) *a*) 4,1,2,5,3,9,6,7,10,8,…,5n-1,5n-4,5n-3,5n,5n-2;

b) 1,5,…,4n-3,4,8,…,4n,3,7,…,4n-1,2,6,…,4n-2;

12) *a*) 4,1,5,3,2,9,6,10,8,7,…,5n-1,5n-4,5n,5n-2,5n-3;

b) 1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1,4,8,…,4n,2,6,…,4n-2;

13) *a*) 4,5,2,3,1,9,10,7,8,6,…,5n-1,5n,5n-3,5n-2,5n-4;

b) 2,6,…,4n-2,4,8,…,4n,3,7,…,4n-1,1,5,…,4n-3;

14) *a*) 2,5,3,4,1,7,10,8,9,6,…,5n-3,5n,5n-2,5n-1,5n-4;

b) 2,6,…,4n-2,4,8,…,4n,1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1;

15) *a*) 2,4,1,5,3,7,9,6,10,8,…,5n-3,5n-1,5n-4,5n,5n-2;

b) 2,6,…,4n-2,3,7,…,4n-1,1,5,…,4n-3,4,8,…,4n;

16) *a*) 3,5,2,4,1,8,10,7,9,6,…,5n-2,5n,5n-3,5n-1,5n-4;

b) 4,8,…,4n,2,6,…,4n-2,1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1;

17) *a*) 3,5,4,1,2,8,10,9,6,7,…,5n-2,5n,5n-1,5n-4,5n-3;

b) 4,8,…,4n,2,6,…,4n-2,3,7,…,4n-1,1,5,…,4n-3;

18) *a*) 5,3,4,1,2,10,8,9,6,7,…,5n,5n-2,5n-1,5n-4,5n-3;

b) 4,8,…,4n,3,7,…,4n-1,1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2;

19) *a*) 4,2,5,1,3,9,7,10,6,8,…,5n-1,5n-3,5n,5n-4,5n-2;

b) 4,8,…,4n,3,7,…,4n-1,2,6,…,4n-2,1,5,…,4n-3;

20) *a*) 3,4,2,5,1,8,9,7,10,6,…,5n-2,5n-1,5n-3,5n,5n-4;

b) 4,8,…,4n,1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,4n-1,…,7,3;

21) *a*) 1,3,6,2,5,4,7,9,12,8,11,10,…,6n-5,6n-3,6n,6n-4,6n-1,6n-2;

b) 4,8,…,4n,1,5,…,4n-3,3,7,…,4n-1,4n-2,…,2,6;

22) *a*) 5,6,4,1,2,3,11,12,10,7,8,9,…,6n-1,6n,6n-2,6n-5,6n-4,6n-3;

b) 3,7,…,4n-1,1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,4n,…,8,4;

23) *a*) 5,4,6,1,2,3,11,10,12,7,8,9,…,6n-1,6n-2,6n,6n-5,6n-4,6n-3;

b) 3,7,…,4n-1,1,5,…,4n-3,4,8,…,4n,4n-2,…,6,2;

24) *a*) 4,5,6,1,2,3,10,11,12,7,8,9,…,6n-2,6n-1,6n,6n-5,6n-4,6n-3;

b) 3,7,…,4n-1,2,6,…,4n-2,1,5,…,4n-3,4n,…,8,4;

25) *a*) 4,6,5,1,2,3,10,12,11,7,8,9,…,6n-2,6n,6n-1,6n-5,6n-4,6n-3;

b) 3,7,…,4n-1,2,6,…,4n-2,4,8,…,4n,4n-3,…,5,1;

26) *a*) 6,4,5,1,2,3,12,10,11,7,8,9,…,6n,6n-2,6n-1,6n-5,6n-4,6n-3;

b) 3,7,…,4n-1,4,8,…,4n,1,5,…,4n-3,4n-2,…,6,2;

27) *a*) 4,5,6,1,3,2,10,11,12,7,9,8,…,6n-2,6n-1,6n,6n-5,6n-3,6n-4;

b) 3,7,…,4n-1,4,8,…,4n,2,6,…,4n-2,4n-3,…,5,1;

28) *a*) 6,5,4,1,3,2,12,11,10,7,9,8,…,6n,6n-1,6n-2,6n-5,6n-3,6n-4;

b) 1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,4,8,…,4n,4n-1,…,7,3;

29) *a*) 6,4,5,2,1,3,12,10,11,8,7,9,…,6n,6n-2,6n-1,6n-4,6n-5,6n-3;

b) 1,5,…,4n-3,2,6,…,4n-2,4n-1,…,7,3,4n,…,8,4;

30) *a*) 5,6,4,2,1,3,11,12,10,8,7,9,…,6n-1,6n,6n-2,6n-4,6n-5,6n-3;

b) 4n-3,…,5,1,2,6,…,4n-2,4n,…,8,4,4n-1,…,7,3.

3. Определить четность подстановок тремя способами (подсчетом числа инверсий, через декремент, разложением в произведение транспозиций).

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \dots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 5 & \dots & 3n-2 & 3n & 3n-1 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 3n-1 & 3n & 1 \end{pmatrix}$;

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 8 & 7 & 6 & \dots & 4n-3 & 4n & 4n-1 & 4n-2 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 6 & 5 & 7 & 8 & \dots & 4n-2 & 4n-3 & 4n-1 & 4n \end{pmatrix}$;

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 & \dots & 4n-1 & 4n & 4n-3 & 4n-2 \end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 & \dots & 4n & 4n-1 & 4n-3 & 4n-2 \end{pmatrix}$;

12) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 & \ldots & 4n & 4n-1 & 4n-2 & 4n-3 \end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-1 & 2n-2 & 2n-3 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

14) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2n & 1 \end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 8 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 3 & 2 & 5 & 4 & \ldots & 1 & 2n \end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 8 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 9 & \ldots & 3n-1 & 3n-2 & 3 \end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 8 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+1 & 3n+2 & 3n+3 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & \ldots & 1 & 3n+3 & 3n+2 \end{pmatrix}$;

18) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 8 & 4 & \ldots & 3n & 2 & 3n-2 \end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+4 & 3n+5 & 3n+6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n+5 & 3n+6 & 3n+4 \end{pmatrix}$;

20) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+1 & 3n+2 & 3n+3 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & \ldots & 3n+3 & 3n+2 & 3n+1 \end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+1 & 3n+2 & 3n+3 \\ 2 & 1 & 3n+3 & 5 & 4 & 3 & \ldots & 3n+2 & 3n+1 & 3n \end{pmatrix}$;

22) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+4 & 3n+5 & 3n+6 \\ 4 & 5 & 3 & 7 & 8 & 6 & \ldots & 1 & 2 & 3n+6 \end{pmatrix}$;

23) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+4 & 3n+5 & 3n+6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

24) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n+4 & 3n+5 & 3n+6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & \ldots & 3n+5 & 3n+4 & 3n+6 \end{pmatrix}$;

25) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 6n+1 & 6n+2 & 6n+3 & 6n+4 & 6n+5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & \ldots & 6n+1 & 6n+3 & 6n+4 & 6n+5 & 6n+2 \end{pmatrix}$;

26) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 7 & 5 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 6n-5 & 6n-4 & 6n-3 & 6n-2 & 6n-1 & 6n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & \ldots & 6n-4 & 6n-3 & 6n-5 & 6n-1 & 6n-2 & 6n \end{pmatrix}$;

27) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 7 & 5 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 5n-4 & 5n-3 & 5n-2 & 5n-1 & 5n \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & \ldots & 1 & 5n-2 & 5n-1 & 5n-3 & 5n \end{pmatrix}$;

28) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 5n-4 & 5n-3 & 5n-2 & 5n-1 & 5n \\ 2 & 1 & 8 & 5 & 4 & \ldots & 5n-3 & 5n-4 & 3 & 5n & 5n-1 \end{pmatrix}$;

29) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 5n-4 & 5n-3 & 5n-2 & 5n-1 & 5n \\ 6 & 2 & 8 & 5 & 4 & \ldots & 1 & 5n-3 & 3 & 5n & 5n-1 \end{pmatrix}$;

30) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 5n-4 & 5n-3 & 5n-2 & 5n-1 & 5n \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & \ldots & 5n-1 & 5n-2 & 5n-3 & 5n-4 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Решить уравнение в подстановках. Найти X^k.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&4&5&6&7&8&1&2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&3&6&5&4&8&7\end{pmatrix};$$

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&5&6&1&4&7&3&2\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&4&6&7&5&8&2&3\end{pmatrix}.$$

1) $A^{-1}X=B$, $k=225$; 2) $CXB=A$, $k=713$; 3) $CX=A$, $k=863$;
4) $AXC=B$, $k=619$; 5) $AX=D$, $k=281$; 6) $CXB=D$, $k=902$;
7) $DX=A$, $k=1003$; 8) $AXD=B$, $k=398$; 9) $A^{-1}X=D$, $k=344$;
10) $XC^{-1}=B$, $k=592$; 11) $CXD=A$, $k=442$; 12) $DX=C$, $k=526$;
13) $A^{-1}XA=B$, $k=538$; 14) $AX=C$, $k=611$; 15) $B^{-1}XC=A$, $k=279$;
16) $B^{-1}X=C$, $k=841$; 17) $CXA=D$, $k=184$; 18) $C^{-1}X=D$, $k=737$;
19) $ADX=B$, $k=456$; 20) $XD=C$, $k=835$; 21) $D^{-1}X=A$, $k=638$;
22) $AX=C^{-1}$, $k=150$; 23) $DXB^{-1}=A$, $k=540$; 24) $B^{-1}X=D$, $k=165$;
25) $B^{-1}X=A$, $k=777$; 26) $DXA=C$, $k=926$; 27) $CX=B$, $k=411$;
28) $AXB=C$, $k=384$; 29) $BX=D$, $k=1021$; 30) $A^{-1}XC=D$, $k=1110$.

5. Перемножить подстановки из восьмой степени:

1) (12)·(34)·(12345678)·(78);
2) (12)(786)·(243)·(5678);
3) (234)·(871245)·(34871)·(23);
4) (2847)·(184)·(2457)·(38176);
5) (87)·(248713)·(24587)·(13);
6) (28)(135)·(124)·(187);
7) (1234)·(78123)·(4876)·(27);
8) (2478)·(12345)·(246);
9) (13876)·(24613)·(24567);
10) (3487)·(2413)·(2456);
11) (3124)·(18375)·(1234);
12) (28761)·(14652)·(3487);
13) (12)·(23)·(45)·(56)·(67);
14) (23)·(34)·(67)·(81);
15) (123)·(124)·(125)·(126)·(278);
16) (124)·(348)·(1236874)·(23);
17) (2345)·(123876)·(24)·(386)·(1457);
18) (247)·(8123)·(14)·(245);
19) (258)·(34876)·(12874)·(34);
20) (24)·(87136)·(26)·(27)·(28);
21) (248)·(7816)·(2543);
22) (345)·(123)·(78165)·(23);
23) (387)·(127843)·(231684);
24) (34587)·(13567)·(23)·(12);
25) (3241)·(87615)·(34)·(876);
26) (12)·(13)·(25)·(38672);
27) (234)·(235)·(238)·(78);
28) (12)·(13)·(24)(3687);
29) (234)·(245)·(281)·(127);
30) (234)·(456)·(781)·(12478).

2. Определители *n*–го порядка

2.1. Основные понятия и теоремы

Введем понятие матрицы. Назовем матрицей таблицу, представляющую собой несколько n-мерных строк, записанных одна под другой:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A имеет m строк и n столбцов. При этом говорят, что ее размер $m\times n$. Матрицу размера $n\times n$ (таблица, содержащая одинаковое количество строк и столбцов) называют квадратной матрицей порядка n.

Пусть дана квадратная матрица порядка n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

<u>Определение</u> 2.1. Определителем d порядка n, соответствующим матрице (1), называется алгебраическая сумма $n!$ членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем член берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус – в противоположном случае.

Для записи определителя n–го порядка d, соответствующего матрице (1), будем употреблять символ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Определитель n-го порядка можно записать в виде: $d=\sum(-1)^I a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega}$, где суммирование ведется по всем подстановкам вида $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}$, а I – это общее число инверсий в данной подстановке.

Замечание 1. Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

<u>Определение</u> 2.2. Транспонированием матрицы (1) называется такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с тем же самым номером, т.е. переход от матрицы (1) к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Можно сказать, что транспонирование есть поворот матрицы (1) около главной диагонали. Соответственно говорят, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

получен транспонированием определителя (2).

Свойства определителей

1°. *Определитель не меняется при транспонировании.*

Доказательство. В самом деле, всякий член определителя (2) имеет вид

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega}, \tag{5}$$

где вторые индексы составляют некоторую перестановку из символов 1, 2, … , n. Однако все множители произведения (5) и в определителе (4) остаются в разных строках и разных столбцах, т.е. (5) служит членом и для транспонированного определителя. Верно и обратное, и поэтому определители (2) и (4) состоят из одних и тех же членов. Знак члена (5) в определителе (2) определяется четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \tag{6}$$

в определителе (4) первые индексы элементов указывают на номер столбца, вторые – на номер строки, поэтому члену (5) в определителе (4) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \omega \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Подстановки (6) и (7) – в общем случае различные, но имеют, очевидно, одну и ту же четность, а поэтому член (5) имеет в обоих определителях один и тот же знак. Таким образом, определители (2) и (4) являются суммами одинаковых членов, взятых с одинаковыми знаками, т. е. равными друг другу.

Замечание 2. Из свойства 1° вытекает, что всякое утверждение о строках определителя справедливо и для его столбцов и обратно, т. е. что *в определителе строки и столбцы равноправны.*

2°. *Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю*.

Доказательство. Действительно, пусть все элементы i-й строки определителя являются нулями. В каждый член определителя должен войти множителем один элемент из i-й строки, поэтому в нашем случае все члены определителя равны нулю.

3°. *Если один определитель получен из другого перестановкой двух строк, то все члены первого определителя будут членами и во втором, но с обратным знаком, т. е. от перестановки двух строк определитель лишь меняет свой знак*.

