Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
«Северо-Восточный федеральный университет»
Институт математики и информатики

АЛГЕБРА
Часть 2
(практикум)

Якутск
2013

УДК 512.8(07)
ББК 22.143я73

Утверждено научно-методической комиссией ИМИ СВФУ

Составители:

1. Г.Г. Гурзо, доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ СВФУ
2. И.Н. Бочарова, доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ СВФУ
3. Т.К.Неустроева, доцент кафедры алгебры и геометрии ИМИ СВФУ

Рецензент:
к.ф.-м.н. Т.Г. Протодьяконова

Алгебра. Часть 2 (практикум). / Гурзо Г.Г., Бочарова И.Н., Неустроева Т.К. – Якутск: Изд. , 2013. – с.

Данный практикум предназначен для студентов, обучающихся по основным образовательным программам ВПО, включающих дисциплины «Алгебра» и «Алгебра и геометрия», в рамках которых изучаются понятия поля комплексных чисел и кольца многочленов от одного и нескольких неизвестных.

Практикум включает необходимые теоретические сведения по темам «Комплексные числа» и «Многочлены», примеры решения типовых задач, а также индивидуальные задания по указанным темам, которые могут быть использованы в качестве аудиторной и внеаудиторной самостоятельной работы студентов. Представленные индивидуальные задания можно разбить на части:
стандартные и нестандартные задачи, которые вводятся для развития у студентов логического мышления и для более углубленного понимания материала по данным темам .

Цель данного пособия – овладеть методикой решения задач по указанным темам.

В некоторых заданиях присутствуют m, n и $\overline{mn}$, где $\overline{mn}$ – номер персонального варианта студента.

Практикум предназначен для студентов, обучающихся по направлению подготовки 010100.62 Математика, но ,по усмотрению преподавателя, может быть использован для таких направлений, как 010400.62 Прикладная математика и информатика, 010300.62 Фундаментальная информатика и информационные технологии, 050100.62 Педагогическое образование (профили: Математика, Информатика).

1. Комплексные числа

1.1. Основные определения и свойства комплексных чисел

Действия над комплексными числами.
Геометрическое изображение комплексных чисел

Комплексными числами называются числа вида $z=a+bi$, где a и b - действительные числа, i – некоторый символ, квадрат которого равен -1, т. е. $i^2=-1$. Такая форма записи комплексного числа называется алгебраической формой комплексного числа. Число a называется действительной частью числа z и обозначается Rez, bi – его мнимой частью, а b – коэффициентом при мнимой единице и обозначается Imz. Плоскость, точки которой отождествлены с комплексными числами, называется комплексной плоскостью. Ось абсцисс этой плоскости называется действительной осью, а ось ординат – мнимой осью. Числом, сопряженным числу $z=a+bi$ называется число $\bar{z}=a-bi$

Сложение, умножение, вычитание и деление комплексных чисел, записанных в виде алгебраическом виде, производятся следующим образом:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i;$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i;$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Мы можем сказать, что при сложении комплексных чисел складываются отдельно их действительные части и отдельно их мнимые части; аналогичное правило имеет место и для вычитания. Последнюю из этих формул нет необходимости запоминать; следует лишь помнить, что ее можно легко вывести. Действительно,

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\,.$$

Примеры.

$$(1+2i)+(3-4i)=(1+3)+(2-4)i=4-2i;$$

$$(2-5i)-(4-6i)=(2-4)+(-5+6)i=-2+i;$$

$$(1+3i)(2-2i)=(1\cdot 2-3\cdot(-2))+(1\cdot(-2)+3\cdot 2)i=8+4i;$$

$$\frac{3+5i}{1+i}=\frac{(3+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{8+2i}{2}=4+i.$$

Изображение комплексных чисел точками плоскости приводит к естественному желанию иметь геометрическое истолкование операций, определенных для комплексных чисел.

Для сложения такое истолкование может быть получено без затруднений. Пусть даны числа $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$. Соединяем соответствующие им точки (a,b) и (c,d) отрезками с началом координат и строим на этих отрезках, как на сторонах, параллелограмм (рис. 1). Четвертой вершиной этого параллелограмма будет, очевидно, точка $(a+c,b+d)$. Таким образом, *сложение комплексных чисел геометрически выполняется по правилу параллелограмма, т. е. по правилу сложения векторов, выходящих из начала координат.* Далее, *число, противоположное числу $z=a+bi$, будет точкой комплексной плоскости, симметричной с точкой z относительно начала координат* (рис. 2). Отсюда без труда может быть получено геометрическое истолкование вычитания.

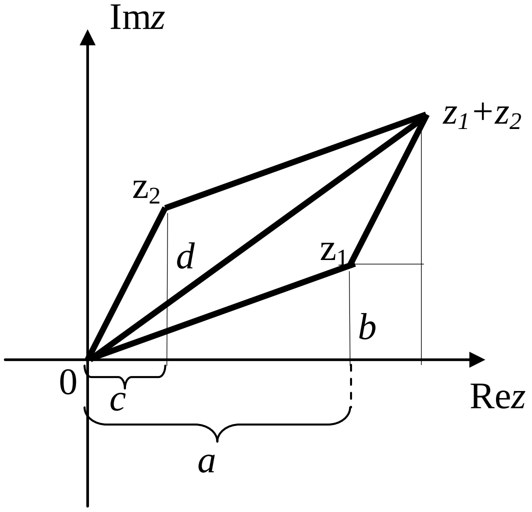


рис. 1

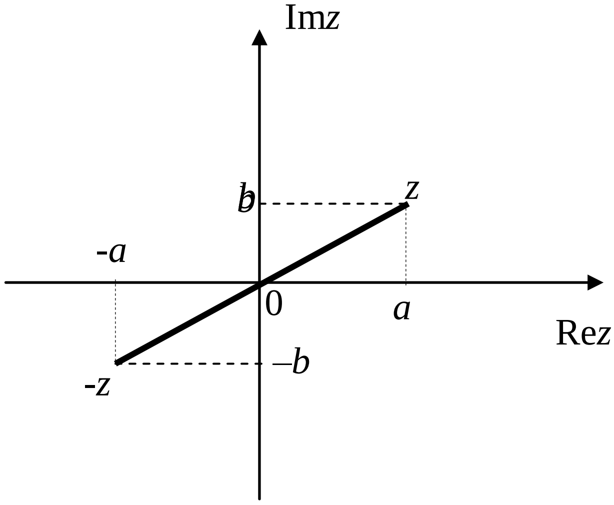


рис. 2

Геометрический смысл умножения и деления комплексных чисел станет ясным лишь после того, как мы введем для комплексных чисел новую запись, отличную от употреблявшейся нами до сих пор. В записи числа z в виде $z=a+bi$ используются декартовы координаты точки, соответствующей этому числу. Положение точки на плоскости вполне определяется. Однако, также заданием ее полярных координат: расстояния r от начала координат до точки и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на эту точку (рис. 3).

Длина вектора, изображающего комплексное число на плоскости, называется модулем этого числа, обозначается буквой r (а также $|z|$). Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю лишь для точки 0. Для числа z, лежащего на действительной оси, т.е. являющегося действительным числом, число r будет абсолютной величиной z.

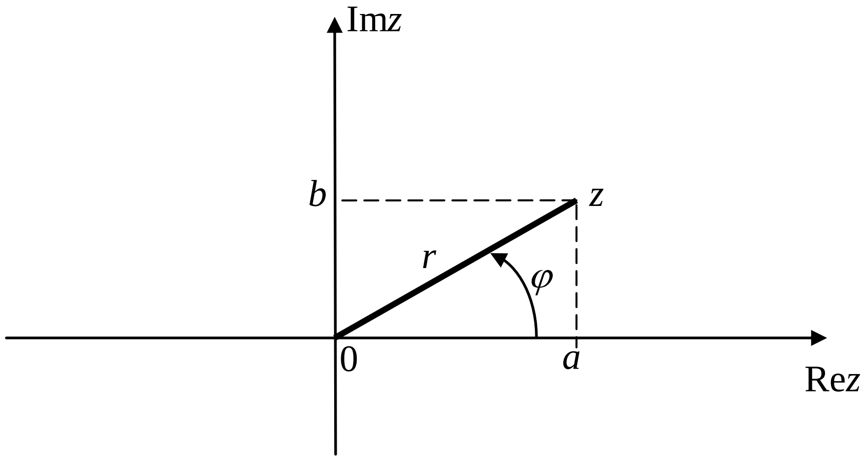


рис. 3

Угол φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на точку z называется аргументом комплексного числа z и обозначается argz. Угол φ может принимать любые действительные значения, как положительные, так и отрицательные, причем положительные углы должны отсчитываться против часовой стрелки. Аргумент не определен лишь для числа 0, это число вполне определяется, однако равенством $|0|=0$.

Аргумент комплексного числа является естественным обобщением знака действительного числа. В самом деле, аргумент положительного действительного числа равен 0, аргумент отрицательного действительного числа равен π, на действительной оси из начала координат выходят лишь два направления и их можно различать двумя символами + и –, тогда как на комплексной плоскости направлений выходящих из точки 0, бесконечно много и различаются они уже углом, составляемым ими с положительным направлением действительной оси.