Доказательство. В самом деле, пусть в определителе (2) переставляются i-я и j-я строки, $i \neq j$, а все остальные строки остаются на месте. Мы получим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Если

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega} \tag{9}$$

есть член определителя (2), то все его множители и в определителе (8) остаются, очевидно, в разных строках и разных столбцах. Таким образом, определители (2) и (8) состоят из одних и тех же членов. Члену (9) в определителе (2) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \eta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \tag{10}$$

а в определителе (8) – подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \eta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \tag{11}$$

так как, например, элемент $a_{i\mu}$ стоит теперь в j-й строке, но остается в старом μ-м столбце. Подстановка (11) получается из подстановки (10) путем одной транспозиции в верхней строке, т.е. имеет противоположную четность. Отсюда следует, что все члены определителя (2) входят в определитель (8) с обратными знаками, т.е. определители (2) и (8) отличаются друг от друга лишь знаком.

4°. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю*.

Доказательство. В самом деле, пусть определитель равен числу d и пусть соответственные элементы его i-й и j-й строк ($i\neq j$) равны между собой. После перестановки этих двух строк определитель будет равен, ввиду свойства 3°, числу $-d$. Так как, однако, переставляются одинаковые строки, то определитель на самом деле не меняется, т. е. $d=-d$, откуда $d=0$.

5°. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число λ, то сам определитель умножится на λ.*

Доказательство. Пусть на λ умножены все элементы i-й строки. Каждый член определителя содержит ровно один элемент i-й строки, поэтому всякий член приобретает множитель λ, т. е. сам определитель умножается на λ.

6°. *Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, пусть элементы j-й строки определителя отличаются от соответствующих элементов i-й строки ($i\neq j$) одним и тем же множителем λ. Вынося этот общий множитель λ из j-й строки за знак определителя, мы получим определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю по свойству 4°.

7°. *Если все элементы i-й строки определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ij}=b_j+c_j,\ j=1,\dots,n,$$

то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме i-й, такие же, как и в заданном определителе, а i-я строка в одном из слагаемых состоит из элементов b_j, в другом – из элементов c_j.

Доказательство. Действительно, всякий член заданного определителя можно представить в виде:

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{i\mu}\dots a_{n\omega}=a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots(b_\mu+c_\mu)\dots a_{n\omega}=a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots b_\mu\dots a_{n\omega}+a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots c_\mu\dots a_{n\omega}.$$

Собирая вместе первые слагаемые этих сумм (с теми же знаками, какие имели соответствующие члены в заданном определителе), мы получим, очевидно, определитель n-го порядка, отличающийся от заданного определителя лишь тем, что в i-й строке вместо элементов a_{ij} стоят элементы b_j. Соответственно вторые слагаемые составляют определитель, в j-й строке которого стоят элементы c_j. Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \dots & b_n+c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение 2.3. Будем говорить, что i-я строка определителя есть *линейная комбинация* его остальных строк, если для всякой строки с номером j, $j=1, \dots ,i-1, i+1, \dots , n$, можно указать такое число λ_j, что, умножая j-ю строку на λ_j, а затем складывая все строки, кроме i-й (причем сложение строк следует понимать так, что складываются элементы всех этих строк в каждом столбце отдельно), мы получим i-ю строку. Некоторые из коэффициентов λ_j могут быть равными нулю, т.е. i-я строка будет на самом деле линейной комбинацией не всех, а лишь некоторых из оставшихся строк. В частности, если лишь один из коэффициентов λ_j отличен от нуля, мы получаем случай пропорциональности двух строк. Наконец, если строка состоит целиком из нулей, то она всегда будет линейной комбинацией остальных строк, – случай, когда все λ_j равны нулю.

8°. *Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен нулю.*

Доказательство. Пусть, например, i-я строка будет линейной комбинацией s других строк, $1 \le s \le n-1$. Всякий элемент i-й строки будет тогда суммой s слагаемых, а поэтому, применяя свойство 7°, мы представим наш определитель в виде суммы определителей, в каждом из которых i-я строка будет пропорциональна одной из других строк. По свойству 6° все эти определители будут равны нулю; равен нулю, следовательно, и заданный определитель.

9°. *Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.*

Доказательство. Пусть, в самом деле, к i-й строке определителя d прибавляется j-я строка, $i \ne j$, умноженная на число λ, т.е. в новом определителе всякий элемент i-й строки имеет вид $a_{is}+\lambda a_{js}$, $s=1, 2, \dots , n$. Тогда, на основании свойства 7°, этот определитель равен сумме двух определителей, из которых первый есть d, а второй содержит две пропорциональные строки и поэтому равен нулю.

Замечание 3. Определитель не меняется и при вычитании из одной его строки другой строки, умноженной на некоторое число. Определитель не меняется, если к одной из его строк прибавляется любая линейная комбинация других строк.

<u>Определение</u> 2.4. Пусть дан определитель d порядка n. Берем целое число k, удовлетворяющее условию $1 \le k \le n-1$, и в определителе d выберем произвольные k строк и k столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют матрицу порядка k. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка определителя d.

<u>Определение</u> 2.5. Пусть в определителе d n-го порядка взят минор $|M|$ порядка k. Если мы вычеркнем те строки и столбцы, на пересечении которых стоит этот минор, то остается минор $|M'|$ порядка $n-k$, который называется дополнительным минором для минора $|M|$.

<u>Определение</u> 2.6. Алгебраическим дополнением минора $|M|$ называется его дополнительный минор $|M'|$, взятый со знаком плюс или минус в зависимости от того, четна или нечетна сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор $|M|$ или, иными словами, число $(-1)^{s_M}\,|M'|$, где s_M – сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор $|M|$.

<u>Теорема</u> 2.1. Произведение любого минора $|M|$ k-го порядка на его алгебраическое дополнение в определителе d является алгебраической суммой, слагаемые которой, получающиеся от умножения членов минора $|M|$ на взятые со знаком $(-1)^{s_M}$ члены дополнительного минора $|M'|$, будут некоторыми членами определителя d, причем их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с какими они входят в состав определителя.

Доказательство. Доказательство этой теоремы начнем со случая, когда минор $|M|$ расположен в левом верхнем углу определителя:

$$d = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & M & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|,$$

т. е. в строках с номерами $1,2,\ \dots,k$ и в столбцах с такими же номерами. Тогда минор $|M'|$ будет занимать правый нижний угол определителя. Число s_M в этом случае будет четным:

$$s_M = 1+2+\dots+k+1+2+\dots+k = 2(1+2+\dots k),$$

поэтому алгебраическим дополнением для $|M|$ служит сам минор $|M'|$.

Берем произвольный член

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega} \tag{12}$$

минора $|M|$; его знак в $|M|$ будет $(-1)^I$, если I есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Произвольный член

$$a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\dots a_{n\beta_n} \tag{14}$$

минора $|M'|$ имеет в этом миноре знак $(-1)^{I'}$, где I' есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Перемножая члены (12) и (14), мы получим произведение n элементов

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{k\alpha_k}a_{k+1,\beta_{k+1}}a_{k+2,\beta_{k+2}}\dots a_{n\beta_n}, \tag{15}$$

расположенных в разных строках и разных столбцах определителя; оно будет, следовательно, членом определителя d. Знак члена (15) в произведении $|M|\,|M'|$ будет произведением знаков членов (12) и (14), т.е. $(-1)^I(-1)^{I'}=(-1)^{I+I'}$. Такой же знак имеет, однако, член (15) и в определителе d. Действительно, нижняя строка подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

составленной из индексов этого члена, содержит лишь $I+I'$ инверсий, так как никакое α ни с одним β не может составить инверсию: все α не больше k, все β не меньше $k+1$.

Этим доказан рассматриваемый нами частный случай теоремы. Переходим к рассмотрению общего случая, т.е. предположим, что минор $|M|$ расположен в строках с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, j_2, \dots j_k$, причем

$$i_1<i_2<\dots<i_k,\ j_1<j_2<\dots<j_k.$$

Переставляя строки и столбцы определителя, передвинем минор $|M|$ в левый верхний угол, причем так, чтобы дополнительный минор не изменился. Для этого переставим i_1-ю строку с (i_1-1)-й строкой, затем с (i_1-2)-й и т. д., пока i_1-я строка не займет место первой строки, при этом строки будем переставлять i_1-1 раз. Будем затем последовательно переставлять i_2-ю строку со строками, расположенные над нею, пока она не расположится непосредственно под i_1-й строкой, т. е. на месте, которое до начала всех преобразований занимала вторая строка, при этом строки будем переставлять (i_2-2) раза. Аналогичным образом

i_3-ю строку мы передвинем на место третьей строки и т. д., пока i_k-я строка не окажется на месте k-й строки. Всего при этом будем совершать

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\ldots+i_k)-(1+2+..+k)$$

транспозиций строк.

Минор $|M|$ расположен уже в первых строках нового определителя. Будем теперь последовательно переставлять столбцы определителя: n-й со всеми ему предшествующими, пока он не займет первого места, затем n–1-й, пока он не займет второго места, и т. д. Всего столбцы будут переставлены $(j_1+j_2+\ldots+j_k)-$ $-(1+2+...+k)$ раз.

После всех этих преобразований мы приходим к новому определителю d', в котором минор $|M|$ занимает левый верхний угол. Так как мы переставляли лишь соседние строки или столбцы, то взаимное расположение строк и столбцов, содержащих в определителе d минор $|M'|$, остается без изменения, а потому дополнительным к минору $|M|$ в определителе d' остается минор $|M'|$, занимающий, однако, уже правый нижний угол. Как доказано выше, произведение $|M||M'|$ является суммой некоторого количества членов определителя d', взятых с теми же знаками, с какими они входят в d'. Однако определитель d' получен из определителя d путем

$$[(i_1+i_2+\ldots+i_k)-(1+2+\ldots+k)]+[(j_1+j_2+\ldots+j_k)-(1+2+\ldots+k)]=s_M-2(1+2+..+k)$$

транспозиций строк и столбцов. Как мы знаем из свойств определителей, члены определителя d' отличаются от соответственных членов определителя d лишь знаком $(-1)^{S_M}$ (четное число 2(1+2+…+k) не будет влиять на знак). Отсюда следует, что произведение $(-1)^{S_M}|M||M'|$ состоит из некоторого количества членов определителя d, взятых с такими же знаками, какие они имеют в этом определителе. Теорема доказана.

<u>**Теорема**</u> **2.2.** (о разложении определителя). Определитель d равен сумме произведений всех элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения:

$$d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

Доказательство. Введём следующие обозначения: если a_{ij} – элемент определителя d, то через $|M_{ij}|$ обозначим дополнительный минор этого элемента, т.е. минор (n–1)-го порядка, получающийся после вычеркивания из определителя i-й строки и j-го столбца.

Далее, через A_{ij} обозначим алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т. е.

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

Как доказано в теореме 2.1, произведение $a_{ij}A_{ij}$ является суммой нескольких членов определителя d, входящих в эту сумму с теми же знаками, с какими они входят в состав определителя. Легко подсчитать число этих членов: оно равно числу членов в миноре $|M_{ij}|$, т.е. равно $(n–1)!$

Выбираем теперь любую i-ю строку определителя d и берем произведение каждого элемента этой строки на его алгебраическое дополнение:

$$a_{i1}A_{i1},\ a_{i2}A_{i2},\ldots a_{in}A_{in}. \tag{16}$$

Никакой член определителя d не может войти в состав двух разных из числа произведений (16): все члены определителя, входящие в произведение $a_{i1}A_{i1}$, содержат из i-й строки элемент a_{i1} и поэтому отличаются от членов, входящих в произведение $a_{i2}A_{i2}$, т. е. содержащих из i-й строки элемент a_{i2} и т. д.

С другой стороны, общее число членов определителя d, входящих во все произведения (16) есть:

$$(n–1)!n=n!$$

т. е. этим исчерпываются вообще все члены определителя d. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 2.3 (Лапласа). Пусть в определителе d порядка n произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1\le k\le n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю d.

Доказательство. Произведение любого минора k-го порядка $|M|$, расположенного в выбранных строках, на его алгебраическое дополнение состоит из $k!(n–k)!$ членов, так как минор k-го порядка $|M|$ состоит из $k!$ членов, а его алгебраическое дополнение, отличаясь, возможно, лишь знаком от минора порядка $n–k$, содержит $(n–k)!$ членов. С другой стороны, число миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных нами строках, равно числу

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Умножив $k!(n-k)!$ на $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, мы получаем, что сумма произведений всех миноров k-го порядка из выбранных строк на их алгебраическое дополнение состоит из $n!$ слагаемых. Таково же, однако, и общее число членов определителя d. Теперь остается доказать, что всякий член определителя d входит хотя бы один раз (а тогда и точно один раз) в рассматриваемую сумму произведений миноров на их алгебраические дополнения.

Пусть

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\omega}, \tag{17}$$

произвольный член определителя d. Возьмем отдельно произведение тех элементов из этого члена, которые принадлежат к выбранным нами строкам с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Это будет произведение

$$a_{i_1\alpha_{i_1}} a_{i_2\alpha_{i_2}} \ldots a_{i_k\alpha_{i_k}}, \tag{18}$$

k множителей стоящих в k различных столбцах, а именно, в столбцах с номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$. Эти номера столбцов вполне определяются, следовательно, заданием члена (17). Если мы обозначим через $|M|$ минор k-го порядка, стоящий на пересечении столбцов с этими номерами $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ и выбранных ранее строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$, то произведение (18) будет одним из членов минора $|M|$, а произведение всех элементов из члена (17), не вошедших в (18), членом его дополнительного минора. Для того, чтобы получить взятый нами член определителя с тем знаком, какой он имеет в определителе, остается, заменить дополнительный минор алгебраическим дополнением. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. (об определителе с нулями в правом верхнем углу). Если A и B – квадратные матрицы, то

$$\left|\begin{array}{c|ccc} & 0 & \ldots & 0 \\ A & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 0 & \ldots & 0 \\ \hline C & & B & \end{array}\right| = |A||B|.$$

2.2. Контрольные вопросы

1. Что называется определителем матрицы n-го порядка?
2. Сколько членов содержит определитель 5-го порядка?
3. При каком значении i и j произведение:
   $a_{13}a_{2i}a_{3j}a_{42}a_{55}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
   $a_{13}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{52}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "–";
   $a_{12}a_{2i}a_{31}a_{43}a_{5j}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
   $a_{14}a_{25}a_{3i}a_{4j}a_{53}$ входит в определитель 5-го порядка со знаком "–".
4. С каким знаком входит побочная диагональ в определитель:
   1) 102 порядка; 2) 97 порядка; 3) 202 порядка; 4) 192 порядка?
5. В каких случаях определитель равен нулю?
6. При каких преобразованиях определитель не меняется или меняет лишь свой знак?
7. Чему равен определитель матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & .a_{2,n-1} & 0 \\ \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

8. Что называется алгебраическим дополнением минора порядка r?
9. Найти алгебраическое дополнение минора, расположенного: 1) в 2 и 4 строке, в 1 и 3 столбце; 2) в 1 и 3 строке, 2 и 4 столбце; в определителе

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

10. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
11. Теорема о разложении определителя по i-строке.
12. Разложить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ по 3 столбцу; 2) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ по 3 строке.

13. Теорема Лапласа. Следствие.
14. Чему равна сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки?

2.3. Решения типовых примеров

Рассмотрим на примерах различные методы вычисления определителей n-го порядка.

1. *Метод приведения к треугольному виду.*

Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

Пример 1. Вычислить определитель порядка n

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим первую строку, умноженную на $(–x)$ ко всем остальным. Согласно свойству 9 определитель при этом не меняется, а значит

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

К первому столбцу прибавим все последующие столбцы, умноженные на $\frac{1}{x}$. Получим

$$d=\begin{vmatrix} \frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x \end{vmatrix}.$$

Мы получили треугольный вид, следовательно, определитель равен произведению элементов главной диагонали

$$d=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2 & \dots & 2 & 2 & -1 \\ 2 & \dots & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \dots & -1 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первой строке все остальные, тогда в первой строке все элементы будут равны $2(n-1)-1=2n-3$. Затем, согласно свойству 5 общий множитель элементов первой строки можно вынесем за знак определителя, т.е.

$$d=(2n-3)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & 2 & -1 & 2 \\ 2 & \dots & -1 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся тем, что в первой строке все элементы равны 1. Умножая первую строку на (–2) и прибавляя её ко всем остальным строкам, мы получим

$$d=(2n-3)\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \dots & -3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -3 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Побочная диагональ в определитель n-го порядка входит со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (это легко проверить, если подсчитать число инверсий в подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$). Следовательно,

$$d=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2n-3)(-3)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}3^{n-1}(2n-3).$$

Пример 3. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к (n–1)-му столбцу n-й, затем полученный (n–1)-й столбец прибавим к (n–2)-му, и т. д. Тогда получим определитель треугольного вида

$$d=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2}-1 & \frac{n(n+1)}{2}-3 & \dots & 2n-1 & n \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}=n!\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. *Разложение определителя по строке (столбцу).*

Этот метод заключается в применении теоремы 2.2.

Пример 1. Вычислить определитель d разложением по третьей строке, если

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & -7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Мы знаем, что имеет место, следующее разложение определителя по i-ой строке: $d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\dots+a_{in}A_{in}$, где A_{ij}, $j=\overline{1,n}$ – алгебраические дополнения элементов i-ой строки определителя. В нашем случае формула принимает вид $d=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}$, т.е. мы имеем следующее разложение:

$$d=5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 1 & 2\\ 7 & -1 & 4\\ -6 & 1 & 2\end{vmatrix}+(-9)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -3 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -5 & 2\\ -3 & 7 & 4\\ 4 & -6 & 2\end{vmatrix}+ \quad +$$

$$(-7)\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\ -3 & 7 & -1\\ 4 & -6 & 1\end{vmatrix}.$$

Вычисляя полученные определители третьего порядка, получим

$$d=5\cdot(-6)+9\cdot 12+2\cdot(-54)+7\cdot(-3)=-51.$$

Пример 2. Вычислить разложением по первому столбцу определитель

$$d=\begin{vmatrix}3 & 9 & 5 & 6\\ 2 & -8 & -8 & -5\\ 2 & 5 & 5 & 4\\ 2 & 10 & 8 & 7\end{vmatrix}.$$

Решение. Прежде чем разложить определитель по столбцу, преобразуем его, заменяя в первом столбце три элемента нулями. Мы это делаем для того, чтобы упростить вычисления.

Прибавляя третью строку, умноженную на (–1) ко всем остальным, получим

$$d=\begin{vmatrix}1 & 4 & 0 & 2\\ 0 & -13 & -13 & -9\\ 2 & 5 & 5 & 4\\ 0 & 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке первую, умноженную на (–2), получим

$$d=\begin{vmatrix}1 & 9 & 0 & 2\\ 0 & -13 & -13 & -9\\ 0 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по первому столбцу, содержащему лишь один, не равный нулю элемент (с суммой индексов 1+1=2, т. е. чётной), получим

$$d=\begin{vmatrix}-13 & -13 & -9\\ -3 & 5 & 0\\ 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Преобразуем полученный определитель. Прибавляя к первой строке третью, умноженную на 3, получим

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель в третьем столбце содержит лишь один, не равный нулю элемент (с суммой индексов 3+3, т. е. чётной). Поэтому его удобно разложить по третьему столбцу:

$$d=3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=3(10-12)=-6.$$

Замечание 4. Для упрощения вычислений определитель следует разлагать по тем строкам или столбцам, в которых содержится наибольшее количество нулевых элементов. Если же в определителе нет нулевых элементов или же их мало, то нужно выбрать одну из строк (один из столбцов) и, применяя свойства определителя, преобразовать ее (его) так, чтобы в ней все элементы, кроме одного, стали равны нулю.

Пример 3. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первому столбцу, тогда

$$d=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}(-n)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

В этом равенстве первый и второй определители имеют треугольный вид, поэтому первый определитель равен $n!$, а второй определитель равен произведению $(-1)(-2)$. . . $(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ Тогда получим: $d=n!+n!(-1)^{n+2+n-1}=n!\left(1+(-1)^{2n+1}\right)=0.$

3. *Теорема Лапласа.*

Согласно теореме Лапласа в определителе d порядка n нужно выбрать k строк (или k столбцов), $1\le k\le n-1$. Тогда определитель d будет равен сумме произведений всех миноров k–го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.

Замечание 5. Для упрощения вычислений выбирать нужно те строки или столбцы, в которых содержится наибольшее число нулевых элементов.

Пример 1. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выберем третью и четвёртую строки. В них находится единственный минор отличный от нуля, поэтому

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+4+5}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами для вычисления определителей второго и третьего порядков, получим d=– (12–12+16+27)= –43.

Пример 2. Вычислить, применяя теорему Лапласа, определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Данный определитель имеет вид, указанный в следствии теоремы Лапласа. Поэтому мы можем воспользоваться этим следствием, и тогда

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-5, |B|=\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 5 \\ 0 & \dots & 5 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-3}=(-1)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}5^{n-3}.$$

Следовательно, $d=|A||B|=(-1)^{\frac{n^2-7n+14}{2}}5^{n-2}$.

4. *Метод выделения линейных множителей.*

Определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него букв. Преобразуя его, обнаруживают, что он делится на ряд линейных множителей, а значит (если эти множители взаимно просты) и на их произведение. Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

Пример. Вычислить определитель методом линейных множителей

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первой строке вторую, умноженную на (–1), а к третьей – четвёртую, умноженную на (–1):

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся тем, что в первой строке и в третьей строке стоит лишь по одному неравному нулю элементу, и обнулим элементы стоящие во втором и третьем столбцах:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке четвёртую, тогда

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из первой строки видно, что определитель делится на $x^2–1$, из второй строки видно, что определитель делится на 3, а из третьей строки видно, что он делится на $x^2–4$. Так как все эти множители взаимно просты, то определитель делится на их произведение $3(x^2–1)(x^2–4)$. В данном произведении член x^4 имеет знак «+», а в определителе он содержится со знаком «–», поэтому

$$d=–3(x^2–1)(x^2–4).$$

5. *Метод представления определителя в виде суммы определителей.*

Некоторые определители легко вычисляются путём разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк или столбцов (свойство 7).

Пример. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2+a & 1 & a & a \\ 2+b & 2 & b & a \\ 2+c & 3 & c & a \\ 2+d & 4 & d & a \end{vmatrix}.$$

Решение. Элементы первого столбца являются суммами двух слагаемых, согласно свойству 7 это даёт возможность данный определитель представить как сумму двух определителей:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a & a \\ 2 & 2 & b & a \\ 2 & 3 & c & a \\ 2 & 4 & d & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a & a \\ b & 2 & b & a \\ c & 3 & c & a \\ d & 4 & d & a \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый и четвёртый столбцы пропорциональны, следовательно, он равен нулю. Во втором определителе первый и третий столбцы равны, следовательно, он тоже равен нулю. Таким образом, d=0.

6. *Метод изменения элементов определителя*

Этот метод основан на следующем свойстве: если ко всем элементам определителя D прибавить одно и то же число x, то определитель увеличится на произведение числа x на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя D.

$$D'=D+x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\ .$$

Таким образом, вычисление определителя D' сводится к вычислению определителя D и суммы его алгебраических дополнений. Этот метод применяют в тех случаях, когда путём изменения всех элементов определителя на одно и то же число он приводится к такому виду, в котором легко сосчитать алгебраические дополнения всех элементов.

Пример. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & a_n \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко всем элементам число (–x), тогда

$$D'=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов определителя D, не лежащих на главной диагонали, равны нулю. Остальные алгебраические дополнения имеют положительный знак, поскольку все суммы индексов чётные. В нашем случае формула принимает вид:

$$D'=(a_1-x)\dots(a_n-x),$$

$$-x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=-x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x).$$

Тогда искомый определитель

$$D=D'-x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=(a_1-x)\dots(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x)=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right].$$

7. *Метод рекуррентных соотношений*

Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением. Этот метод используется для вычисления определителей вида

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

$D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0$ или, в общем виде $D_n-pD_{n-1}+qD_{n-2}=0$, где $p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$.

Пусть рекуррентное соотношение имеет вид:

$$D_n=pD_{n-1}-qD_{n-2},\ n>2, \tag{19}$$

где p, q – постоянные не зависящие от n.

При $q=0$ D_n вычисляется как член геометрической прогрессии: $D_n=p^{n-1}D_1$; здесь D_1 – определитель первого порядка данного вида, т. е. элемент определителя D_n, стоящий в левом верхнем углу.

Пусть $q>0$ и α, β – корни квадратного уравнения $x^2-px+q=0$. Тогда $p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$ и равенство (5) можно переписать так:

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \qquad (20)$$

или

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}). \qquad (21)$$

Предположим сначала, что $\alpha\neq\beta$. По формуле $(n-1)$–го члена геометрической прогрессии находим из равенств (20) и (21):

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1) \text{ и } D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1).$$

Откуда

$$D_n=\frac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1)-\beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}. \qquad (22)$$

Пусть теперь $\alpha=\beta$. Равенства (20) и (21) обращаются в одно и то же

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha\,(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),$$

откуда

$$D_n-\alpha D_{n-1}=A\alpha^{n-2}, \qquad (23)$$

где $A=D_2-\alpha D_1$.

Заменяя здесь n на $n-1$, получим:

$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=A\alpha^{n-3}, \text{ откуда } D_{n-1}=\alpha D_{n-2}+A\alpha^{n-3}.$$

Подставляя это выражение в равенство (23), найдём $D_n=\alpha^2 D_{n-2}+2A\alpha^{n-2}$. Повторяя тот же приём несколько раз, получим

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2},$$

где $A=D_2-\alpha D_1$.

Пример 1. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первой строке, тогда

$$D_n=2(-1)^{1+1}D_{n-1}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем равенстве разложим по первому столбцу, тогда D_n примет вид: $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. Значит $p=2$, $q=1$. Решая уравнение $x^2-2x+1=0$, находим α, β и придём к случаю, когда $\alpha=\beta$. Тогда по формуле $D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2}$, где $A=D_2-\alpha D_1$ находим, при $\alpha=1$, $D_n=D_1+(n-1)A$. В нашем случае $D_1=2$, $D_2=3$, тогда $A=3-2=1$. Следовательно, $D_n=2+(n-1)=n+1$.

Пример 2. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая d по последней строке, получим

$$D_n=2(-1)^{n+n}D_{n-1}+(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем равенстве разложим по $(n-1)$-му столбцу, тогда D_n примет вид: $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. Значит $p=2$, $q=1$. Решая уравнение $x^2-2x+1=0$, находим α, β и придём к случаю, когда $\alpha=\beta$. Тогда по формуле $D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2}$, где $A=D_2-\alpha D_1$ находим, при $\alpha=1$, $D_n=D_1+(n-1)A$. В нашем случае $D_1=3$, $D_2=-2$, тогда $A=-5$. Следовательно, $D_n=3+(n-1)(-5)=8-5n$.