Между декартовыми и полярными координатами точки существует следующая связь, справедливая при любом расположении точек на плоскости:

$$a=cos\varphi,\ b=sin\varphi. \qquad (1)$$

Отсюда

$$r=|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}. \qquad (2)$$

Применим формулы (1) к произвольному комплексному числу z:

$$z=a+bi=rcos\varphi+r(sin\varphi)i,$$

или

$$z=r(cos\varphi+isin\varphi). \qquad (3)$$

Обратно, пусть число $z=a+bi$ допускает запись вида $z=r_0(cos\varphi_0+isin\varphi_0)$, где r_0 и φ_0 – некоторые действительные числа, причем $r_0\geq 0$. Тогда $r_0cos\varphi_0=a$, $r_0\ sin\varphi_0=b$, откуда $r_0=\sqrt{a^2+b^2}$, т. е., ввиду (2), $r=|z|$. Отсюда, используя (1), получаем: $cos\varphi_0=cos\varphi$, $sin\varphi_0=sin\varphi$, т.е. $\varphi_0=argz$. Таким образом, *всякое комплексное число z однозначным образом записывается в виде (3), где* $r=|z|$, $\varphi=argz$ (причем аргумент φ определен лишь с точностью до слагаемых, кратных 2π). Эта запись числа z называется его *тригонометрической формой*, где $r=|z|$, а аргумент φ вычисляется из равенств:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r},\ \sin\varphi=\frac{b}{r}. \qquad (4)$$

Формулы умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме имеют следующий вид:

$$z_1z_2=(r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi))(r_2(\cos\psi+i\sin\psi))=r_1r_2(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)), \tag{5}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_2(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)). \tag{6}$$

Действительно, пусть комплексные числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме: $z_1=r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z_2=r_2(\cos\psi+i\sin\psi)$. Перемножим эти числа:

$$z_1z_2=(r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi))(r_2(\cos\psi+i\sin\psi))=$$

$$=r_1r_2(co\varphi\, cos\psi+i\, co\varphi\, sin\psi+i\, sin\varphi\, cos\psi-sin\varphi sin\psi)=r_1r_2(\cos(\varphi+\psi)+i\sin(\varphi+\psi)).$$

Аналогично для частного, где $r_2\neq 0$.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_2(\cos\psi+i\sin\psi)}=\frac{r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi-i\sin\psi)}{r_2(\cos^2\psi+\sin^2\psi)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi\cos\psi+i\sin\varphi\cos\psi-i\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\sin\psi)=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)).$$

Отсюда следует, что

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|, \tag{7}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}. \tag{8}$$

Т. е. *модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, модуль частного двух комплексных чисел равен модулю делимого, деленному на модуль делителя.* Далее,

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2, \tag{9}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2. \tag{10}$$

Т. е. *аргумент произведения комплексных чисел равен сумме аргументов сомножителей, аргумент частного двух комплексных чисел получается вычитанием аргумента делителя из аргумента делимого.*

Геометрический смысл умножения и деления выясняется теперь без затруднений. Действительно, ввиду формул (7) и (9), мы получим точку, изображающую произведение числа z_1 на z_2 , если вектор, идущий от 0 к z_1 (рис. 4), повернем на угол ψ=argz_2, а затем растянем этот вектор в r_2 раз. Далее, из (6) следует, что при $z_1 \neq 0$ будет

$$z_1^{-1} = r^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)) \,, \qquad (11)$$

т. е. $\left|z_1^{-1}\right| = \left|z_1\right|^{-1}$, $\arg(z_1^{-1}) = -\arg z_1$. Таким образом, мы получим точку z_1^{-1}, если от точки z_1 перейдем к точке z_1', лежащей на расстоянии r_1^{-1} от нуля на той же полупрямой, что и точка z_1 (рис. 5), а затем перейдем к точке, симметричной с z_1 относительно действительной оси.

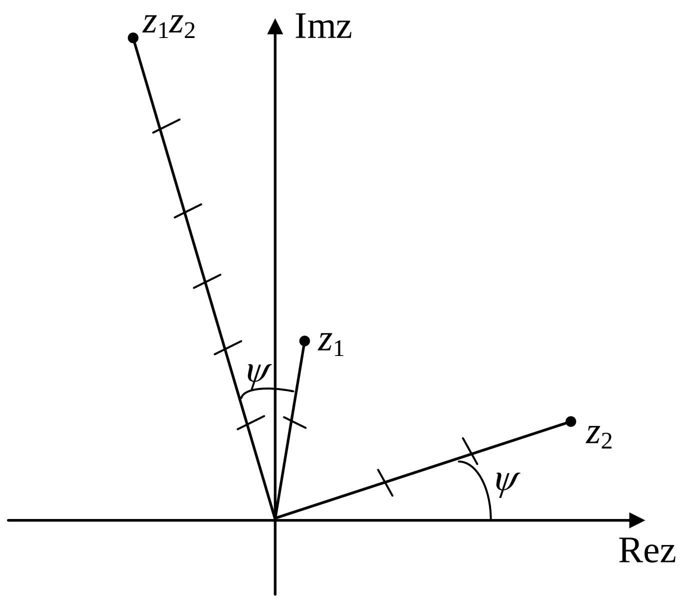


рис. 4

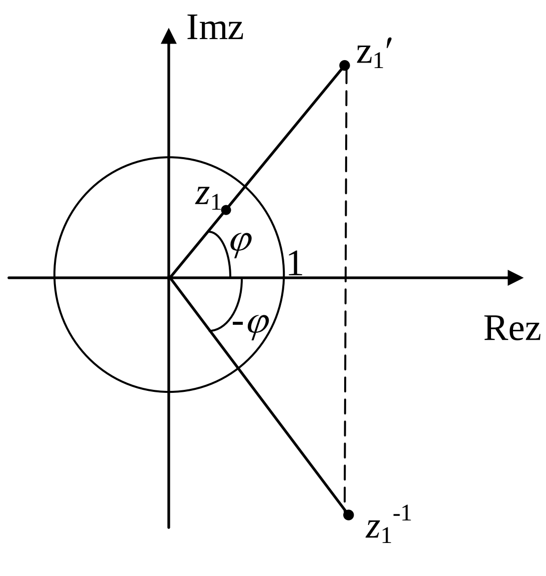


рис. 5

Следует заметить, что для комплексных чисел понятия "больше" и "меньше" не могут быть разумно определены, так как эти числа, в отличие от действительных чисел, располагаются не на прямой линии, точки которой естественным образом упорядочены, а на плоскости. Поэтому сами комплексные числа (а не их модули) никогда нельзя соединять знаком неравенства.

Замечание 1. *Взяв совокупность комплексных чисел* $a+bi$*, мы получим числовое поле, относительно четырех арифметических операций: сложения, умножения, вычитания и деления (замкнутость этих операций показана выше).*

Замечание 2. При выполнении преобразований будут использоваться следующие формулы тригонометрии: $\cos(\varphi+2\pi k)=\cos\varphi$, $\sin(\varphi+2\pi k)=\sin\varphi$, $\cos(\varphi+\pi)=-\cos\varphi$, $\sin(\varphi+\pi)=-\sin\varphi$.

Извлечение корня из комплексных чисел

Переходим к вопросу о возведении комплексных чисел в степень и извлечении из них корня. Для возведения числа $z=a+bi$ в целую положительную степень n достаточно применить к выражению $(a+bi)^n$ формулу бинома Ньютона, а затем воспользоваться равенствами $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, откуда вообще

$$i^{4k}=1,\ i^{4k+1}=i,\ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i.$$

Если число z задано в тригонометрической форме, то при натуральном n из формулы (5) вытекает следующая формула, *называемая формулой Муавра:*

$$z^n=(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

(12)

При возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. Формула (12) верна и для целых отрицательных показателей. Действительно, ввиду $z^{-n}=(z^{-1})^n$, достаточно применить формулу Муавра к числу z^{-1}, тригонометрическую форму которого дает формула (11).

Пусть нужно извлечь корень n-ой степени из числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Предположим, что это сделать можно и что в результате получается число $\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$, *т. е.*

$$\left[\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (13)$$

Тогда, по формуле Муавра, $\rho^n=r$, т. е. $\rho=\sqrt[n]{r}$, где в правой части стоит однозначно определенное положительное значение корня n-й степени из положительного действительного числа r. С другой стороны, аргумент левой части равенства (13) есть $n\theta$. Нельзя утверждать, однако, что $n\theta$ равно φ, так как эти углы могут в действительности отличаться на слагаемое, являющееся некоторым целым кратным числа 2π. Поэтому $n\theta=\varphi+2k\pi$, где k – целое число, откуда

$$\theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Обратно, если мы берем число $\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n})$, то при любом целом k, положительном или отрицательном, n-я степень этого числа равна z. Таким образом,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}). \qquad (14)$$

Давая k различные значения, мы не всегда будем получать различные значения искомого корня. Действительно, при

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1 \qquad (15)$$

мы получим n значений корня, которые все будут различными, так как увеличение k на единицу влечет за собой увеличение аргумента на $\frac{2\pi}{n}$. Пусть теперь k произвольно. Если $k=nq+r,\ 0\le r\le n-1$, то

$$\frac{\varphi+2k\pi}{n}=\frac{\varphi+2(nq+r)\pi}{n}=\frac{\varphi+2r\pi}{n}+2q\pi,$$

т. е. значение аргумента при нашем k отличается от значения аргумента при $r=k$ на число, кратное 2π. Мы получаем, следовательно, такое же значение корня, как при значении k, равном r, т. е. входящем в систему (15).

Таким образом, *извлечение корня n-ой степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n-й степени расположены на окружности радиуса* $\sqrt[n]{|z|}$ *с центром в начале координат и делят эту окружность на n равных частей.*

В частности, корень n-й из действительного числа z имеет также n различных значений; действительных среди этих значений будет два, одно или ни одного в зависимости от знака z и четности n.