8. Определитель Вандермонда

Определителем Вандермонда называется определитель вида

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \dots & a_n^{\ 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\ n-1} & a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \dots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что при любом n определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей a_i–a_j, где $1 \le j < i \le n$. Действительно при n=2 будет

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 .$$

Пусть наше утверждение уже доказано для определителей Вандермонда (n–1)-го порядка. Преобразуем определитель d следующим образом: к n-й (последней строке) прибавим (n–1)-ю, умноженную на ($-a_1$), затем к (n–1)-й прибавим (n–2)-ю, также умноженную на ($-a_1$), и т. д. Наконец ко второй строке прибавим первую, умноженную на ($-a_1$). Мы получим, что

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \dots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^{\ 2} - a_1 a_2 & a_3^{\ 2} - a_1 a_3 & \dots & a_n^{\ 2} - a_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{\ n-1} - a_1 a_2^{\ n-2} & a_3^{\ n-1} - a_1 a_3^{\ n-2} & \dots & a_n^{\ n-1} - a_1 a_n^{\ n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, мы придём к определителю (n–1)-го порядка; после вынесения из всех столбцов общих множителей за знак определителя он примет вид:

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \dots & a_n^{\ 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \dots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний множитель является определителем Вандермонда (n–1)-го порядка, т. е., по предположению, равен произведению всех разностей a_i–a_j для $2 \le j < i \le n$. Можно написать, следовательно, употребляя символ для обозначения произведения, что

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\dots(a_n - a_1) \prod_{2 \le i < j \le n} (a_i - a_j) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_i - a_j).$$

2.4. Индивидуальные задания

Даны определители:

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b & \dots & b & b & a \\ b & \dots & b & a & b \\ b & \dots & a & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & b & b & b \end{vmatrix},\ |A_2|=\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix},$$

$$|B_1|=\begin{vmatrix} i_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_{k+2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},\ |B_2|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_k & \dots & 0 & 0 \\ i_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_{k+2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$|B_3|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & i_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & i_{k-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & i_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},\ |B_4|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & i_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & i_{k-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i_k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_{k+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_n \end{vmatrix},$$

$$|B_5|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_2 & \dots & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & i_k \\ i_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{k+2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & i_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},\ |B_6|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & i_k \\ 0 & 0 & \dots & i_{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & i_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$|C_1|=\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_{n-1} & j_n \\ i_2 & -i_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_3 & -i_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i_n & -i_n \end{vmatrix},\ |C_2|=\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & j_n & j_{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 & -i_1 \\ 0 & 0 & \dots & i_2 & -i_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_n & -i_n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$|D_1|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & j_1 & i_1 \\ 0 & 0 & \dots & j_2 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & i_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{n-1} & i_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ i_n & 0 & \dots & 0 & 0 & j_n \end{vmatrix},\ |D_2|=\begin{vmatrix} i_1 & j_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_2 & j_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i_{n-1} & j_{n-1} \\ j_n & 0 & 0 & \dots & 0 & i_n \end{vmatrix},$$

$$|\mathrm{H}_1|=\begin{vmatrix} x+y & xy & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x+y & xy & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & d \end{vmatrix},\ |\mathrm{H}_2|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & d & xy & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{vmatrix},$$

$$|K_1|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix},\ |K_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},\ |K_3|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},\ |K_4|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

1. Вычислить определитель A_i, если:

1) i=1, a=1, b=2 2) i=2, a=1, b=3 3) i=1, a=1, b= –1 4) i=2, a=3, b=1
5) i=1, a=1, b=4 6) i=2, a=4, b=1 7) i=1, a=2, b=3 8) i=2, a=1, b=5
9) i=1, a=2, b=4 10) i=2, a=3, b=2 11) i=1, a=4, b=2 12) i=2, a=1, b=6
13) i=1, a=3, b=5 14) i=2, a=4, b=3 15) i=1, a=1, b=7 16) i=2, a=6, b=3
17) i=1, a=5, b=3 18) i=2, a=6, b=2 19) i=1, a=3, b=4 20) i=2, a=0, b=3
21) i=1, a=5, b=4 22) i=2, a=6, b=1 23) i=1, a=2, b=7 24) i=2, a=0, b=4
25) i=1, a=2, b=6 26) i=2, a=5, b=2 27) i=1, a=4, b=5 28) i=2, a=5, b=1
29) i=1, a=3, b=6 30) i=2, a=2, b=5

2. Вычислить определитель B_j, если:

1) j=1, k=2, n=30 2) j=2, k=1, n=40 3) j=3, k=3, n=20
4) j=4, k=4, n=30 5) j=5, k=5, n=25 6) j=6, k=6, n=20

7) j=1, k=6, n=30 8) j=2, k=5, n=40 9) j=3, k=4, n=34
10) j=4, k=3, n=33 11) j=5, k=2 12) j=6, k=10,
13) j=1, k=5, 14) j=2, k=2 15) j=3, k=3,
16) j=4, k=4 17) j=5, k=5 18) j=6, k=6, n=40
19) j=1, k=n-2 20) j=2, k=3, n=19 21) j=3, k=38, n=40
22) j=4, k=20, n=30 23) j=5, k=10, n=30 24) j=6, k=39, n=40
25) j=1, k=5, n=25 26) j=2, k=10, n=20 27) j=3, k=20, n=30
28) j=4, k=2, n=20 29) j=5, k=3, n=40 30) j=6, k=4, n=24

3-4. Вычислить определитель C_i, D_i если:

1) $i=1,\ i_k=1,\ k=\overline{1,n}$ 2) $i=2,\ j_k=3^k,\ k=\overline{1,n}$ 3) $i=1,\ j_k=k,\ i_k=1,\ k=\overline{1,n}$
4) $i=2,\ i_k=3,\ j_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 5) $i=1,\ i_k=k^2,\ j_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 6) $i=2,\ i_k=2^k,\ j_k=1,\ k=\overline{1,n}$
7) $i=1,\ i_k=3^k,\ k=\overline{1,n}$ 8) $i=2,\ i_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 9) $i=1,\ i_k=k^2,\ k=\overline{1,n}$
10) $i=2,\ i_k=2^k,\ k=\overline{1,n}$ 11) $i=1,\ j_k=n-k,\ k=\overline{1,n}$ 12) $i=2,\ j_k=1,\ k=\overline{1,n}$
13) $i=1,\ i_k=2k,\ k=\overline{1,n}$ 14) $i=2,\ i_k=3+k,\ k=\overline{1,n}$ 15) $i=1,\ i_k=k-1,\ k=\overline{1,n}$
16) $i=2,\ i_k=k+1,\ k=\overline{1,n}$ 17) $i=1,\ i_k=3k,\ k=\overline{1,n}$ 18) $i=2,\ j_k=3k,\ k=\overline{1,n}$
19) $i=1,\ j_k=j,\ k=\overline{1,n}$ 20) $i=2,\ j_k=2,\ k=\overline{1,n}$ 21) $i=1,\ j_k=k^2,\ k=\overline{1,n}$
22) $i=2,\ j_k=3^k,\ k=\overline{1,n}$ 23) $i=1,\ j_k=1,\ k=\overline{1,n}$ 24) $i=2,\ j_k=k+1,\ k=\overline{1,n}$
25) $i=1,\ i_k=j_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 26) $i=2,\ i_k=j_k=k^2,\ k=\overline{1,n}$ 27) $i=1,\ i_k=j_k=k+1,\ k=\overline{1,n}$
28) $i=2,\ i_k=j_k=1,\ k=\overline{1,n}$ 29) $i=1,\ i_k=j_k=k-1,\ k=\overline{1,n}$ 30) $i=2,\ i_k=j_k=k^3,\ k=\overline{1,n}$

5. Вычислить определитель H_i, если:

1. i=1, x=1, y=2, a=1, b=2, c=1, d=2
2. i=2, x=1, y=1, a=2, b=3, c=1, d=2
3. i=1, x=1, y=3, a=2, b=3, c=2, d=2
4. i=1, x=1, y=2, a=1, b=3, c=1, d=2
5. i=2, x=2, y=3, a=1, b=2, c=1, d=3
6. i=1, x=2, y=3, a=1, b=2, c=3, d=1
7. i=1, x=2, y=1, a=2, b=3, c=1, d=2
8. i=2, x=3, y=2, a=1, b=2, c=2, d=1
9. i=1, x=2, y=3, a=1, b=2, c=1, d=1
10. i=2, x=2, y=1, a=1, b=1, c=2, d=3
11. i=1, x=3, y=1, a=1, b=0, c=2, d=3
12. i=2, x=3, y=4, a=2, b=1, c=0, d=3
13. i=1, x=3, y=3, a=1, b=4, c=1, d=2
14. i=2, x=3, y=1, a=2, b=0, c=1, d=3
15. i=1, x=2, y=2, a=1, b=3, c=0, d=1
16. i=2, x=2, y=4, a=2, b=0, c=1, d=3
17. i=1, x=2, y=1, a=4, b=1, c=0, d=2
18. i=2, x=2, y=5, a=3, b=3, c=1, d=2
19. i=1, x=2, y=5, a=1, b=3, c=1, d=1
20. i=2, x=2, y=3, a=1, b=2, c=1, d=3
21. i=1, x=4, y=-3, a=1, b=2, c=2, d=3
22. i=2, x=4, y=1, a=1, b=0, c=1, d=2
23. i=1, x=4, y=-2, a=3, b=1, c=2, d=0
24. i=2, x=5, y=-1, a=1, b=0, c=2, d=1
25. i=1, x=5, y=-2, a=1, b=1, c=3, d=2
26. i=2, x=5, y=-3, a=1, b=4, c=2, d=3
27. i=1, x=-1, y=1, a=1, b=3, c=1, d=2
28. i=2, x=-1, y=3, a=0, b=1, c=3, d=2
29. i=1, x=-1, y=2, a=1, b=2, c=3, d=1
30. i=2, x=-2, y=1, a=1, b=1, c=3, d=2

6. Вычислить определитель K_i, разлагая по j-ой строке в нечётных вариантах, по j-му столбцу в чётных вариантах, если:

1) i=1, j=1	2) i=1, j=1	3) i=2, j=1	4) i=2, j=1	5) i=3, j=1	6) i=3, j=1
7) i=1, j=2	8) i=1, j=2	9) i=2, j=2	10) i=2, j=2	11) i=3, j=2	12) i=3, j=2
13) i=4, j=3	14) i=4, j=3	15) i=2, j=3	16) i=2, j=3	17) i=3, j=3	18) i=3, j=3
19) i=1, j=4	20) i=1, j=4	21) i=2, j=4	22) i=2, j=4	23) i=3, j=4	24) i=3, j=4
25) i=4, j=1	26) i=4, j=1	27) i=4, j=2	28) i=4, j=2	29) i=4, j=3	30) i=4, j=3

3. Матрицы и системы линейных уравнений

3.1. Основные понятия и теоремы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ или, коротко, $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$.

Определение 3.1. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется ее рангом.

Имеется правило вычисления ранга матрицы (метод окаймляющих миноров): при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка $|M|$, отличный от нуля, то вычисляют лишь миноры (k+1)-порядка, окаймляющие минор $|M|$, и если все они равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Также ранг матрицы можно вычислить приведением к ступенчатому виду.

Определение 3.2. Ступенчатой называется матрица A, обладающая следующими свойствами:

1) если k-я строка нулевая, то (k+1)-я строка также нулевая.
2) Если первые ненулевые элементы k-й и (k+1)-й строк располагаются в столбцах с номерами l_k и l_{k+1} соответственно, то $l_k < l_{k+1}$.

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от первого ненулевого элемента какой-нибудь строки, являются нулями. Происхождение названия нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 3.3. Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матриц называются следующие виды преобразований:

1. Перемена местами двух строк (столбцов) матрицы.
2. Прибавление к какой-либо строке (столбцу) матрицы другой ее строки (столбца), умноженной на некоторое число.
3. Умножение некоторой строки (столбца) на отличное от нуля число.

Теорема 3.1. Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований строк (столбцов) можно превратить в ступенчатую матрицу.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу строк матрицы. Если имеется всего одна строка, то матрица уже ступенчатая, ибо оба условия, входящие в определение ступенчатой матрицы, выполнены тривиальным образом (ввиду отсутствия второй строки). Пусть теперь матрица A содержит m строк, где $m \geq 2$. Предположим, что матрицу с числом строк, меньшим m, можно привести к ступенчатому виду. Если матрица A состоит из нулей, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть хоть один ненулевой элемент. Ненулевой элемент располагается в какой-то строке. Значит, в нашей матрице есть ненулевые строки. Выберем ту, в которой первый ненулевой элемент располагается в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_1. Применив преобразование первого типа, перенесем эту строку на первое место. Тогда матрица A примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{1k_1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{2k_1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{mk_1} & \ldots \end{pmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования второго типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\dfrac{b_{2k_1}}{b_{1k_1}}$, к третьей строке – первую, умноженную на $-\dfrac{b_{3k_1}}{b_{1k_1}}$ и так далее. После применения m–1 таких элементарных преобразований добьемся того, что в k_1-м столбце всюду, кроме первой строки, будут нули:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Отбросим первую строку. Оставшаяся матрица имеет m-1 строку. По индуктивному предположению ее можно привести к ступенчатому виду

$$G=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & D \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть первые ненулевые элементы строк ступенчатой матрицы G располагаются в столбцах с номерами k_2, … , k_r. Тогда $k_2<\ \dots\ <k_r$, по определению ступенчатой матрицы. Но осуществляя элементарные преобразования уменьшенной матрицы, можно считать, что мы делаем элементарные преобразования матрицы C, не использующие первой строки. Поскольку при выполнении этих элементарных преобразований нули, стоявшие в первых k_1 столбцах матрицы C, не могли исчезнуть, то $k_1<k_2$. Таким образом, мы получили матрицу

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & D \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

удовлетворяющую второму свойству определения ступенчатой матрицы. Если же в H имеется нулевая строка, то она не совпадает с первой строкой, так как $b_{1k_1}\neq 0$, и, значит, лежит в матрице G. Но G ступенчатая. Следовательно, ниже нулевой строки лежат нулевые строки. Таким образом, H – ступенчатая матрица. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк.

Доказательство. Если для перехода от A к B использовано одно элементарное преобразование первого типа, то утверждение очевидно. Допустим, что от A к B перешли, используя одно элементарное преобразование второго типа, т. е.

$$(i\text{-я строка в } B)=(i\text{-я строка в } A)+\lambda(j\text{-я строка в } A),$$

а каждая из остальных строк матрицы B совпадает с соответствующей строкой матрицы A. Таким образом, $b_{ik}=a_{ik}+\lambda a_{jk}$ для каждого номера k. Если теперь к i-й строке матрицы B прибавить ее j-ю строку, умноженную на $(-\lambda)$, то в получившейся после этого матрице на месте i-ой строки и k-го столбца окажется элемент

$$b_{ik}+(-\lambda)b_{jk}=(a_{ik}+\lambda a_{jk})+(-\lambda a_{jk})=a_{ik}.$$

Поскольку элементы получившейся матрицы, расположенные в строках, отличных от i-й, совпадают с соответствующими элементами матрицы A, то и вся она совпадает с A, так что справедливость теоремы в случае применения одного элементарного преобразования полностью доказана. Допустим теперь, что переход от A к B осуществлен с использованием t элементарных преобразований, где t>1. Обозначим через C матрицу, возникшую после применения первого из этих элементарных преобразований. Тогда от C к B перешли, используя t-1 элементарное преобразование. В силу индуктивного предположения, используя элементарные преобразования, можно перейти от B к C, а, как установлено в начале доказательства, точно так же можно перейти и от C к A. Таким образом, применение элементарных преобразований позволяет перейти от B к A, что и требовалось. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.3. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Сначала будет доказана следующая лемма.