Корни из единицы

Особенно важен случай извлечения корня n-й степени из числа 1. Этот корень имеет n значений, причем, ввиду равенства $1=\cos 0+i\sin 0$ и формулы (14), все эти значения или, как мы будем говорить, все *корни n-й степени из единицы*, задаются формулой

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=\overline{0,\ n-1}. \tag{16}$$

Действительные значения корня n-й степени из единицы получаются из формулы (16) при значениях $k=0$ и $\frac{n}{2}$, если n четно, и при $k=0$, если n нечетно. На комплексной плоскости корни n-й степени из единицы расположены на окружности единичного круга и делят ее на n равных дуг; одной из точек деления служит число 1. Отсюда следует, что те из корней n-й степени из единицы, которые не являются действительными, расположены симметрично относительно действительной оси, т. е. попарно сопряжены.

Квадратный корень из единицы имеет два значения: 1 и –1, корень четвертой степени из единицы - четыре значения: 1, –1, i и $-i$. Для дальнейшего полезно запомнить значения кубичного корня из единицы. Это будут, ввиду (16), числа $\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$, где $k=0,\ 1,\ 2,$ т. е., кроме самой единицы, также сопряженные между собою числа

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \varepsilon_2&=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Свойства корней

1°. *Все значения корня n-й степени из комплексного числа z можно получить умножением одного из этих значений на все корни n-й степени из единицы.*

2°. *Произведение двух корней n-й степени из единицы само есть корень n-й степени из единицы.*

3°. *Число, обратное корню n-й степени из единицы, само есть такой же корень.*

Всякий корень k-й степени из единицы будет также корнем l-й степени из единицы для всякого l, кратного k. Отсюда следует. Что если мы будем рассматривать всю совокупность корней n-й степени из единицы, то некоторые из этих корней уже будут корнями n'-й степени из единицы для некоторых n', являющихся делителями числа n. Для всякого n существуют, однако, такие корни n-й степени из единицы, которые не являются корнями из единицы никакой меньшей степени. Такие корни называются *первообразными корнями* n-й степени из единицы. Их существование вытекает из формулы (16): если значение корня, соответствующее данному значению k, мы обозначим через ε_k (так что $\varepsilon_0=1$), то на основании формулы Муавра $\varepsilon_1^k=\varepsilon_k$. Никакая степень числа ε_1, меньшая, чем n-я, не будет, следовательно, равна 1, т. е. $\varepsilon_1=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$ является первообразным корнем.

<u>Теорема</u> 1.1. *Корень n-й степени из единицы ε тогда и только тогда будет первообразным, если его степени ε^k, $k=0, 1, \ldots, n-1$, различны, т.е. если ими исчерпываются все корни n-й степени из единицы.*

Число ε_1, найденное выше, в общем случае – не единственный первообразный корень n-й степени. Для разыскания всех этих корней служит следующая теорема.

<u>Теорема</u> 1.2. *Если ε есть первообразный корень n- й степени из единицы, то число ε^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n-й степени, если k взаимно просто с n.*

В самом деле, пусть d будет наибольшим общим делителем чисел k и n. Если $d>1$ и $k=dk'$, $n=dn'$, то $(\varepsilon^k)^{n'}=\varepsilon^{kn'}=\varepsilon^{k'n}=(\varepsilon^n)^{k'}=1$, т. е. корень ε^k оказался корнем n'-й степени из единицы.

Если p – простое число, то первообразными корнями p-й степени из единицы будут все эти корни, кроме самой единицы. С другой стороны, среди корней четвертой степени из единицы первообразными будут i и $-i$, но не 1 и -1.

1.2. Контрольные вопросы

1. Что такое мнимая единица?
2. Алгебраическая форма записи комплексного числа.
3. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
4. Формулы сложения и вычитания комплексных чисел в алгебраической форме.
5. Формулы умножения и деления комплексных чисел в алгебраической форме.
6. Формула умножения комплексных чисел в тригонометрической форме. Чему равны $|\alpha\beta|$, $\arg(\alpha\beta)$?

7. Формула деления комплексных чисел в тригонометрической форме. Чему равны $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$|, $\arg\frac{\alpha}{\beta}$?
8. Что больше $|z_1+z_2|$ или $|z_1|+|z_2|$?
9. Как задается число, сопряженное с комплексным числом α:

   а) в алгебраической форме;

   б) в тригонометрической форме, где α=a+bi?
10. Для какого комплексного числа z выполняется условие: $z=\bar{z}$?
11. Формула Муавра.
12. Формула вычисления корней n-й степени из комплексного числа.
13. Что такое первообразный корень *n-ой* степени из единицы?
14. Свойства первообразных корней *n-ой* степени из единицы.
15. Сколько первообразных корней будет у корня 6 степени из единицы.
16. Какую универсальную алгебру образуют корни *n-ой* степени из единицы относительно операции умножения?

1.3. Решение типовых примеров

Пример 1. Вычислить 1) i^{25}, 2) i^{127}, 3) i^{204}, 4) i^{-19}.

Решение. 1) $i^{25}=(i^2)^{12}\cdot i=(-1)^{12}\cdot i=i$. 2) $i^{127}=(i^2)^{63}\cdot i=(-1)^{63}\cdot i=-i$.

3) $i^{204}=(i^2)^{102}=(-1)^{102}=1$. 4) $i^{-19}=(i^2)^{-10}\cdot i=(-1)^{-10}\cdot i=i$.

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1=5+3i,\quad z_2=4-3i$. Вычислить: 1) z_1+z_2, 2) z_1-z_2, 3) $z_1\cdot z_2$, 4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

1) $z_1+z_2=(5+3i)+(4-3i)=(5+4)+(3i-3i)=9$.

2) $z_1-z_2=(5+3i)+(4-3i)=(5-4)+(3i-(-3i))=1+6i$.

3) $z_1 z_2 = (5+3i)(4-3i) = 5\cdot 4 + 5\cdot(-3i) + 3i\cdot 4 + 3i\cdot(-3i) = 20 - 15i + 12i - 9i^2 =$
$= 20 - 3i + 9 = 29 - 3i$

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5+3i}{4-3i} = \dfrac{(5+3i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{20+15i+12i+9i^2}{16+9} = \dfrac{11+27i}{25} = \dfrac{11}{25} + \dfrac{27i}{25}$.

Пример 3. Вычислить $\dfrac{(3^3 i^7 + 3^{2,5} i^6)^{30}}{(i^{27} + i^8)^{29}}$.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$\frac{9^{30}(3(i^2)^3 i + \sqrt{3}(i^2)^3)^{30}}{((i^2)^{13} i + (i^2)^4)^{29}} = \frac{9^{30}(-3i - \sqrt{3})^{30}}{(-i+1)^{29}}.$$

Приведем комплексное число, стоящее в числителе к тригонометрической форме: $z_1 = -\sqrt{3} - 3i$, $a = -\sqrt{3}$, $b = -3$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, $\cos\varphi = -\dfrac{1}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно, $\varphi = \dfrac{4\pi}{3}$ и $z_1 = 2\sqrt{3}(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3})$. Воспользуемся формулой Муавра:

$$z_1^{30} = (2\sqrt{3}(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}))^{30} = (2\sqrt{3})^{30}(\cos 30\cdot\frac{4\pi}{3} + i\sin 30\cdot\frac{4\pi}{3}) =$$
$$= 12^{15}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 12^{15}(\cos 0 + i\sin 0).$$

Совершенно аналогично преобразуем выражение, стоящее в знаменателе: приведем комплексное число, стоящее в знаменателе к тригонометрической форме:

$z_2 = 1 - i$, $a = 1$, $b = -1$, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, следовательно, $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$ и $z_2 = \sqrt{2}(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4})$. Воспользуемся формулой Муавра:

$$z_2^{29} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{29} = (\sqrt{2})^{29}\left(\cos 29\cdot\frac{7\pi}{4} + i\sin 29\cdot\frac{7\pi}{4}\right) =$$
$$= (\sqrt{2})^{29}\left(\cos\frac{203\pi}{4} + i\sin\frac{203\pi}{4}\right) = 2^{14}\sqrt{2}\left(\cos\left(50\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(50\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right) =$$

$$=2^{14}\sqrt{2}\ \left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

После этих преобразований наше выражение принимает вид:

$$\frac{9^{30}12^{15}(\cos 0+i\sin 0)}{2^{14}\cdot\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})}=\frac{3^{75}2^{30}(\cos 0+i\sin 0)}{2^{14}\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})}.=\frac{3^{75}2^{16}(\cos 0+i\sin 0)}{(\sqrt{2})\ (\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})}.$$

Используя формулу деления комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, получаем:

$$\frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(\cos(0-\frac{3\pi}{4})+i\sin(0-\frac{3\pi}{4}))=\frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4})=$$

$$=\frac{3^{75}2^{16}}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=-3^{75}2^{15}(1+i).$$

Пример 4. Решить уравнение $x^3+1+i=0$.

Решение. $x=\sqrt[3]{-i-1}$. Найдем тригонометрическую форму комплексного числа, стоящего под знаком корня:

$z=-i-1,\ a=-1, b=-1, r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2},\ \cos\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, следовательно, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$ и $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Используя формулу извлечения корня n-ой степени из комплексного числа, получим:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)}=\sqrt[6]{2}\cos\left(\frac{5\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{5\pi/4+2\pi k}{3}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi+8\pi k}{12}+i\sin\frac{5\pi+8\pi k}{12}\right),\ \text{где}\ k=0,\ 1,\ 2.$$

Подставляя значения k в последнюю формулу, получим три различных корня:

$k=0,\ x_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right);$

$k=1,\ x_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right)=-\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$

k=2, $x_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{1-i}{\sqrt[3]{2}}$.

Пример 5. Решить уравнение $x^2+24-10i=0$.