<u>Лемма</u>. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то (ранг B)$\le$(ранг A).

Доказательство леммы будем вести индукцией по числу примененных элементарных преобразований. Допустим, что использовано только одно элементарное преобразование. Пусть (ранг A)=r. Для доказательства достаточно убедиться, что всякий минор $|M|$ матрицы B порядка, больше чем r, равен нулю. Если от матрицы A к матрице B перешли переменой местами двух строк, то матрица M либо совпадает с некоторой подматрицей M^* матрицы A, порядок которой больше чем r, либо отличается от такой подматрицы M^* только порядком строк. Поскольку (ранг A)=r, то $|M^*|$=0, а значит $|M|=\pm|M^*|=0$ (от перестановки местами строк определитель меняет лишь свой знак). Далее допустим, что переход к матрице B осуществлен прибавлением к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на λ. Возможны три случая: 1) i-я строка не проходит через подматрицу M; 2) как i-я, так и j-я строки проходят через подматрицу M; 3) i-я строка проходит через подматрицу M, а j-я не проходит. В первом случае подматрица M совпадает с соответствующей подматрицей матрицы A и, следовательно, $|M|$=0. Во втором случае имеем

$$|M|=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1}+\lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_s}+\lambda a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0,$$

так как последний определитель является минором матрицы *A*. В третьем случае запишем

$$|M|=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1}+\lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_1}+\lambda a_{js} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_1} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & \lambda a_{js} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Но первый из этих определителей является минором матрицы *A*, а второй лишь порядком строк отличается от некоторого минора матрицы *A*. Следовательно, оба этих определителя равны нулю, откуда $|M|$=0. Таким образом, когда использовано лишь одно элементарное преобразование, лемма доказана. Допустим, что использовано *m* преобразований. Пусть *C* – матрица, полученная после осуществления $m-1$ преобразования. Учитывая индуктивное предположение, имеем

(ранг *B*)$\le$(ранг *C*) $\le$(ранг *A*),

что и требовалось. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3. Допустим, что от матрицы *A* к матрице *B* перешли конечным числом элементарных преобразований. Ввиду леммы (ранг *B*)$\le$(ранг *A*). Но если элементарные преобразования позволяют перейти от *A* к *B*, то, согласно теореме 3.2, от *B* к *A* также можно перейти конечным числом элементарных преобразований. Применяя еще раз лемму, получаем, что (ранг *A*)$\le$(ранг *B*). Нужное равенство сразу следует из полученных неравенств. Теорема доказана.

Теорема 3.4. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть ступенчатая матрица *A* содержит *r* ненулевых строк. Тогда, отметив ненулевые строки и столбцы, в которых располагаются первые ненулевые элементы этих строк, получим треугольную матрицу. Ее определитель равен произведению диагональных элементов, отличных от нуля, и, следовательно, отличен от нуля, так что матрица *A* содержит ненулевой минор порядка *r*. Всякий же минор большего порядка содержит нулевую строку и поэтому обращается в нуль. Таким образом, (ранг *A*)=*r*. Теорема доказана.

Теорема 3.5. Ранг матрицы не меняется при транспонировании: (ранг *A*)=(ранг A').

Доказательство. Пусть (ранг A)=r. Рассмотрим в матрице A' произвольный минор порядка $s>r$. Пусть он является определителем подматрицы M. Тогда M' – подматрица матрицы A. Поскольку ее порядок больше r, то минор $|M'|=0$, а значит, и $|M|=0$. Таким образом, все миноры матрицы A', порядок которых больше r, обращаются в нуль. Следовательно, (ранг A')$\le r$=(ранг A). Это же неравенство для матрицы A дает (ранг A)=(ранг A'')$\le$(ранг A'). Таким образом, (ранг A)=(ранг A'). Теорема доказана.

Далее рассмотрим основные действия (алгебраические операции) над матрицами.

Матрицы одного и того же размера можно складывать, причем если $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$, то $A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|$ $(i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n})$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Любую матрицу можно умножить на число, при этом каждый элемент матрицы нужно умножить на это число.

В частности, $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицу размера $m\times n$ можно умножить на матрицу размера $n\times k$.

<u>Определение</u> 3.4. Произведением матрицы $A=\|a_{ij}\|$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ на матрицу $B=\|b_{jk}\|$ $(j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p})$ называется такая матрица $C=\|c_{ik}\|$ $(i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,p})$, для которой каждый ее элемент c_{ik} из i–й строки и k–го столбца находится по формуле:

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}.$$

Произведение A на B обозначается AB.

Из определения произведения матриц A и B вытекает:

1) матрицу A лишь тогда можно умножить на матрицу B, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) матрица произведения AB имеет столько строк, сколько первый сомножитель (матрица A), и столбцов столько, сколько их имеет второй сомножитель (матрица B).

Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, т.е. $AB\neq BA$. Равенство $AB=BA$ может выполняться лишь тогда, когда A и B – квадратные матрицы одинаковых порядков, однако оно может оказаться неверным уже для квадратных матриц второго порядка.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad т.е.\quad AB\neq BA.$$

<u>Теорема</u> 3.6. $(AB)C=A(BC)$ и $(AB)'=B'A'$.

Доказательство. Сначала убедимся, что из существования левой части каждого из этих равенств следует существование правой и наоборот. Например, если существует произведение $(AB)C$, то матрицы A и B имеют размеры $m\times n$ и $n\times p$ соответственно. Но тогда AB имеют размеры $m\times p$, откуда вытекает, что матрица C должна иметь размеры $p\times q$. После этого ясно, что произведение BC существует и имеет размерность $n\times q$. Но тогда существует и произведение $A(BC)$. При этом как $(AB)C$, так и $A(BC)$ имеют размеры $m\times q$. Далее полагаем $U=AB$, $V=BC$, $S=(AB)C$, $T=A(BC)$ и убеждаемся, что

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{p}u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj})=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=t_{ij}.$$

Этим доказано первое равенство. При этом мы используем следующую общеупотребительную символику. Всякая сумма вида $a_1+a_2+\ldots+a_n$ обозначается через $\sum_{i=1}^{n}a_i$. Если же рассматривается сумма, слагаемые которой a_{ij} снабжены двумя индексами, причем i=1, 2, … , n, j=1, 2, … , m, то можно сначала взять суммы элементов с фиксированным первым индексом, т.е. суммы $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$, где i=1, 2, … , n, а затем сложить все эти суммы. Мы получим тогда для суммы всех элементов a_{ij} запись $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$.

Можно было бы, однако, вначале складывать слагаемые a_{ij} с фиксированным вторым индексом, а затем уже складывать полученные суммы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij},$$

т.е. в двойной сумме можно менять порядок суммирования.

Для доказательства второго положим $C=AB$ и $D=B'A'$. Тогда

$$c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a'_{kj}b'_{ik}=\sum_{k=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj}=d_{ij},$$

что и требовалось. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.7. Умножение матрицы A слева (справа) на диагональную матрицу

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

равносильно умножению строк (столбцов) матрицы A на элементы $d_1, d_2, \dots, d_n$ соответственно.

Доказательство. Если $DA=C$, то $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj}=d_{ii}a_{ij}=d_i a_{ij}$ для каждого i. Утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. Если

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то $AE=A$ и $EB=B$ всякий раз, когда умножение возможно.

Определение 3.5. Назовем элементарными матрицы, полученные из матрицы E применением одного элементарного преобразования. Это будут матрицы вида:

$$S(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & & & & \\ . & & 1 & & & & & & & & \\ . & & & 0 & . & . & . & 1 & & & \\ . & & & . & 1 & & & . & & & \\ . & & & . & & \dots & & . & & & \vdots \\ . & & & . & & & 1 & . & & & \\ . & & & 1 & . & . & . & 0 & & & \\ . & & & & & & & & 1 & & \\ . & & & & & & & & & \dots & \\ 0 & & & & & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T(i,j,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & & 0 \\ & \dots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \lambda & & \\ \vdots & & . & \dots & . & & \vdots \\ & & 0 & . & 1 & & \\ & & & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & & 0 \\ & \dots & & & & & \\ & & \lambda & & & & \\ \vdots & & & \dots & & & \vdots \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.8. Умножение матрицы A на матрицу $S(i, j)$ слева (справа) равносильно перемене местами i-й и j-й строк (i-го и j-го столбцов).

Доказательство. Положив $C=S(i, j)A$, будем иметь

$$c_{pq}=\sum_k s_{pk}a_{kq}=\begin{cases} s_{ij}a_{jq}=a_{jq}, \text{ если } p=i \\ s_{ji}a_{iq}=a_{iq}, \text{ если } p=j \\ s_{pp}a_{pq}=a_{pq}, \text{ если } p\neq i, j \end{cases}$$

утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3.9. Умножение матрицы A на матрицу $T(i, j, \lambda)$ слева (справа) равносильно прибавлению к i-й строке (j-му столбцу) матрицы A ее j-й строки (i-го столбца), умноженной на λ.

Доказательство. Положив $C=T(i, j, \lambda)A$, будем иметь

$$c_{pq} = \sum_k t_{pk} a_{kq} = \begin{cases} t_{ii} a_{iq} + t_{ij} a_{jq} = a_{iq} + \lambda a_{jq}, \text{ если } p = i \\ t_{pp} a_{pq} = a_{pq}, \text{ если } p \neq i \end{cases}.$$

Утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 3.10. Ранг произведения двух матриц не превышает ранга каждого сомножителя: (ранг AB)$\leq$(ранг A), (ранг B).

Доказательства. Допустим, что матрица A имеет размеры $m\times n$, а B – размеры $n\times p$. Докажем сначала, что (ранг AB) $\leq$ (ранг A). Это очевидно, если (ранг A)=m, ибо матрица AB имеет размеры $m\times p$. Если же (ранг A)=$r<m$, то приведем матрицу A к ступенчатому виду S, используя элементарные преобразования строк. Ввиду теорем 3.8 и 3.9 можем записать

$$S=U_k\ldots U_1A,$$

где $U_1, \ldots ,U_k$ – элементарные матрицы. Но тогда

$$SB= U_k\ldots U_1AB$$

и теоремы 3.8 и 3.9 позволяют заключить, что от матрицы AB к матрице SB можно перейти, осуществляя элементарные преобразования строк. В силу теоремы 3.3

$$(\text{ранг } SB)\leq(\text{ранг } AB).$$

Далее, из теорем 3.3 и 3.4 вытекает, что все строки матрицы S, начиная с (r+1)-й, нулевые. Простой подсчет показывает, что то же самое верно и для строк матрицы SB. Следовательно,

$$(\text{ранг } AB)=(\text{ранг } SB)\leq r=(\text{ранг } A).$$

Теперь, учитывая теоремы 3.5 и 3.6, а также доказанное неравенство, получаем

$$(\text{ранг } AB)=(\text{ранг } (AB)')=(\text{ранг } (B'A'))\leq(\text{ранг } B')=(\text{ранг } B).$$

Теорема доказана.

Определение 3.6. Матрицы A и B, для которых выполняется равенство $AB=BA$, называются перестановочными.

Определение 3.7. Пусть A – квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $AA^{-1}= A^{-1}A=E$.

Обратная матрица существует только для невырожденных матриц. Данное утверждение следует из следующей теоремы.

Теорема 3.11. Если A – квадратная матрица порядка n и $|A|\neq 0$, то существует одна и только одна матрица B такая, что $AB=BA=E$.

Доказательство. Пусть $|A| \neq 0$, т.е. (ранг A)=n. Производя элементарные преобразования над строками, можно от матрицы A перейти к некоторой диагональной матрице D. Ввиду теорем 3.8 и 3.9

$$D = U_k \ldots U_1 A,$$

где U_1, … ,U_k – элементарные матрицы. С другой стороны, согласно теореме 3.4, имеем

$$(\text{ранг } D) = (\text{ранг } A) = n,$$

т.е. $|D| \neq 0$. Следовательно,

$$|D| = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{vmatrix},$$

где все d_i отлично от нуля. Положим

$$|U| = \begin{vmatrix} d_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^{-1} \end{vmatrix}$$

и $B=UU_1\ldots U_k$. Отсюда получим, что $BA=UU_k\ldots U_1A=UD=E$. Кроме того, $|A'| \neq 0$ и в силу доказанного $CA'=E$ для некоторой матрицы C. Ввиду теоремы 3.6 имеем $AC'=(CA')'=E'=E$. Отсюда $B=BE=B(AC')=(BA)C'=EC'=C'$, т.е. $AB=E=BA$.

Теперь докажем единственность обратной матрицы. Если $AX=E=XA$ для какой-нибудь матрицы X, то

$$X=XE=XAB=EB=B,$$

Чем доказывается единственность матрицы B. Теорема доказана.

Замечание 1. Рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3.11,можно использовать и для получения следующего способа вычисления обратной матрицы: приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу A к единичной, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей A^{-1}: $(E|A) \to (A^{-1}|E)$.

Замечание 2. Обратную матрицу также можно найти по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

где через A_{ij} обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице A (напомним, что алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется произведение $(-1)^{i+j}|M|$, где $|M|$ – определитель матрицы, полученной из элементов матрицы А, после вычеркивания i строки и j столбца – дополнительный минор к минору первого порядка a_{ij}).

<u>Теорема</u> 3.12. Если A и B – квадратные матрицы, то $|AB|=|A||B|$.