Решение. $x^2=-24+10i$. Если $x=a+bi$, где a и b действительные числа, то $x^2=-24+10i=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$. Таким образом, сравнивая действительные и мнимые части, получим: $a^2-b^2=-24$, $ab=5$.

Решим полученную систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Из второго уравнения выразим b и подставим в первое, тогда

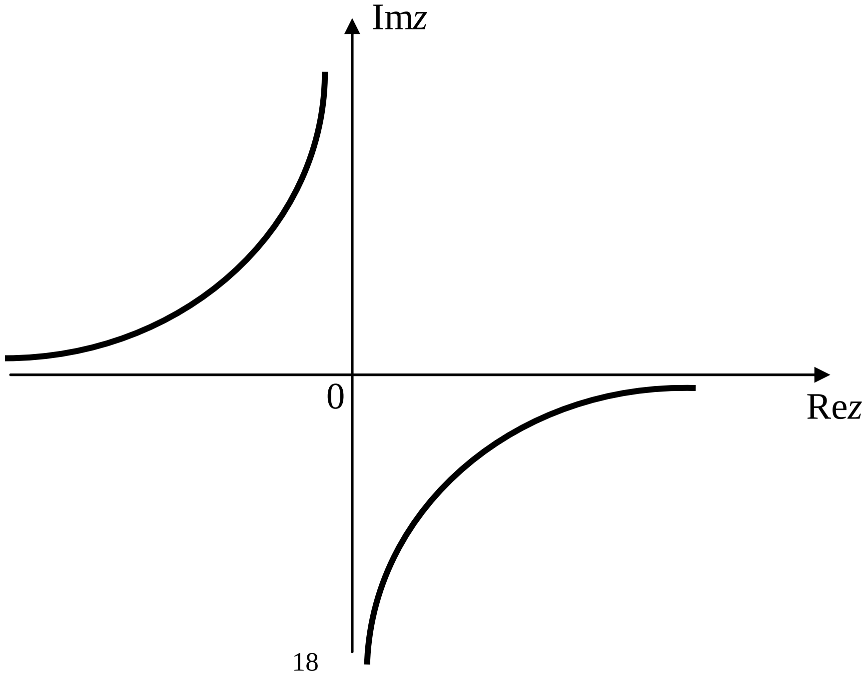
$$b=\frac{5}{a},a^2-\frac{25}{a^2}=-24.$$

Обозначив $a^2=v$, получим квадратное уравнение $v^2+24v-25=0$, из которого находим $v_1=-25$, $v_2=1$. Но так как a - вещественное число, то $v\geq 0$, значит, $v=1$, т.е. $a=\pm 1$ и $b=\pm 5$. Тогда имеем два значения корня в алгебраической форме: $x_1=1+5i$, $x_2=-1-5i$.

Проверка: $x_1^2=x_2^2=1-25+10i=-24+10i$.

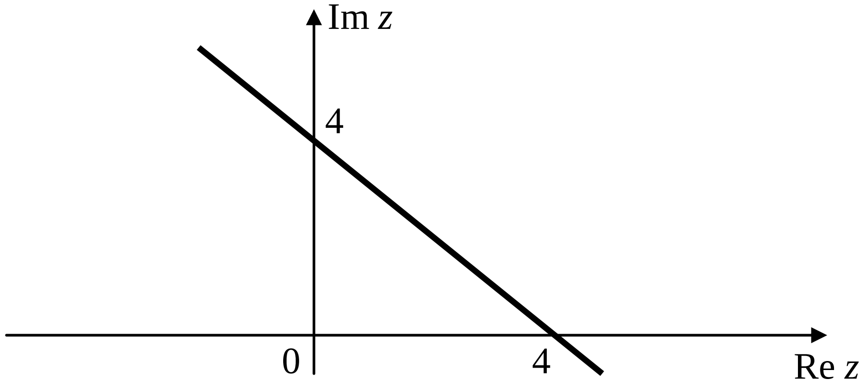
Пример 6. Найти и изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\mathrm{Im}(z^2)=-2$.

Решение. Пусть $z=x+iy$, тогда $\mathrm{Im}(z^2)=2xy=-2$, т. е. данным условием задается множество точек комплексной плоскости, лежащих на гиперболе, заданной уравнением $xy=-1$.



Пример 7. Найти и изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию Rez+Imz=4.

Решение. Пусть $z=x+iy$, тогда данное выражение принимает вид $x+y=4$, т.е. множеством точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию Rez+Imz=4, являются все точки, расположенные на прямой $x+y=4$. Изобразим это на графике:



Пример 8. Найти и изобразить множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям $\begin{cases} [3/5] < |z| \le [5/3] \\ \arg z = [7/5] \cdot 20^0 \end{cases}$.

Решение. Вычислив целую часть, получим следующую систему

$$\begin{cases} 0 < |z| \le 1 \\ \arg z = 20^0 \end{cases}.$$

Определим, какое множество точек комплексной плоскости задает неравенство системы:

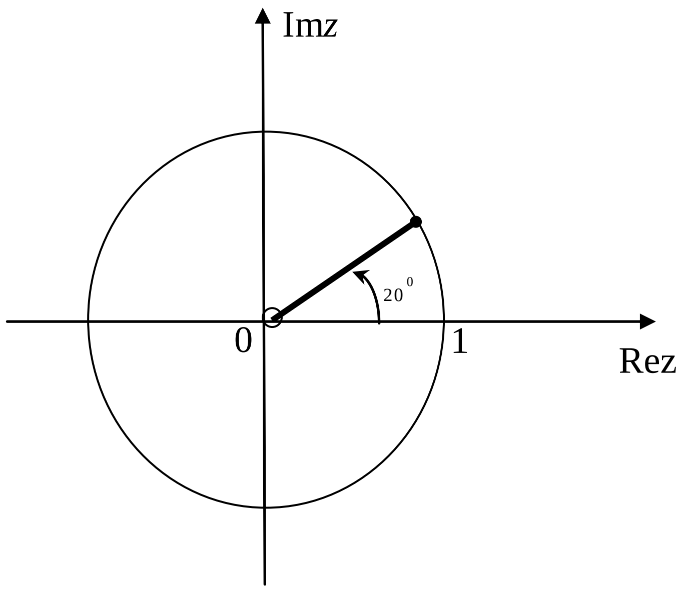
$|z| > 0$ – это все точки комплексной плоскости, кроме точки 0 (Imz=0, Rez=0);

$|z| \le 1$ – это внутренность круга с центром в точке 0, радиуса $r=1$, включая границу круга, т.е. окружность $|z| = 1$.

Двойное неравенство $0 < |z| \le 1$, таким образом, задает множество точек комплексной плоскости, лежащих внутри круга $|z| \le 1$ и на его границе, но не включая центр круга (точку 0).

$\arg z = 20^0$ – это множество точек комплексной плоскости, лежащих на луче, исходящем из точки 0 и составляющем с положительной частью действительной оси Rez угол 20^0 по положительному направлению отсчета углов.

Таким образом, искомым множеством будет пересечение найденных множеств, т. е. часть луча, исходящего из точки 0 и составляющего с положительной частью действительной оси угол 20^0 по положительному направлению отсчета углов, содержащаяся внутри круга $|z| \le 1$, исключая саму точку 0. Изобразим это на графике:



Пример 9. Выразить cos10*x*, sin10*x* через cos*x* и sin*x*.

Решение. Рассмотрим сумму *z*= cos10*x*+*i*sin10*x*. Тогда по формуле Муавра, имеем: cos10*x*+*i*sin10*x*=(cos*x*+*i*sin*x*)^{10}. Используя формулу бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \frac{n!}{(n-1)!1!}ab^{n-1} + b^n,$$

получим

$$(\cos x+i\sin x)^{10}=\cos^{10}x+\frac{10!}{1!9!}i\cos^9 x\sin x+\frac{10!}{2!8!}\cos^8 x(i\sin x)^2+\frac{10!}{3!7!}\cos^7 x(i\sin x)^3+$$
$$+\frac{10!}{4!6!}\cos^6 x(i\sin x)^4+\frac{10!}{5!5!}\cos^5 x(i\sin x)^5+\frac{10!}{6!4!}\cos^4 x(i\sin x)^6+\frac{10!}{7!3!}\cos^3 x(i\sin x)^7+$$
$$+\frac{10!}{8!2!}\cos^2 x(i\sin x)^8+\frac{10!}{9!1!}\cos x(i\sin x)^9+(i\sin x)^{10}=\cos^{10}x+10i\cos^9 x\sin x-$$
$$-45\cos^8 x\sin^2 x-120i\cos^7 x\sin^3 x+210\cos^6 x\sin^4 x+252i\cos^5 x\sin^5 x-210\cos^4 x\sin^6 x-$$
$$-120i\cos^3 x\sin^7 x+45\cos^2 x\sin^8 x+10i\cos x\sin^9 x-\sin^{10}x.$$

Выделим мнимую и действительную части, тем самым получим искомые ответы.

$$\operatorname{Im} z=\sin 10x=10\cos^9 x\sin x-120\cos^7 x\sin^3 x+252\cos^5 x\sin^5 x+10\cos x\sin^9 x-$$
$$-120\cos^3 x\sin^7 x.$$

$$\operatorname{Re} z=\cos 10x=\cos^{10}x-45\cos^8 x\sin^2 x+210\cos^6 x\sin^4 x-210\cos^4 x\sin^6 x+$$
$$+45\cos^2 x\sin^8 x-\sin^{10}x.$$

Замечание. Аналогичным образом можно найти cosnx, sinnx, используя формулы Муавра и бинома Ньютона. Действительно:

$\cos nx+i\sin nx=(\cos x+i\sin x)^n$,

$$\cos nx=\cos^n x-\frac{n!}{2!(n-2)!}\cos^{n-2}x\sin^2 x+\frac{n!}{4!(n-4)!}\cos^{n-4}x\sin^4 x-\ldots,$$

$$\sin nx=\frac{n!}{1!(n-1)!}\cos^{n-1}x\sin x-\frac{n!}{3!(n-3)!}\cos^{n-3}x\sin^3 x+\frac{n!}{5!(n-5)!}\cos^{n-5}x\sin^5 x-\ldots$$
.

Пример 10. Найти суммы

$$S(x)=\sin x-\sin 2x+\ldots+\sin 99x,\ T(x)=\cos x-\cos 2x+\ldots+\cos 99x.$$

Решение. Вычислим сумму $T(x)+iS(x)$.

$$T(x)+iS(x)=(\cos x+i\sin x)-(\cos 2x+i\sin 2x)+\ldots+(\cos 99x+i\sin 99x).$$

По формуле Муавра имеем:

$$T(x)+iS(x)=(\cos x+i\sin x)-(\cos x+i\sin x)^2+\ldots+(\cos x+i\sin x)^{99}.$$

Обозначим $\cos x+i\sin x=a$ и воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии, тогда

$$T(x)+iS(x)=a-a^2+\ldots+a^{99}=\frac{a(1-(-a)^{99})}{1-(-a)}=\frac{a+a^{100}}{1+a}\,.$$

Учитывая наше обозначение и используя формулу Муавра, получим:

$$T(x)+iS(x)=\frac{(\cos x+i\sin x)+(\cos x+i\sin x)^{100}}{1+\cos x+i\sin x}=\frac{\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x}{1+\cos x+i\sin x}=$$

$$=\frac{\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x}{2\cos^2({}^{x}\!/_{2})+i2\sin({}^{x}\!/_{2})\cos({}^{x}\!/_{2})}=\frac{\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x}{2\cos({}^{x}\!/_{2})(\cos({}^{x}\!/_{2})+i\sin({}^{x}\!/_{2}))}.$$

Умножим в полученном равенстве числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю и раскроем скобки, используя формулу умножения комплексных чисел в тригонометрической форме:

$$T(x)+iS(x)=\frac{(\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x)(\cos({}^{x}\!/_{2})-i\sin({}^{x}\!/_{2}))}{2\cos({}^{x}\!/_{2})(\cos({}^{x}\!/_{2})+i\sin({}^{x}\!/_{2}))(\cos({}^{x}\!/_{2})-i\sin({}^{x}\!/_{2}))}=$$

$$=\frac{(\cos x+i\sin x+\cos 100x+i\sin 100x)(\cos(-{}^{x}\!/_{2})+i\sin(-{}^{x}\!/_{2}))}{2\cos({}^{x}\!/_{2})(\cos({}^{x}\!/_{2})+i\sin({}^{x}\!/_{2}))(\cos({}^{x}\!/_{2})-i\sin({}^{x}\!/_{2}))}=$$

$$=\frac{\cos({}^{x}\!/_{2})+i\sin({}^{x}\!/_{2})+\cos({}^{199x}\!/_{2})+i\sin({}^{199x}\!/_{2})}{2\cos({}^{x}\!/_{2})(\cos^2({}^{x}\!/_{2})+\sin^2({}^{x}\!/_{2}))}=\frac{\cos({}^{x}\!/_{2})+\cos({}^{199x}\!/_{2})}{2\cos({}^{x}\!/_{2})}+i\frac{\sin({}^{x}\!/_{2})+\sin({}^{199x}\!/_{2})}{2\cos({}^{x}\!/_{2})}.$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулы суммы косинусов двух аргументов и суммы синусов двух аргументов, тогда

$$T(x)+iS(x)=\frac{2\cos(({}^{x}\!/_{2}+{}^{199x}\!/_{2})/2)\cos(({}^{x}\!/_{2}-{}^{199x}\!/_{2})/2)}{2\cos({}^{x}\!/_{2})}+$$

$$+i\frac{2\sin(({}^{x}\!/_{2}+{}^{199x}\!/_{2})/2)\cos(({}^{x}\!/_{2}-{}^{199x}\!/_{2})/2)}{2\cos({}^{x}\!/_{2})}=\frac{\cos 50x\cos({}^{99x}\!/_{2})}{\cos({}^{x}\!/_{2})}+i\frac{\sin 50x\cos({}^{99x}\!/_{2})}{\cos({}^{x}\!/_{2})}.$$

Таким образом, мы получили следующие значения искомых сумм:

$$T(x)=\frac{\cos 50x\cos({}^{99x}\!/_{2})}{\cos({}^{x}\!/_{2})}\ \text{и}\ S(x)=\frac{\sin 50x\cos({}^{99x}\!/_{2})}{\cos({}^{x}\!/_{2})}.$$

1.4. Индивидуальные задания

$\overline{mn}$ – вариант

1. Вычислить, используя правила действий над комплексными числами в алгебраической форме

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3} + i^{100-m} + (m+2)i^{99-m} + (n+m)i^{98-m} + (11-m)i^{97-m}, \quad \text{если} \quad z_1 = m+1+5i,$$

$z_2 = m+n+2-mi$, $z_3 = 2 - i^{2m+3}$.

2. Вычислить, используя правила действий над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1^{30+m} z_3^{10+n}}{z_2^{20+n+m}}, \quad \text{если} \quad z_1 = (m+2)i^{2m} + (m+2)i^{2n+3}, \quad z_2 = (\sqrt{3})^{10+m} i^{9+n} - (\sqrt{3})^{9+m} i^{8+n},$$

$z_3 = (m+1)i^{m+3}$.

3. Решить уравнения в поле комплексных чисел:

$$1)\ (n+1)x^{n+3} + (m+2)i^m = 0, \quad 2)\ (5-n)x^2 + 2x + 10 - m = 0$$

4. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам $z=a+bi$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\begin{cases} |z| \ge n+2 \\ \dfrac{\pi}{m+2} \le \arg z \le \dfrac{2\pi}{m+2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} n \le |z| \le n+2 \\ \dfrac{\pi}{m+1} \le \arg z \le \dfrac{2\pi}{m+1} \end{cases}$; в) $\begin{cases} |z| < n+2 \\ \arg z = \dfrac{2\pi}{m+2} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} a \ge m+2 \\ b = 10-m \end{cases}$; д) $\begin{cases} a \le m+2 \\ b > 5-m \end{cases}$.

5. Изобразить на плоскости множество точек, соответствующих комплексным числам z, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z=\overline{mn},$ б) $\left|\dfrac{z-\overline{mn}}{z+i}\right|=1,$ в) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{30-\overline{mn}}{z}\right)=30-\overline{mn},$

г) $\operatorname{Im}(z^2)=10-\overline{mn},$ д) $\left|\overline{mnz}\right|+\operatorname{Im}(\overline{mnz})=1,$ е) $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-\overline{mn}}{z+\overline{\overline{mn}}}\right)=0.$

6. Выразить $f(x)$ через $\sin x$ и $\cos x$, где $f(x)=\begin{cases}\sin(m+n+2)x, & при\ n>0\\ \cos(m+2)x, & при\ \ n=0.\end{cases}$

7. Найти сумму

$$f(x)+(-1)^{(m+n+2)}f((m+n+2)x)+\ldots+(-1)^{99(m+n+2)}f(99(m+n+2)x),$$

где $f(x)=\begin{cases}\sin x, & при\ n>0\\ \cos x, & при\ \ n=0.\end{cases}$

8. Найти все значения корня, не переходя к тригонометрической форме:

1) $\sqrt{i}$; 2) $\sqrt{-i}$; 3) $\sqrt{4+3i}$; 4) $\sqrt{8-15i}$; 5) $\sqrt{-4-3i}$;

6) $\sqrt{-7+24i}$; 7) $\sqrt{5-2i}$; 8) $\sqrt{4-3i}$; 9) $\sqrt{3+4i}$; 10) $\sqrt{21-20i}$;

11) $\sqrt{-3+4i}$; 12) $\sqrt{6-8i}$; 13) $\sqrt{-6-8i}$; 14) $\sqrt{12+5i}$; 15) $\sqrt{-5+12i}$;

16) $\sqrt{-20-15i}$; 17) $\sqrt{15-20i}$; 18) $\sqrt{-8+15i}$; 19) $\sqrt{10+24i}$; 20) $\sqrt{-24+10i}$;

21) $\sqrt{1+3i}$; 22) $\sqrt{2-3i}$; 23) $\sqrt{24+7i}$; 24) $\sqrt{-24-7i}$; 25) $\sqrt{8+6i}$.

2. Кольцо многочленов

2.1. Основные определения и теоремы

<u>Определение</u> 2.1. Многочленом (или полиномом) n-й степени от неизвестного x называется выражение вида:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \text{ –}$$

сумма неотрицательных целых степеней неизвестного x, взятых с некоторыми коэффициентами.

<u>Определение</u> 2.2. Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ будут считаться *равными* (или тождественно равными), $f(x)=g(x)$, в том случае, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного.

Для многочленов с комплексными коэффициентами определены операции сложения и умножения.

Если даны два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ с комплексными коэффициентами, записанные для удобства по возрастающим степеням x:

$$\mathrm{f(x)} = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,\ a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_{s-1}x^{s-1} + b_sx^s,\ b_s \neq 0$$

и если, например, $n \geq s$, то их суммой называется многочлен

$$f(x)+g(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n,$$

коэффициенты, которого получаются сложением коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, стоящих при одинаковых степенях неизвестного, т.е.

$$c_i=a_i+b_i \qquad i=0, 1, \ldots, n,$$

причем при $n>s$ коэффициенты $b_{s+1}, b_{s+2}, \ldots, b_n$ следует считать равными нулю. Степень суммы будет равна n, если n больше s, но при $n=s$ она может случайно оказаться меньше n, а именно в случае $b_n=-a_n$.