Доказательство. Допустим сначала, что $|A|=0$. Ввиду теоремы 3.10 (ранг AB)$\leq$(ранг A)<(порядок A)=(порядок AB). Следовательно, $|AB|=0=|A||B|$, что и требовалось доказать. Теперь можно считать, что $|A|\neq 0$. Допустим, что матрица A является диагональной, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая теорему 3.7 и свойство 5 определителя, получаем

$$|AB|=\begin{vmatrix} d_1b_{11} & d_1b_{12} & \ldots & d_1b_{1n} \\ d_2b_{21} & d_2b_{11} & \ldots & d_2b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_nb_{n1} & d_nb_{n2} & \ldots & d_nb_{nn} \end{vmatrix}=d_1\ldots d_n|B|=|A||B|.$$

Переходя к общему случаю, вспомним, что элементарными преобразованиями строк матрицу A с ненулевым определителем можно привести к диагональному виду D. При этом $|A|=(-1)^k|D|$, где k – число осуществленных при этом приведении перемен местами строк. В силу теорем 3.8 и 3.9 имеем $D=UA$, где U – произведение элементарных матриц. Если к матрице AB применить те же самые элементарные преобразования, то получим матрицу $U(AB)$, причем $|U(AB)|=(-1)^k|AB|$. Учитывая, что в случае диагональной матрицы A теорема верна, имеем $|AB|=(-1)^k|U(AB)|=(-1)^k|DB|=(-1)^k|D||B|=|A||B|$, что и требовалось. Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Если $|A|=0$, то матрица A не имеет обратной.

Доказательство. Действительно, если $|A|=0$ и $AB=E$, то $0=|A||B|=|AB|=|E|=1$, что невозможно.

Матрицы используют при изучении систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_j – некоторые числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов. Тогда систему (1) можно записать в виде следующего матричного уравнения: $AX=B$.

Системе (1) можно сопоставить две матрицы – A и $\tilde{A}=(A|B)$, при этом матрицу A называют основной матрицей системы (1), а $\tilde{A}$ – расширенной матрицей.

Отметим, что расширенная матрица получается из основной A добавлением столбца свободных членов B, при этом мы просто проводим вертикальную черту, чтобы отделить A от B. Например, для системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 = 3 \end{cases}$ основная и расширенная матрицы соответственно имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

<u>Определение</u> 3.8. Решением системы линейных уравнений (1) называется такой упорядоченный набор n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что каждое из уравнений (1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных x_i соответствующими числами α_i.

<u>Определение</u> 3.9. Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. В противном случае она называется несовместной.

<u>Определение</u> 3.10. Совместная система называется определенной, если она обладает одним единственным решением, и неопределенной, если решений будет бесконечно много.

<u>Определение</u> 3.11. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если всякое решение первой системы является решением второй системы и наоборот.

<u>Определение</u> 3.12. Будем называть элементарными преобразованиями системы (1):

- перестановку двух уравнений местами;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число;
- умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля.

Применяя к системе (1) указанные преобразования, мы практически работаем с расширенной матрицей системы, т.е. мы выполняем элементарные преобразования строк в матрице $\tilde{A}$. Можно менять и столбцы местами, но при этом не забывать, что в уравнениях системы поменялись местами слагаемые (неизвестные). Это единственное преобразование, которое можно применить к столбцам в этом случае.

<u>Теорема</u> 3.13. Если от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.

Предварительно докажем следующую лемму.

<u>Лемма</u>. Если от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то всякое решение системы, соответствующей матрице $\tilde{A}$, служит решением системы, соответствующей матрице $\tilde{B}$.

Доказательство. Ясно, что лемму достаточно доказать для случая, когда применяется одно элементарное преобразование, ибо переход к общему случаю легко осуществляется индукцией. Если применено элементарное преобразование первого типа, т.е. переставлены местами строки, наши уравнения только меняются местами. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях второго типа к i-й строке прибавляем j-ю строку, умноженную на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\tilde{B}$ имеет вид

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1},\ \dots,\ a_{in}+\lambda a_{jn} |\ b_i+\lambda b_j).$$

Пусть $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$ – решение системы с матрицей $\tilde{A}$, т.е. решение каждого из ее уравнений. Будет ли оно решением системы с матрицей $\tilde{B}$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1+\ldots+(a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n=(a_{i1}\alpha_1+\ldots+a_{in}\alpha_n)+\lambda(a_{j1}\alpha_1+\ldots+a_{jn}\alpha_n)=B_i+\lambda B_j.$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим согласно лемме каждое решение системы $\tilde{A}$ (т.е. системы, соответствующей матрице $\tilde{A}$) служит решением системы $\tilde{B}$. С другой стороны, в силу теоремы 3.2 от матрицы $\tilde{B}$ к матрице $\tilde{A}$ можно перейти с помощью элементарных преобразований. Следовательно, применив лемму еще раз, видим, что каждое решение системы $\tilde{B}$ служит решением системы $\tilde{A}$. Таким образом, эти системы эквивалентны. Теорема доказана.

Вывод: если к системе (1) будут несколько раз применены элементарные преобразования (из определения 3.12), то вновь полученная система уравнений остается эквивалентной исходной системе (т.е. они или обе несовместны, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями).

Пусть ранг основной матрицы A системы (1) равен r и ступенчатая матрица, к которой приводится матрица $\tilde{A}$ с помощью к.ч.э.п. строк (см. теореме 3.1.), имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right), \qquad (2)$$

где $a'_{ii}\neq 0,\ i=\overline{1,r}$.

Замечание 3. Первые ненулевые элементы строк ступенчатой матрицы необязательно должны стоять на главной диагонали, но в данном случае для простоты рассуждений и выкладок мы их разместили именно так.

Согласно теореме 3.13 система (1) эквивалентна системе линейных уравнений от n неизвестных, задаваемой матрицей (2). Поэтому далее вместо системы (1) будем исследовать эквивалентную ей ступенчатую систему с расширенной матрицей (2).

Пусть нам дана ступенчатая система линейных уравнений от n неизвестных (эквивалентная системе (1)), задаваемая матрицей (2). Возможны следующих два случая: $b'_{r+1} \neq 0$ или $b'_{r+1} = 0$.

Пусть $b'_{r+1} \neq 0$. Тогда r+1-ое уравнение системы имеет вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b'_{r+1}$, и так как $b'_{r+1} \neq 0$, система будет несовместной. Заметим, что в данном случае ранг расширенной матрицы системы равен r+1, а основной матрицы – r.

Пусть $b'_{r+1} = 0$. Тогда рассмотрим следующие два случая: $r = n$ или $r < n$.

Допустим, что $r = n$. Следовательно, расширенная матрица системы будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right), \ (a'_{ii} \neq 0,\ i = \overline{1,n}). \tag{3}$$

И в этом случае система будет иметь единственное решение, так как матрицу (3) с помощью к.ч.э.п. строк можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \end{array}\right), \tag{4}$$

а значит, решением системы будет строка ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$).

Пусть теперь $r < n$. В этом случае, применив к матрице (2) к.ч.э.п. строк, мы можем привести ее к виду

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{1,r+1} & \ldots & -\alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_{2,r+2} & \ldots & -\alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{r,r+1} & \ldots & -\alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{5}$$

Следовательно, $x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + ..\alpha_{1n}x_n + \beta_1$, $x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + ..\alpha_{2n}x_n + \beta_2$, $\ldots$, $x_r = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + ..\alpha_{rn}x_n + \beta_r$, где $x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения. Придавая неизвестным $x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots, x_n$ всевозможные значения, мы найдем все решения рассматриваемой системы. Тогда, говорят, что общее решение системы имеет вид

$(\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + ...\alpha_{1n}x_n + \beta_1,\ \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + ...\alpha_{2n}x_n + \beta_2,\ \dots,\ \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + ...\alpha_{rn}x_n + \beta_r,\ x_{r+1},\ x_{r+2},\dots,x_n)$, при этом неизвестные $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r$ объявляются главными, а $x_{r+1},\ x_{r+2},\dots,x_n$ – свободными. Таким образом, в случае $r < n$ система в данном случае является неопределенной.

Отметим, что в случае $r = n$ свободных неизвестных нет, все неизвестные – главные.

Теорема 3.14 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Как уже было замечено согласно теоремам 3.1 и 3.13, от системы линейных уравнений (1) можно перейти к эквивалентной ей ступенчатой системе с матрицей (2). Поскольку ранги основной и расширенной матриц при этом меняться не будут, то достаточно установить справедливость теоремы 3.14 для ступенчатой системы. Для ступенчатой же системы, в силу теоремы 3.4, ранги основной и расширенной матриц равны тогда и только тогда, когда эти матрицы имеют одинаковое число ненулевых строк. Следовательно, первый ненулевой элемент последней ненулевой строки расширенной матрицы не должен располагаться в столбце свободных членов, т.е. в матрице (2) $b'_{r+1} = 0$. Из анализа ступенчатой системы, ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда система совместна. Теорема доказана.

Теорема 3.15. Совместная система линейных уравнений от n неизвестных с основной матрицей A будет определенной тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен n.

Доказательство. В силу теорем 3.3 и 3.4 (ранг A)=n тогда и только тогда, когда данная система приводится к треугольному виду. С другой стороны, ступенчатая система имеет единственное решение в том и только в том случае, когда она треугольная (расширенная матрица имеет вид (3)). Теорема доказана.

Следствие. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладает ненулевыми решениями тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.

Теорема 3.16 (правило Крамера). Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель основной матрицы которой отличен от нуля, обладает решением и притом только одним.

Доказательство. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (6)$$

Пусть система (6) совместна и (α_1, α_2, … , α_n) – одно из ее решений. Справедливы, следовательно, равенства

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n \end{cases} \qquad (7)$$

Пусть j будет любым из чисел 1, 2, … , n. Умножим обе части первого из равенств (7) на A_{1j}, т.е. на алгебраическое дополнение элемента a_{1j} в определителе

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

равном определителю основной матрицы системы (7); обе части второго равенства умножим на A_{2j} и т.д., наконец, обе части последнего – на A_{nj}. Складывая, затем отдельно левые и отдельно правые части всех равенств, мы придем к следующему равенству:

$$(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\ldots+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\ldots+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+\ldots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+\ldots$$
$$+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\ldots+a_{nn}A_{nj})\alpha_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}.$$

Коэффициентом при α_j в этом равенстве служит d, коэффициенты при всех остальных α будут равны нулю, ввиду того, что сумма произведений всех элементов некоторого столбца определителя на алгебраические дополнения соответственных элементов другого столбца равна нулю. А свободный член будет определителем, получающимся из определителя d после замены в нем j-го столбца столбцом из свободных членов системы (6). Если этот последний определитель мы обозначим через d_j, то наше равенство примет вид

$$d\alpha_j=d_j,$$

откуда, ввиду $d \neq 0$,

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

Этим доказано, что если система (6) совместна, то она обладает единственным решением.

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d},\ \alpha_2 = \frac{d_2}{d},\ \dots,\ \alpha_n = \frac{d_n}{d}. \tag{8}$$

Покажем теперь, что система чисел (8) на самом деле удовлетворяет системе уравнений (6), т.е. что система (6) совместна.

Подставим теперь в i-е уравнение системы (6) значения неизвестных (8). Так как левую часть i-го уравнения можно записать в виде $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ и так как $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$, то мы получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right).$$

Относительно этих преобразований заметим, что число $\frac{1}{d}$ оказалось общим множителем во всех слагаемых, и поэтому мы его вынесли за знак суммы; кроме того, после перемены порядка суммирований множитель b_k вынесен за знак внутренней суммы, так как от индекса внутреннего суммирования j он не зависит.

Мы знаем, что выражение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn}$ будет равно d при $k=i$ и равно 0 при всех других k. Таким образом, в нашей внешней сумме по k остается лишь одно слагаемое, а именно $b_j d$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_j d = b_j .$$

Этим доказано, что система чисел (8) действительно служит решением для системы уравнений (6). Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.17. Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Доказательство. Приведем данную однородную систему, т. е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

к ступенчатому виду. Разумеется, она остается однородной. Ясно, что число главных неизвестных не может превысить числа строк. Следовательно, существуют свободные неизвестные, что обеспечивает существование ненулевых решений. Теорема доказана.

При исследовании ступенчатой системы в случае ее неопределенности мы выделяли главные и свободные неизвестные, причем выбирали в качестве главных первые r неизвестные (r – ранг основной матрицы системы). Данному выбору способствовал вид матрицы (2), так как именно в первых r столбцах и строках матрицы (2) был расположен ненулевой минор треугольного вида. Но это не означает, что каждый раз при рассмотрении произвольной системы такой минор обязательно будет расположен в первых r столбцах. Следовательно, первые ненулевые элементы ступенчатой матрицы необязательно будут находиться в первых r столбцах (см. замечание 3). Тогда, если, например, матрица ступенчатой системы от 7 неизвестных имеет вид $\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & -3 \end{array}\right)$, то в качестве главных мы можем выбрать неизвестные $x_2,\ x_4,\ x_5$.

Следующая теорема позволит определить, какие неизвестные можно выбрать в качестве главных, и какого их количество.

<u>Теорема</u> 3.18 (Основная теорема теории систем линейных уравнений). Пусть имеется совместная система (1), $\tilde{A}$ – расширенная матрица этой системы и ранг $\tilde{A}$ равен r. Тогда неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными в том и только в том случае, когда $k=r$ и в столбцах матрицы $\tilde{A}$ с номерами $i_1, \ldots, i_k$ располагается ненулевой минор порядка r.

Доказательство. Допустим, что $k=r$ и что в столбцах с указанными номерами располагается ненулевой минор порядка r. Тогда ранг матрицы (подматрицы основной матрицы, расположенной в столбцах с номерами $i_1, \ldots, i_k$)

$$\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_r} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_r} \end{pmatrix}$$

размера $m \times r$ равен r. В силу теорем 3.3 и 3.4, приведя эту матрицу к ступенчатому виду, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} \\ 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{ri_r}$ отличные от нуля числа. Применив те же самые элементарные преобразования к матрице $\tilde{A}$, получим матрицу

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \ldots & 0 & b_{1i_1} & \ldots & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} & b_{1,i_1+1} & \ldots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & b_{2i_2} & \ldots & b_{ri_r} & b_{2,i_1+1} & \ldots & b_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & b_{ri_r} & b_{r,i_1+1} & \ldots & b_{rn} & c_r \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_m \end{array} \right).$$

Подчеркнем, что эта запись не означает, что все строки матрицы $\tilde{B}$, начиная с (r+1)-й, нулевые: в столбцах с номерами, отличными от $i_1, i_2, \ldots, i_r$, могут встретиться ненулевые элементы, стоящие в этих строках. Однако на самом деле все строки матрицы $\tilde{B}$, начиная с (r+1)-й, нулевые. Действительно, допустим, что это не так, т.е. $b_{pq} \neq 0$ для некоторых p и q, где $r+1 \leq p \leq m$. Конечно $q \neq i_1, i_2, \ldots, i_r$. Однако может случиться, что q=n+1, т.е. $b_{pq} = c_p$. Пусть $|M|$ – минор матрицы $\tilde{B}$ порядка r+1, расположенный в строках с номерами 1, 2, … , r, p и столбцах с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$, q. Переставляя, если нужно, столбцы этого минора, получим

$$|M| = \pm \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} & b_{1q} \\ 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} & b_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} & b_{rq} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{bq} \end{vmatrix} = \pm b_{1i_1} \ldots b_{ri_r} b_{pq} \neq 0,$$

т.е. $|M|$ – ненулевой минор матрицы $\tilde{B}$ порядка r+1.