Произведением многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен

$$f(x)\cdot g(x)=d_0+d_1x+\ldots+d_{n+s-1}x^{n+s-1}+d_{n+s}x^{n+s},$$

коэффициенты которого определяются следующим образом:

$$d_i=\Sigma a_k b_l, \quad i=0, 1, \ldots, n+s-1, n+s,$$

т.е. коэффициенты d_i есть результат перемножения таких коэффициентов многочленов $f(x)$ и $g(x)$, сумма индексов которых равна i, и сложения всех таких произведений, в частности, $d_0=a_0b_0$, $d_1=a_0b_1+a_1b_0$, ... , $d_{n+s}=a_nb_s$. Из последнего равенства вытекает неравенство $d_{n+s}\neq 0$ и поэтому степень произведения двух многочленов равна сумме степеней многочленов.

<u>Теорема</u> 2.1. Для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x), \qquad (1)$$

причем степень многочлена $r(x)$ меньше степени $g(x)$ или же $r(x)=0$. Многочлены $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющие условию (1) определяются однозначно.

<u>Определение</u> 2.3. Пусть даны ненулевые многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с комплексными коэффициентами. Если остаток от деления $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю, т.е., как говорят, $f(x)$ делится (или нацело делится) на $g(x)$, то многочлен $g(x)$ называется *делителем многочлена f(x).*

<u>Определение</u> 2.4. Многочлен $h(x)$ называется *общим делителем* для $f(x)$ и $g(x)$, если он служит делителем для каждого из этих многочленов.

<u>Определение</u> 2.5 . *Наибольшим общим делителем* отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется многочлен $d(x)$, который является их общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой общий делитель этих многочленов. Обозначается наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$ символом $(f(x), g(x))$.

<u>Теорема</u> 2.2. Если $d(x)$ есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то можно найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

Можно считать при этом, если степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ больше нуля, что степень $u(x)$ меньше степени $g(x)$, а степень $v(x)$ меньше степени $f(x)$.

<u>Теорема</u> 2.3. Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда взаимно просты, если можно найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1.$$

<u>Определение</u> 2.6. Число $f(c)=a_0 c^n+a_1c^{n-1}+\ldots+a_{n-1}c+a_n$,полученное заменой в выражении

$$f(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1} +\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

(2)

неизвестного x числом c и последующим выполнением всех указанных операций, называется *значением многочлена $f(x)$ при $x=c$.*

<u>Определение</u> 2/7. Число с называется *корнем многочлена* $f(x)$ (или уравнения $f(x)=0$), если $f(c)=0$.

<u>Теорема</u> 2/4 (Безу). Остаток от деления многочлена $f(x)$ на линейный многочлен (x–с) равен значению f(с) многочлена $f(x)$ при $x=c$.

<u>Следствие</u>. Число c тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, если $f(x)$ делится на $(x–c)$.

<u>Определение</u> 2.8. *Кратным корнем* многочлена (2) называется число c такое, что многочлен $f(x)$ делится нацело на некоторую степень $(x–c)$. При этом c называется корнем кратности k, если $f(x)$ делится нацело на $(x– c)^k$, но не делится на $(x– c)^{k+1}$. Число k называется кратностью корня c в многочлене $f(x)$, а сам корень c – k-*кратным корнем* этого многочлена. Если k=1, то говорят, корень c – *простой*.

<u>Теорема</u> 2.5. Если число c является k-кратным корнем многочлена $f(x)$, то при k>1 оно будет (k–1)–кратным корнем первой производной этого многочлена; если же k=1, то c не будет служить корнем для $f'(x)$.

<u>Теорема</u> 2.6 (основная теорема алгебры комплексных чисел). Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

<u>Следствие</u> 1. Всякий многочлен $f(x)$ степени n, $n\geq1$, с любыми числовыми коэффициентами имеет n корней, если каждый из корней считать столько раз, какова его кратность.

<u>Следствие</u> 2. Всякий многочлен $f(x)= a_0x^n+a_1x^{n-1} +\ldots+a_{n-1}x+a_n$ степени n, $n\geq 1$, с любыми числовыми коэффициентами можно разложить в произведение n *линейных множителей,*

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n),$$

(3)

где $\alpha_1,\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n$ корни многочлена $f(x)$ написанные столько раз какова их кратность. Причем, разложение (3) является для многочлена $f(x)$ единственным с точностью до порядка сомножителей.

<u>Следствие</u> 3. Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$, степени которых не превосходят n, имеют равные значения более чем при n различных значениях неизвестного, то $f(x)=g(x)$.

<u>Следствие</u> 4. Существует многочлен не более чем n-ой степени, принимающий наперед заданные значения $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ при $n+1$ заданных различных значениях $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ неизвестного.

Этот многочлен можно найти по формуле:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\frac{c_i(x-a_1)\ldots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\ldots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_{n+1})} \qquad (4)$$

называемой *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Рассмотрим следствия основной теоремы для многочленов с действительными коэффициентами.

<u>Следствие</u> 2.5. Если комплексное (но не действительное) число α служит корнем многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами, то корнем для $f(x)$ будет и сопряженное число $\overline{\alpha}$, причем той же кратности, что и корень α.

<u>Следствие</u> 2.6. Комплексные корни многочлена $f(x)$ с действительными коэффициентами попарно сопряжены.

<u>Следствие</u> 2.7. Всякий многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами представим, притом единственным способом (с точностью до порядка сомножителей), в виде произведения своего старшего коэффициента a_0 и нескольких многочленов с действительными коэффициентами, линейных вида $\left(x-\alpha\right)$, соответствующих его действительным корням, и квадратных вида $x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}$, соответствующих парам сопряженных комплексных корней.

Следствие 2.8. Многочлен $f(x)$ нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.

Определение 2.9. Пусть дан многочлен $f(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1,

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}...+a_{n-1}x+a_n, \qquad (5)$$

и пусть α_1, α_2, … , α_n – его корни (каждый кратный корень взят здесь столько раз какова его кратность). Тогда $f(x)$ обладает следующим разложением:

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).$$

Перемножая скобки, стоящие справа, а затем, приводя подобные члены и сравнивая полученные коэффициенты с коэффициентами (5), мы получим следующие равенства, называемые *формулами Вьета (Виета)* и выражающие коэффициенты многочлена через его корни:

$a_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n)$,

$a_2=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\dots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\dots+\alpha_{n-1}\alpha_n$,

$a_3=-(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\dots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$,

. . . .

$a_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-2}\alpha_n+\dots+\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n)$,

$a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$,

таким образом, в правой части k–го равенства, k=1, 2, … , n, стоит сумма всевозможных произведений по k корней, взятая со знаком плюс или минус в зависимости от четности или нечетности k.

Определение 2.10. Многочлен f(x) (коэффициентами из поля P) степени n *приводим в поле P*, если он может быть разложен над этим полем (т.е. в кольце P[x]) в произведение двух множителей (с коэффициентами из поля P), степени которых меньше n

$$f(x)=p(x)q(x), \qquad (6)$$

и $f(x)$ *неприводим в поле P*, если в любом его разложении вида (6) один из множителей имеет степень 0, а другой – степень n.

Свойства неприводимых многочленов:

1° Всякий многочлен первой степени неприводим.

2° Если многочлен $p(x)$ неприводим, то неприводимым будет и всякий многочлен $cp(x)$, где c – отличный от нуля элемент из P.

3° Если $f(x)$ – произвольный, а $p(x)$ – неприводимый многочлен, то либо $f(x)$ делится на $p(x)$, либо же эти многочлены взаимно просты.

4° Если произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делится на неприводимый многочлен $p(x)$, то хотя бы один из этих многочленов делится на $p(x)$.

Теорема 2.7. Всякий многочлен $f(x)$ из кольца P[x], имеющий степень n, $n>1$, разлагается в произведение неприводимых множителей.

Теорема 2.8. Над полем комплексных чисел неприводимыми являются только многочлены первой степени.

Теорема 2.9. Над полем действительных чисел неприводимыми являются только многочлены второй и первой степени.

Теорема 2.10 (Критерий Эйзенштейна). Пусть дан многочлен

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

с целыми коэффициентами. Если хотя бы одним способом можно подобрать простое число p, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) старший коэффициент a_0 не делится на p,
2) все остальные коэффициенты делятся на p,
3) свободный член, делясь на p, не делится на p^2,

то многочлен $f(x)$ неприводим над полем рациональных чисел.

Определение 2.11. Рациональными дробями называются дроби вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ некоторые многочлены, причем $g(x)\neq 0$. Рациональная дробь называется несократимой, если ее числитель взаимно прост со знаменателем. Рациональная дробь называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

Теорема 2.11. Всякая рациональная дробь представима, притом единственным способом, в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Определение 2.12. Правильная рациональная дробь называется *простейшей*, если ее знаменатель $g(x)$ является степенью неприводимого многочлена $p(x)$,

$$g(x)=p^k(x),\ k\geq 1,$$

а степень числителя $f(x)$ меньше степени $p(x)$.

Теорема 2.12. Всякая правильная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей.

Теорема 2.13. Всякая правильная рациональная дробь обладает единственным разложением в сумму простейших дробей.

Теорема 2.14. Если целое число α служит корнем многочлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, то α будет делителем свободного члена этого многочлена.

Теорема 2.15. Если целочисленный многочлен, старший коэффициент которого равен единице, имеет рациональный корень, то этот корень будет целым числом.