Но тогда

$$(\text{ранг } \tilde{A}) = (\text{ранг } \tilde{B}) \geq r+1,$$

что противоречит условию. Таким образом, система линейных уравнений, соответствующая матрице $\widetilde{B}$, эквивалентна исходной системе и содержит r уравнений. Придавая неизвестным, отличным от $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, произвольные значения и перенося их в правую часть, легко убедиться, что неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ однозначно определяются одно за другим, начиная с последнего. Таким образом, их можно объявить главными.

Допустим теперь, что неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными. Положив остальные неизвестные равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + a_{1i_k}x_{i_k} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mi_1}x_{i_1} + \ldots + a_{mi_k}x_{i_k} = b_m \end{cases} \tag{9}$$

имеющей единственное решение. В силу теоремы 3.15, ранг основной матрицы этой системы равен k. Следовательно, $k=r$ и в столбцах $i_1,\ i_2,\ \ldots\ ,i_k$ располагается ненулевой минор порядка k. Допустим, что $k<r$. Заметим, что система (9) приводится к треугольному виду, и применим к исходной системе те же самые элементарные преобразования. Тогда расширенная матрица системы приобретает вид

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} \ldots & b_{1i_1} & \ldots & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_k} & \ldots & c_1 \\ \ldots & 0 & \ldots & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_k} & \ldots & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & b_{ri_k} & \ldots & c_r \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_m \end{array}\right).$$

В силу теоремы Кронекера-Капелли, ранг матрицы системы равен $r>k$. Поэтому среди $b_{i1},\ \ldots\ ,b_{in}$, где $k<i=m$, есть хотя бы одно число отличное от нуля. Следовательно, найдется $b_{pq} \neq 0$, где $p>k$. Если теперь положить равными нулю все неизвестные с номерами, отличными от $i_1,\ \ i_2,\ \ \ldots\ ,i_k$, q, то получим $x_q = \dfrac{c_p}{b_{pq}}$, т.е. x_q не может быть взят произвольным, что противоречит возможности объявить $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ главными неизвестными. Следовательно, $k=r$. Теорема доказана.

Далее рассмотрим одно из важных понятий в теории систем алгебраических уравнений – понятие фундаментальной системы решений.

Пусть дана однородная система линейных уравнений от n неизвестных с действительными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \qquad (10)$$

причем ранг основной матрицы равен r. Отметим, что эта система всегда имеет решение, т.е. является совместной. Положим $r<n$, т.е. будем считать, что система (10) имеет бесконечно много решений (в случае $r=n$ система имеет единственное нулевое решение).

Всякое решение системы (10) представляет собой упорядоченный набор n действительных чисел $(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)$. На множестве всех решений системы (10) определим операции сложения и умножения на число.

Сумма двух решений $(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n)$ системы (10) определяется следующим правилом:

$$(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)+(\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1, \ \alpha_2+\beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n+\beta_n).$$

В виду того, что наборы $(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n)$ являются решения системы (10), то справедливы следующие равенства: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0$ для всех $i=\overline{1,m}$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j+\beta_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0$ для всех $i=\overline{1,m}$, т.е. $(\alpha_1+\beta_1, \ \alpha_2+\beta_2, \ \ldots, \ \alpha_n+\beta_n)$ также является решением системы (10).

Произведение решения $(\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)$ на произвольное число определяется правилом:

$$\lambda \cdot (\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n)=(\lambda\alpha_1, \ \lambda\alpha_2, \ \ldots, \ \lambda\alpha_n).$$

Полученный набор $(\lambda\alpha_1, \ \lambda\alpha_2, \ \ldots, \ \lambda\alpha_n)$ также является решением системы (10), так как $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda\alpha_j) = \lambda\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$.

Пусть общее решение системы (10) имеет вид

$$(\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots \alpha_{1n}x_{n\,1}, \ \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots \alpha_{2n}x_{n\,2}, \ \ldots, \ \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots \alpha_{rn}x_n, \ x_{r+1}, \ x_{r+2}, \ldots, x_n), \qquad (11)$$

т.е. полагаем, что $x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_r$ главные, а $x_{r+1}, \ x_{r+2}, \ldots, x_n$ свободные неизвестные. Общее решение (11) можно разложить следующим образом:

$$(\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots \alpha_{1n}x_{n\,1}, \ \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots \alpha_{2n}x_{n\,2}, \ \ldots, \ \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots \alpha_{rn}x_n, \ x_{r+1}, \ x_{r+2}, \ldots, x_n)=$$

$$= x_{r+1}(\alpha_{1,r+1}, \ \alpha_{2,r+1}, \ \ldots, \ \alpha_{r,r+1}, \ 1, \ 0, \ \ldots, \ 0) + x_{r+2}(\alpha_{1,r+3}, \ \alpha_{2,r+2}, \ \ldots, \ \alpha_{r,r+2}, \ 0, \ 1, \ \ldots, \ 0) +$$

$\ldots + x_n(\alpha_{1n},\ \ \alpha_{2n},\ \ ...,\ \ \alpha_{rn},\ \ 0,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 1)$, где $x_{r+1},\ x_{r+2},\ldots,x_n$ – произвольные действительные числа, а

$$\begin{array}{c}(\alpha_{1,r+1},\ \ \alpha_{2,r+1},\ \ ...,\ \ \alpha_{r,r+1},\ \ 1,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 0),\\ (\alpha_{1,r+3},\ \ \alpha_{2,r+2},\ \ ...,\ \ \alpha_{r,r+2},\ \ 0,\ \ 1,\ \ ...,\ \ 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (\alpha_{1n},\ \ \alpha_{2n},\ \ ...,\ \ \alpha_{rn},\ \ 0,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 1)\end{array} \qquad (12)$$

– частные решения системы (10). Семейство решений (12) называют фундаментальной системой решений. Отметим, что количество решений в системе (12) совпадает с количеством свободных неизвестных и равно $n–r$. Кроме того, обратим внимание на то, что если построить матрицу из данных решений, то ее ранг будет равен $n–r$. Роль фундаментальной системы решений подробнее будет раскрыта в курсе линейной алгебры.

3.2. Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей, порядком матрицы?
2. Какие преобразования называются элементарными преобразованиями матрицы?
3. Какая матрица называется ступенчатой?
4. Какие действия (алгебраические операции) определены над матрицами?
5. Свойства основных операций над матрицами.
6. Что называется рангом матрицы?
7. Способы нахождения ранга матрицы.
8. Меняется ли ранг матрицы при выполнении конечного числа элементарных преобразований, при транспонировании?
9. Чему равен ранг ступенчатой матрицы?
10. Какая система линейных уравнений (СЛУ) называется совместной (несовместной)?
11. Какая система линейных уравнений называется определенной (неопределенной)?
12. В каком случае системы линейных уравнений называются эквивалентными?
13. Какие неизвестные мы можем объявить главными?
14. Необходимое и достаточное условие совместности СЛУ (теорема Кронекера-Капелли).
15. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы совместная система была определенной.

16. Чему равно количество главных неизвестных согласно основной теореме теории СЛУ?
17. Какая матрица называется обратной к данной? Какая матрица обладает обратной матрицей?
18. Способы нахождения обратных матриц.
19. Пусть ранг основной матрицы СЛНУ равен 4, система сама несовместна. Чему равен ранг расширенной матрицы?
20. Пусть ранг основной матрицы совместной системы с 7 неизвестными равен 3. Что можно сказать о количестве главных и свободных неизвестных?

3.3. Решения типовых примеров

Пример 1. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров.

Решение. В матрице A есть миноры второго порядка отличные от нуля. В частности, $|M| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Вычислим все миноры третьего порядка, окаймляющие минор $|M|$ (миноры, содержащие $|M|$, на единицу большего порядка). Всего окаймляющих миноров будет три:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad |M_2| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все окаймляющие миноры равны нулю ранг матрицы A равен 2. Далее через $r(A)$ будем обозначать ранг матрицы A, т.е. в данном примере $r(A)$=2.

Замечание 4. Всего в матрице A десять миноров третьего порядка, C_5^3. Метод позволяет утверждать, что все эти 10 миноров равны нулю (если окаймляющие миноры равны нулю).

Пример 2. Вычислить ранг следующей матрицы приведением к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прибавляя в этой матрице ко второй строке первую строку, умноженную на (–3), к третьей строке первую строку, умноженную на (–3) и к четвертой строке первую строку, умноженную на (–1), придем к матрице:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

В новой матрице, прибавляя к четвертой строке третью строку, умноженную на (–1), а к третьей строке вторую, умноженную на (–1), получим ступенчатую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице число ненулевых строк равно 3 и поэтому ранг ступенчатой матрицы равен 3, и он равен рангу матрицы A, т.е. $r(A)=3$.

Пример 3. Для матрицы A найти двумя способами обратную матрицу A^{-1}:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Определитель матрицы $|A|=1\neq 0$, т.е. матрица невырожденная, а значит, обратная ей матрица A^{-1} существует.

1 способ. Для матрицы A обратная может быть найдена с помощью формулы, указанной в замечании 2:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Найдем необходимые алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Подставляя в формулу, получим, что $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2 способ. Приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу A к единичной, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей A^{-1}: $(E|A)\to(A^{-1}|E)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, также как и в первом способе. Можно сделать проверку: $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Пример 4. Решить матричное уравнение $AX+B^{-1}=C$, где $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$.

Решение. Из уравнения имеем $AX=C-B^{-1}$, $X=A^{-1}(C-B^{-1})$. Находим, сначала $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}$, затем $C-B^{-1}=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1/2\\0&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\1&5/2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}$ и получим $X=\begin{pmatrix}-2&3\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1/2\\1&5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&17/2\\0&-3\end{pmatrix}$.

Пример 5. Найти, если они существуют, невырожденные матрицы P и T, удовлетворяющие равенству $A=PBT$, где $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\4&3&2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&1&2\end{pmatrix}$.

Решение.

Замечание 5. Для матриц A и B одинакового размера невырожденные матрицы P и T, удовлетворяющие равенству $A=PBT$ найдутся тогда и только тогда, когда $r(A)=r(B)$.

1) Приписываем к матрице A единичную матрицу и слева и справа. Выполняя элементарные преобразования строк в матрице A, мы будем одновременно выполнять эти преобразования в единичной матрице, стоящей слева, а выполняя элементарные преобразования столбцов в матрице A, мы будем одновременно выполнять эти преобразования в единичной матрице, стоящей справа. Путем элементарных преобразований приводим матрицу A к матрице E_k – к матрице, у которой по главной диагонали стоит k единиц, где k – ранг матрицы A, остальные элементы нули. Вместо единичной матрицы, стоящей слева, получим матрицу P_1, а вместо единичной матрицы, стоящей справа матрицу T_1: $(E|A|E) \to (P_1|E_k|T_1)$.

2) Поскольку ранги матриц A и B должны совпадать, то, применяя к матрице B действия аналогичные тем, что указанны в первом пункте, мы также приведем матрицу B к матрице E_k: $(E|B|E)\to(P_2|E_k|T_2)$. И получаем с одной стороны $E_k=P_1AT_1$, а с другой $E_k=P_2BT_2$. Отсюда имеем $P_1AT_1= P_2BT_2$ и $A=(P_1^{-1}P_2)B(T_2T_1^{-1})=PBT$.

Применим эту схему к нашим матрицам.

Матрицу A можно привести к ступенчатой $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A)$=2, а матрицу B – к ступенчатой матрице $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(B)$=2. Следовательно, матрицы P и T существуют. Применяя схему, описанную в пункте 1, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&2&3&4&1&0&0\\0&1&0&4&3&2&0&1&0\\0&0&1&1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&2&0&1&0\\0&1&-4&0&-1&-2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&2&0&1&0\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&1&0&1&0&0\\1&0&-2&0&1&1&0&1&-1\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&0&0&1&-1&0\\1&0&-2&0&1&1&0&1&-1\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&0&0&1&-1&1\\1&0&-2&0&1&0&0&1&-2\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

P_1 E_2 T_1

Таким образом,

$$E_2=P_1AT_1. \tag{10}$$

1) Аналогично, путем нескольких преобразований получим следующее:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&1&0&2&2&2&0&1&0\\0&0&1&3&1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&1&0&0&1&1&1\\-3&0&1&0&1&0&0&0&1\\-2&1&0&0&0&0&0&-1&-2\end{array}\right)$$

P_2 E_2 T_2

А значит,

$$E_2=P_2BT_2. \tag{11}$$

Приравнивая правые части равенств (10) и (11), получим $P_1AT_1=P_2BT_2$. Откуда $A=(P_1^{-1}P_2)B(T_2\cdot T_1^{-1})=PBT$ или, обозначив $P_1^{-1}P_2=P$, а $T_2T_1^{-1}=T$, имеем $A=PBT$. Находим $P_1^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $T_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (обратные матрицы можно найти по формуле, указанной в замечании 2). Отсюда $P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ и

$T=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&1\\0&-1&-4\end{pmatrix}$ или $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&1\\0&-1&-4\end{pmatrix}$.

Пример 6. Найти матрицу B, удовлетворяющую равенству $BA=C$, где C – ступенчатая матрица, к которой приводится матрица A с помощью элементарных преобразований строк.

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&1&3\\2&1&3&2&0\\1&1&0&0&0\\2&3&1&1&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрица A к ступенчатой матрице C, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей B: $(E|A)\to(B|C)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc}1&0&0&0&2&3&4&1&3\\0&1&0&0&2&1&3&2&0\\0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&2&3&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&0&0&2&1&3&2&0\\0&0&0&1&2&3&1&1&1\\1&0&0&0&2&3&4&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\0&0&-2&1&0&1&1&1&1\\1&0&-2&0&0&1&4&1&3\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\0&1&-4&1&0&0&4&3&1\\1&1&-4&0&0&0&7&3&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\0&1&-4&1&0&0&4&3&1\\1&-1&4&-2&0&0&-1&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\1&-1&4&-2&0&0&-1&-3&1\\0&1&-4&1&0&0&4&3&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|ccccc}0&0&1&0&1&1&0&0&0\\0&1&-2&0&0&-1&3&2&0\\1&-1&4&-2&0&0&-1&-3&1\\4&-3&12&-7&0&0&0&-9&5\end{array}\right).$$

Получили, что матрица

$$B=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&-2&0\\1&-1&4&-2\\4&-3&12&-7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&3&2&0\\0&0&-1&-3&1\\0&0&0&-9&5\end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку – перемножим матрицы B и A:

$$BA=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&-2&0\\1&-1&4&-2\\4&-3&12&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3&4&1&3\\2&1&3&2&0\\1&1&0&0&0\\2&3&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\0&-1&3&2&0\\0&0&-1&-3&1\\0&0&0&-9&5\end{pmatrix}=C.$$

Пример 7. Представить матрицу A в виде произведения элементарных матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Только невырожденную матрицу можно представить в виде произведения элементарных матриц.

Решение. Схема решения задачи такова:

1) сначала убедимся, что матрица является невырожденной;
2) найдем обратную матрицу A^{-1};
3) приписываем к матрице A^{-1} слева единичную матрицу E. Конечная цель – получить с помощью элементарных преобразований строк вместо матрицы A^{-1} единичную матрицу (как в примерах 3 и 5), но при этом каждое преобразование рассматриваем в отдельности. Пусть после первого преобразования справа вместо A^{-1} получается матрица A_1, а слева – вместо E матрица U_1 (элементарная матрица). Далее к матрице A_1 слева приписываем единичную матрицу и продолжаем преобразования. Сделав одно преобразование в A_1, получим справа и слева соответственно матрицы A_2 и U_2. Повторяя конечное число раз данную процедуру, в конце справа должны получить единичную матрицу. Схематично это выглядит так:

$$(E|A^{-1}) \to (U_1|A_1);$$
$$(E|A_1) \to (U_2|A_2);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(E|A_{k-1}) \to (U_k|E).$$

Тогда согласно теоремам 3.8 и 3.9 справедливо равенство $U_k\ldots U_2U_1A^{-1}=E$, а значит $A=U_k\ldots U_2U_1$ (теорема 3.11).

Применим данную процедуру к матрице A. Матрица A невырожденная ($|A|\neq 0$). Найдем обратную матрицу $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ (см. пример 3). Далее действуя согласно схеме, описанной выше, получим:

$$1)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right);$$

U_1

$$2)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right);$$

U_2

3) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2\end{array}\right) \to \underset{U_3}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2\end{array}\right)}$;

4) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2\end{array}\right) \to \underset{U_4}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2\end{array}\right)}$;

5) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2\end{array}\right) \to \underset{U_5}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3/4 & 1 & 0 & 0 & -1/2\end{array}\right)}$;

6) $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2\end{array}\right) \to \underset{U_6}{\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)}$.

Следовательно, $U_6U_5U_4U_3U_2U_1A^{-1}=E$. Отсюда имеем:

$$A=U_6U_5U_4U_3U_2U_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -3/4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пример 8. Решить следующие системы, заданные расширенными матрицами методом Гаусса (метод исключения неизвестных):

а) $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -4 & 9 & 22\\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3\\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3\\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3\end{array}\right)$; б) $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & 5 & -2 & 3\\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1\\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12\end{array}\right)$; в) $\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -3 & 2 & 4 & 8\\ -3 & -2 & 1 & 3 & 7\\ -5 & -1 & 0 & 2 & 6\\ -8 & -3 & 1 & 5 & 1\end{array}\right)$.

Решение.

а) Приводим расширенную матрицу $\tilde{A}$ к ступенчатому виду, тем самым в системе последовательно исключаем неизвестные – во втором уравнении неизвестное x_1, в третьем уравнении неизвестные x_1 и x_2, а в четвертом уравнении неизвестные x_1, x_2 и x_3.

$$\tilde{A}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -4 & 9 & 22\\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25\\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47\\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -4 & 9 & 22\\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63\\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25\\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -1 & -4 & 9 & 22\\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63\\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164\\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\0&1&7&-26&-63\\0&0&-17&65&164\\0&0&-1&26&54\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\0&1&7&-26&-63\\0&0&1&-26&-54\\0&0&-17&65&164\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\0&1&7&-26&-63\\0&0&1&-26&-54\\0&0&0&-377&-754\end{array}\right),$$

приведя $\tilde{A}$ к ступенчатому виду, получили, что $r(A)=r(\tilde{A})=4$, отсюда следует, что система совместна и определена.

Заданная система эквивалентна системе: $\begin{cases}x_1-x_2-4x_3+9x_4=22\\ x_2+7x_3-26x_4=-63\\ x_3-26x_4=-54\\ -377x_4=-754\end{cases}$, из которой находим, что $x_4=2$, $x_3=-2$, $x_2=3$, $x_1=-1$. Таким образом, решение системы представляет собой четверку чисел:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(-1, 3, -2, 2);$$

Замечание 7. Определенные системы линейных уравнений можно решать с помощью правила Крамера, а также матричным способом. Систему из n линейных уравнений от n неизвестных (3) можно представить в следующем матричном виде $AX=B$, где $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$. Тогда, поскольку $|A|\neq 0$ (условие определенности СЛУ), $X=A^{-1}B$.

б) Поступаем аналогично случаю (а). Тогда после конечного числа элементарных преобразований матрицы $\tilde{A}$ приводится к следующему ступенчатому виду:

$$\tilde{A}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&5&-2&3\\0&1&-7&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Следовательно, $r(A)=r(\tilde{A})=2$, система совместна и неопределенна. Таким образом, исходная система эквивалентна системе $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-2x_4=2\\ x_2-7x_3+5x_4=-1\end{cases}$, в которой x_1, x_2 можно объявить главными неизвестными, а x_3, x_4 – свободными неизвестными и выразить однозначно главные неизвестные через свободные, получив общее решение системы. Общее решение рассматриваемой системы будет иметь вид $(-26x_3+17x_4+6,\ 7x_3-5x_4-1,\ x_3,\ x_4)$, где x_3, x_4 могут принимать любые значения.

*Замечание 8***.** Придавая свободным неизвестным конкретные значения, мы можем найти бесконечно много частных решений.

в) После применения конечного числа элементарных преобразований матрицы $\tilde{A}$ можно привести к следующему ступенчатому виду:

$$\tilde{A} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -11 & 15 & 31 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 310 \end{array}\right).$$

Откуда получаем, что $r(A)$=3, $r(\tilde{A})$=4. Согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система несовместна.

Пример 9. Исследовать заданную систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра a:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем определитель основной матрицы A:

$$d = |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a-1)^2$$

Рассмотрим три случая в зависимости от значения d.

1) Если $d = (a+2)(a-1)^2 \neq 0$, то система имеет единственное решение и его можно найти по правилу Крамера. Вычислим три определителя

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,\ d_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2, d_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2.$$

Тогда получим, что $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{\kappa + 2}$;

2) Если d =0, т.е. a= –2 или a=1, то

а) рассмотрим сначала случай, когда a=–2. Тогда нашей системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Получаем, что при a =–2 $r(A)$=2, $r(\tilde{A})$=3, т.е. в этом случае система несовместна;

б) рассмотрим случай, когда a=1: система принимает вид: $x_1+x_2+x_3=1$, $r(A)=r(\tilde{A})=1$, т.е. система имеет бесконечно много решений. Одно неизвестное – x_1 можем объявить главным, x_2, x_3 – свободными и имеем общее решение $(1-x_2-x_3, x_2, x_3)$, где x_2, x_3 могут принимать любые значения. Таким образом, при a=1 система совместна и неопределенна.

Пример 10. Найти фундаментальную систему решений следующей системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Каждое решение данной системы (x_1, x_2, x_3, x_4) представляет собой некоторую четырехмерную строку, или четырехмерный вектор. По определению несколько решений образуют фундаментальную систему, если:

1) эти решения линейно независимы;

2) любое решение может быть представлено в виде их линейной комбинации.

Один из способов нахождения фундаментальной системы состоит в следующем. Находим сначала общее решение данной системы уравнений. Далее выбираем одно из свободных неизвестных и полагаем его равным единице, остальные свободные неизвестные берем равными нулю, после чего определяем значения всех остальных неизвестных. Таким путем, мы получаем некоторое частное решение данной системы. Выбирая другое свободное неизвестное (и снова полагая его равным единице, а остальные свободные неизвестные – нулю), получим другое частное решение. Построенные таким образом частные решения (число которых равно числу свободных неизвестных) образуют фундаментальную систему решений. В данном случае общее решение (найденное методом Гаусса) имеет вид:

$$\left(2x_2 + \frac{2}{7}x_4, \quad x_2, \quad -\frac{5}{7}x_4, \quad x_4\right).$$

Фундаментальная система решений: $(2, \ 1, \ 0, \ 0)$, $\left(\frac{2}{7}, \ 0, \ -\frac{5}{7}, \ 1\right)$, любое решение ($x_1$, x_2, x_3, x_4) данной системы уравнений может быть представлено в виде линейной комбинации

$$c_1(2, \ 1, \ 0, \ 0) + c_2\left(\frac{2}{7}, \ 0, \ -\frac{5}{7}, \ 1\right),$$

где $c_1=x_1$, $c_2=x_2$.

3.4. Индивидуальные задания

1. Решить матричное уравнение. Найденную матрицу X представить в виде произведения элементарных матриц:

$$A_1=\begin{pmatrix}2&3&0\\3&4&0\\1&2&1\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&1\\3&2&1\end{pmatrix};\quad A_3=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&0&1\\4&0&1\end{pmatrix};\quad A_4=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&0\\1&1&0\end{pmatrix};$$

$$A_5=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix};\quad A_6=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

1) $XA_1=A_2$; 2) $XA_2=A_1$; 3) $A_1^{-1}X=A_2^{-1}$; 4) $A_3X=A_4$;
5) $A_4X=A_3^{-1}$; 6) $XA_4^{-1}=A_3^{-1}$; 7) $XA_3^{-1}=A_4^{-1}$; 8) $A_2X=A_3$;
9) $XA_4=A_2$; 10) $A_2^{-1}X=A_5^{-1}$; 11) $A_3X=A_6$; 12) $XA_2=A_6$;
13) $XA_2^{-1}=A_6^{-1}$; 14) $A_4X=A_5$; 15) $A_1X=A_4$ 16) $A_5XA_4^{-1}=A_1$;
17) $A_1X=A_6$; 18) $XA_3=A_5$; 19) $A_2X=A_6$; 20) $A_3X=A_1$;
21) $A_4^{-1}X=A_1^{-1}$; 22) $A_2^{-1}X=A_1^{-1}$; 23) $XA_3=A_4$; 24) $A_3^{-1}X=A_5$;
25) $A_3X=A_5$; 26) $XA_5=A_1$; 27) $A_4X=A_6$; 28) $A_5^{-1}X=A_4^{-1}$;
29) $XA_6=A_5$; 30) $A_5X=A_6$.

2. Найти невырожденные матрицы P и T, такие, что имеет место равенство: $A=PBT$, если $A=\begin{pmatrix}2&3&n+1&m+2\\3&0&9-n&8-m\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}n-4&n+2&1&3\\m-3&n+4&0&1\end{pmatrix}$, где $\overline{nm}$ – номер варианта (например: если вариант 23, то n=2, m=3, если номер варианта меньше 10, то n=0).

3. Найти общее решение системы, заданной расширенной матрицей, предварительно исследовав ее на совместность:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}2&3&n&m&0&0&1\\1&-2&9-2n&1&2&1&0\\3&1&9-n&m+1&2&1&1\end{array}\right),$$

где $\overline{nm}$ – номер варианта (например: если вариант 23, то n=2, m=3, если номер варианта меньше 10, то n=0).

4. Найти ранг матрицы A и матрицу X, удовлетворяющую равенству $XA=S$, где S – ступенчатая матрица, эквивалентная матрице A. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений, если A – основная матрица этой системы.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & n+1 & m-3 & 0 & 3 \\ n+1 & n+1 & n+1 & n+1 & n+1 \\ 7 & 8-n & 6-m & 9 & 6 \\ 1 & n & m-4 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

где $\overline{nm}$ – номер варианта (например: если вариант 23, то n=2, m=3, если номер варианта меньше 10, то n=0).

5. Дана матрица $A=\begin{pmatrix} n+1 & m-1 \\ m-1 & n+1 \end{pmatrix}$. Найти все матрицы перестановочные с матрицей A, где $\overline{nm}$ – номер варианта (например: если вариант 23, то n=2, m=3, если номер варианта меньше 10, то n=0).

6. Исследовать систему, заданную расширенной матрицей. Найти общее решение в зависимости от параметра k.

1–15 $\left(\begin{array}{ccc|c} k & k+i & 3 & -2 \\ 0 & k+i & 1 & -3 \\ 2k & k+i & k+3 & 0 \end{array}\right)$, где i – номер варианта;

16–30 $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & k-i & k-3 & -1 \\ 2 & k-i & -2 & -4 \\ k+9 & k-i & -7 & 5 \end{array}\right)$, где i – номер варианта.

СПИСОК ИСОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глухов М.М, Солодовников А.С. Задачник–практикум по высшей алгебре. – М.: МГЗПИ, 1969.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Спб.: Издательство «Лань», 2004.
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 2001.
4. Скорняков Л.А. Системы линейных уравнений. – М.: Наука, 1986 .

СОДЕРЖАНИЕ

Алгебра.
Часть 1
(учебное пособие)

Составители:
Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К.

Подписано в печать: 17.12.09. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Печ. л. 5,25. Тираж 100 экз. Заказ № 24

Отпечатано в филиале издательства ЯГУ,
Институт математики и информатики ЯГУ.
Адрес: г. Якутск, ул. Кулаковского, 48
Тел.: (4112) 496833