Теорема 2.16. Для получения всех рациональных (целых и дробных) корней целочисленного многочлена

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

нужно найти все целые корни многочлена

$$f'(x)=y^n+a_1y^{n-1}+a_0a_2y^{n-2}\ldots+a_0^{n-2}a_{n-1}y+a_0^{n-1}a_n$$

и разделить их на a_0.

Определение 2.11. Многочленом $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над некоторым полем P называется сумма конечного числа членов вида $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$, где все $k_i\geq 0$, с коэффициентами из поля P; при этом предполагается, что многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не содержит подобных членов и что рассматриваются лишь члены с отличными от нуля коэффициентами. Два многочлена от n неизвестных, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, считаются равными (или тождественно равными), если равны их коэффициенты при одинаковых членах.

Если дан многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ над полем P, то его степенью по отношению к неизвестному x_i, $i=1, 2, \dots, n$, называется наивысший показатель, с каким входит x_i в члены этого многочлена. Если мы назовем степенью члена $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ число $k_1+k_2+\dots+k_n$, т.е. сумму показателей степеней при неизвестных, то степенью многочлена $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (т.е. степенью по совокупности неизвестных) будет наивысшая из степеней его членов.

Определение 2.12. *Симметрическими многочленами* называются многочлены от нескольких неизвестных, которые не меняются ни при какой перестановке неизвестных. *Элементарными симметрическими многочленами* называются следующие n многочленов от n неизвестных:

$\sigma_1=x_1+x_2+ \dots +x_n$,

$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n$,

$\sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\dots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$,

. . . .

$\sigma_{n-1}=x_1x_2 \dots x_{n-1}+x_1x_2 \dots x_{n-2}x_n+\dots+x_2x_3 \dots x_n$,

$\sigma_n=x_1x_2 \dots x_n$.

Теорема 2.17 (основная теорема о симметрических многочленах).

Всякий симметрический многочлен от неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ над полем P является многочленом от элементарных симметрических многочленов $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ с коэффициентами, принадлежащими к полю P.

Контрольные вопросы

1. Какую степень имеет многочлен, представляющий собой комплексное число?
2. Какую степень имеет многочлен, равный сумме двух многочленов степени 3?

3. Какую степень имеет многочлен, равный произведению двух многочленов, степени 2 и 3?
4. Какую наибольшую степень может иметь остаток от деления многочлена на многочлен третьей степени?
5. Какую степень имеет остаток от деления квадратного многочлена на кубический многочлен?
6. Какую степень имеет частное от деления многочлена седьмой степени на многочлен первой степени?
7. В каком случае остаток отделения многочлена $f(x)$ на ненулевой многочлен $g(x)$ равен $f(x)$?
8. На какие многочлены второй степени делится многочлен $f(x)=x^2+1$?
9. Какими свойствами обладает отношение делимости многочленов?
10. Какую степень имеет многочлен, на который делятся все многочлены?
11. В каком случае два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ делятся друг на друга?
12. Какие корни имеет многочлен $f(x)=(x+2)^2x(x^2+1)^3$? Указать их кратности.
13. Что можно определить с помощью схемы Горнера?
14. Кратные корни. Теорема о понижении кратности корня при дифференцировании. Следствие.
15. Пусть $f(c)=f'(c)=f''(c)=0$ и $f'''(c)\neq 0$. Какую кратность имеет корень c многочлена $f(x)$?
16. Как задается интерполяционный многочлен Лагранжа?
17. Сколько действительных корней может иметь многочлен третьей степени с действительными коэффициентами?
18. Сколько действительных корней может иметь многочлен пятой степени с действительными коэффициентами?
19. Привести пример неприводимого в поле рациональных чисел многочлена, пользуясь критерием Эйзенштейна.

20. Перечислить элементарные симметрические многочлены от трех неизвестных.

2.3. Решение типовых задач

Задача 1**.** Найти НОД многочленов

$$f(x)=x^4-2x^3-x+2, \qquad g(x)=x^4-x^3+x-1, \quad h(x)=x^4-4x^2-x+2.$$

Решение. НОД многочленов находится однозначно лишь с точностью до постоянного множителя (постоянные, отличные от нуля множители на делимость многочленов не влияют). Поэтому можно условиться, в качестве НОД многочленов брать тот, у которого старший коэффициент равен 1.

Применяя алгоритм Евклида к многочленам с целыми коэффициентами, мы можем, чтобы избежать дробных коэффициентов, умножить делимое или делитель на любое не равное нулю число, причем, не только начиная с какого-либо из последовательных делений, но и в процессе самого этого деления. Это будет приводить, понятно, к искажению частного, но интересующие нас остатки будут приобретать лишь некоторый множитель нулевой степени.

Чтобы найти НОД трех многочленов, сначала находим по алгоритму Евклида НОД любых двух многочленов, например $d(x)=(f(x),h(x))$, а затем находим НОД $d(x)$ и $g(x)$.

Алгоритм Евклида состоит в последовательном делении многочленов с остатком. Будем делить сначала $f(x)$ на $h(x)$, затем $h(x)$ на полученный при делении остаток $r(x)$ (первый остаток), затем первый остаток на второй остаток и т.д., до тех пор, пока не получим в остатке нуль. НОД многочленов $f(x)$ и $h(x)$ будет последний отличный от нуля остаток. Процесс деления будем осуществлять "углом".

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4-2x^3-x+2 & x^4-4x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
x^4-4x^2-x+2 & 1 \\ \cline{1-1}
-2x^3+4x^2 & \\ \hline\hline
x^3-2x^2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
-\;x^4-4x^2-x+2 & x^3-2x^2 \\ \cline{2-2}
x^4-2x^3 & x+2 \\ \cline{1-1}
2x^3-4x^2-x+2 & \\
-\;2x^3-4x^2 & \\ \cline{1-1}
-x+2 & \\
-\;x-2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3-2x^2 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^3-2x^2 & x^2 \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Значит НОД многочленов $f(x)$ и $h(x)$ равен двучлену $x–2$.

$$d(x)=(f(x), h(x))=x–2.$$

Аналогично находим НОД многочленов $d(x)$ и $g(x)$, он будет равен 1. Таким образом, $(f(x), g(x), h(x))=(g(x), (f(x), h(x)))=1$.

*Примечание***.** Знак «=» или «!!» означает, что в ходе деления было произведено умножение на некоторое число, отличное от нуля.

Задача 2. Используя алгоритм Евклида найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, где $d(x)$ – НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$: $f(x)=4x^4–2x^3–16x^2+5x+9$, $g(x)=2x^3–x^2–5x+4$.

Решение. Применим к многочленам $f(x)$ и $g(x)$ алгоритм Евклида. Нужно помнить, что здесь произвол, состоявший в умножении многочленов на постоянные множители, возможный при нахождении НОД, допускать нельзя, так как здесь мы будем использовать и частные, которые при указанном произволе могут искажаться.

В результате деления получим:

$$f(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x),$$

где $q_1(x)=2x$, $r_1(x)= –6x^2–3x+9$,

$$g(x)=r_1(x)q_2(x)+r_2(x),$$

где $q_2(x)= –x/3+1/3$, $r_2(x)= –x+1$,

$$r_1(x)=r_2(x)q_3(x)+r_3(x),$$

где $q_3(x)=6x+9$, $r_3(x)=0$.

Таким образом, алгоритм Евклида записался здесь в три строки, а наибольший общий делитель равен $-r_2(x)=x-1=d(x)$. Чтобы выразить $d(x)$ через многочлены $f(x)$ и $g(x)$, найдем $r_2(x)$ из второй строки алгоритма Евклида:

$$r_2(x)=g(x)-r_1(x)q_2(x).$$

Подставив в это равенство вместо $r_1(x)$ его выражение, найденное из первой строки алгоритма Евклида, получим:

$$r_2(x)=f(x)[-q_2(x)]+g(x)[1+q_1(x)q_2(x)],$$

чтобы получить равенство $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$, нужно предыдущее равенство умножить на (-1), получим:

$$-r_2(x)=f(x)q_2(x)+g(x)[-1-q_1(x)q_2(x)]=d(x),$$

где $u(x)=q_2(x)$, $v(x)=-1-q_1(x)q_2(x)$.

После подстановки в это равенство многочленов $q_1(x)$, $q_2(x)$ получим:

$$u(x)=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3},\ v(x)=\frac{2x^2}{3}-\frac{2x}{3}-1.$$

Задача 3. Способом неопределенных коэффициентов подобрать многочлены $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$, (1) для многочленов $f(x)=x^2-2x-1$, $g(x)=2x^4-3x^3-6x^2+2x+2$.

Решение. Воспользуемся теоремой: если $d(x)$ есть НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то можно найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

Можно считать при этом, если степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ больше нуля, что степень $u(x)$ меньше степени $g(x)$, а степень $v(x)$ меньше степени $f(x)$.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют равенству (1), если $(f(x),g(x))=1$. В нашем случае $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые многочлены, а значит, можно найти многочлен $u(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ и многочлен $v(x)=ex+f$.

Подставив в равенство (1) вместо $f(x)$, $g(x)$, $u(x)$, $v(x)$ их выражения, получим:

$$(x^2-2x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)+(2x^4-3x^3-6x^2+2x+2)(ex+f)=1$$

или

$(a+2e)x^5+(b-2a+2f-3e)x^4+(c-2b-a-3f-6e)x^3+(d-2c-b-6f+2e)x^2+(-2d-c+2f+2e)x-$
$-d+2f=1$.

Таким образом, имеем равенство двух многочленов: в левой части многочлен пятой степени с неопределенными коэффициентами, а в правой многочлен нулевой степени. Два многочлена равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного, получим систему шести линейных уравнений с неизвестными *a, b, c, d, e, f:*

$$\begin{cases} a+2e=0 \\ -2a+b-3e+2f=0 \\ -a-2b+c-6e-3f=0 \\ -b-2c+d+2e-6f=0 \\ -c-2d+2f+2e=0 \\ -d+2f=1 \end{cases}$$

Решая ее, получим: $d=3$, $e=-1$, $f=2$, $c=-4$, $b=-3$, $a=2$.

Таким образом, искомые многочлены $u(x)$ и $v(x)$ будут:

$$u(x)=2x^3-3x^2-4x+3,\ v(x)=-x+2.$$

Задача 4. Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(a)$ и разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-a$, где $f(x)=x^4+2x^3-7x^2+3x-1$, $a=2$.

Решение. По теореме Безу остаток от деления многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x-a$ равен значению $f(a)$ многочлена при $x=a$.

Деление «углом» может быть записано проще: если $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, то коэффициенты частного $q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+ b_2x^{n-3}+ \ldots+b_{n-1}$ и остаток r от деления $f(x)$ на $x-a$ могут быть найдены по схеме Горнера:

	a_0	a_1	a_2	…	a_{n-1}	a_n
a	$b_0=a_0$	$b_1=b_0a+a_1$	$b_2=b_1a+a_2$	…	$b_{n-1}=b_{n-2}a+a_{n-1}$	$P=b_{n-1}a+a_n$

Составив схему Горнера для нашего многочлена, находим $f(2)$:

	1	2	–7	3	–1
2	1	4	1	5	9

$f(2)=9=r_1$, а частное от деления $f(x)$ на $x–2$ есть $q_1(x)=x^3+4x^2+x+5$, т.е. $f(x)=$ $=(x–2)q_1(x)+r_1$

Затем по схеме Горнера разделим $q_1(x)$ на $x–2$, получим частное $q_2(x)$ и остаток r_2, далее $q_2(x)$ разделим на $x–2$, получим $q_3(x)$ и r_3 и т.д.

Для многочлена $f(x)$ получим:

$f(x)=(x–2)q_1(x)+r_1=(x–2)[(x–2)q_2(x)+r_2]+r_1=(x–2)^2q_2(x)+r_2(x–2)+r_1=$
$=(x—2)^2[(x–2)q_3(x)+r_3]+r_2(x–2)+r_1=(x–2)^3q_3(x)+r_3(x–2)^2+r_2(x–2)+r_1=$
$=(x–2)^3[(x—2)q_4(x)+r_4]+r_3(x–2)^2+r_2(x–2)+r_1=(x–2)^4q_4(x)+r_4(x–2)^3+r_3(x–2)^2+r_2(x–2)+$
$+r_1= r_5(x–2)^4+r_4(x–2)^3+r_3(x–2)^2+r_2(x–2)+r_1.$

Таким образом, коэффициенты в разложении многочлена $f(x)$ по степеням $x–2$ равны соответственно остаткам от деления многочленов $f(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, $q_4(x)$ на $x–2$.

Все решение можно записать в таблицу:

	1	2	–7	3	–1
2	1	4	1	5	9
2	1	6	13	31	
2	1	8	29		
2	1	10			
2	1				

Из таблицы видно, что $r_5=1$, $r_4=10$, $r_3=29$, $r_2=31$, $r_1=9$ и

$$f(x)= (x–2)^4+10(x–2)^3+29(x–2)^2+31(x–2)+9.$$

Задача 5. Доказать, что $3^{55}+1 \vdots 122$.

Решение. Рассмотрим многочлен $f(x)=x^{11}+1$. Число $x = –1$ является корнем многочлена $f(x)$ и по теореме Безу $f(x)$ нацело делится на $x+1$, т.е. $f(x)=(x+1)g(x)$, где $g(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами, поэтому $x^{11}+1$ делится на $x+1$ при любом целом x. Положим $x=3^5$. Получаем $3^{55}+1 \vdots 3^5+1$, т.е. $3^{55}+1 \vdots 244$, а т.к. $244 \vdots 122$, делаем вывод, что $3^{55}+1 \vdots 122$.

Замечание. Из правил «деления углом» многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ непосредственно видно, что если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ с целыми коэффициентами, причем $g(x)$ приведенный, то частное и остаток являются многочленами с целыми коэффициентами.

Задача 6. Остатки от деления многочлена $f(x)$ на двучлены $x+5$ и $x-3$ равны –9 и 7 соответственно. Найти остатки от деления этого многочлена на многочлен $g(x)=(x+5)(x-3)$.

Решение. По теореме Безу $f(-5)=-9$, $f(3)=7$. При делении многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)=x^2+2x-15$ получим некоторое частное $q(x)$ и остаток $p(x)=ax+b$, т.е. $f(x)=(x^2+2x-15)q(x)+(ax+b)$.

Подставив в последнее равенство вместо x значения –5 и 3 получим систему двух уравнений с двумя неизвестными a и b:

$$\begin{cases} f(-5)=-5a+b=-9 \\ f(3)=3a+b=7 \end{cases}$$

Решив её, находим $a=2$, $b=1$. Тогда искомый остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ будет равен $2x+1$.

Задача 7. Дан многочлен $f(x)$ с целочисленными коэффициентами и $f(3)\,\vdots\,21$, $f(7)\,\vdots\,21$. Доказать, что $f(10)\,\vdots\,21$.

Решение. Рассмотрим разложение многочлена $f(x)$ по степеням $(x-10)$:

$$f(x)=a_0(x-10)^n+\ldots+a_{n-1}(x-10)+a_n,$$

ввиду того, что $f(3)=a_0(-7)^n+\ldots+a_{n-1}(-7)+a_n=-7\left[a_0(-7)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\right]+a_n$ делится на 21, т.е. делится на 7. Аналогично $f(7)=-3\left[a_0(-3)^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\right]+a_n$ делится на 3. В силу взаимной простоты 3 и 7 число $f(10)=a_n$ делится на 21.

Задача 8. Разложить многочлен x^7+3 в произведение многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами.

Решение. Найдем корни многочлена x^7+3, ими будут

$$x=\sqrt[7]{-3}=\sqrt[7]{3(\cos\pi+i\sin\pi)}=\sqrt[7]{3}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{7}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{7}\right).$$

Придавая k значения 0, 1, …, 6, получим семь корней многочлена x^7+3;

$x_0=\sqrt[7]{3}\left(\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}\right)$; $x_1=\sqrt[7]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{7}+i\sin\frac{3\pi}{7}\right)$; $x_2=\sqrt[7]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}\right)$;

$x_3=\sqrt[7]{3}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\sqrt[7]{3}$; $x_4=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{9\pi}{7}+i\sin\frac{9\pi}{7})=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{5\pi}{7}-i\sin\frac{5\pi}{7})$;

$x_5=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{11\pi}{7}+i\sin\frac{11\pi}{7})=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{3\pi}{7}-i\sin\frac{3\pi}{7})$;

$x_6=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{13\pi}{7}+i\sin\frac{13\pi}{7})=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7})$.

Среди них только один действительный – это $x_3=-\sqrt[7]{3}$, остальные комплексные, причем попарно сопряжены: $x_6=\overline{x_0}$, $x_5=\overline{x_1}$, $x_4=\overline{x_2}$. В общем случае

$$X_к=\sqrt[7]{3}(\cos\frac{\pi+2\pi k}{7}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{7}),\ x_k=\overline{x_{n-k}}.$$

Рассмотрим произведение

$$(x-x_k)(x-\overline{x_k})=(x^2-(x_k+\overline{x_k})x+x_k\overline{x_k})=x^2-\left(2\cdot\sqrt[7]{3}\cos\frac{\pi+2\pi k}{7}\right)x+\sqrt[7]{9},\ \text{где } k=0,\ 1,\ 2.$$

Имеем квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. Многочлен x^7+3 можно разложить в произведение 7 линейных множителей (следствие основной теоремы алгебры). Перемножив множители, которые соответствуют сопряженным корням, получим искомое разложение:

$$x^7+3=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)=(x-x_3)(x-x_0)(x-x_6)(x-x_1)$$

$$(x-x_5)(x-x_2)(x-x_4)=(x-x_3)(x-x_0)(x-\overline{x_0})(x-x_1)(x-\overline{x_1})(x-x_2)(x-\overline{x_2})=(x+\sqrt[7]{3})$$

$$(x^2-(2\cdot\sqrt[7]{3}\cos\frac{\pi}{7})x+\sqrt[7]{9})(x^2-(2\cdot\sqrt[7]{3}\cos\frac{3\pi}{7})x+\sqrt[7]{9})\ (x^2-(2\cdot\sqrt[7]{3}\cos\frac{5\pi}{7})x+\sqrt[7]{9}).$$

Задача 9. Представить многочлен $f(x)=x^4+1$ в виде суммы квадратов двух многочленов.

Решение. Любой многочлен $f(x)$ с действительными коэффициентами, положительный при любом $x\in R$ представляется в виде суммы квадратов двух многочленов. Для этого найдем корни многочлена $f(x)$: $x_0, x_1, x_2=\bar{x}_1, x_3=\bar{x}_0$, разложим на линейные множители, затем перемножим $(x-x_0)(x-x_1)$ и $(x-x_2)(x-x_3)$, получим искомое представление:

$$f(x)=(x^4+1)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=(x-x_0)(x-x_1)(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_0)=$$
$$=\left[(x-x_0)(x-x_1)\right]\left[(x-\bar{x}_1)(x-\bar{x}_0)\right]=\left[x^2-(x_0+x_1)x+x_0x_1\right]\left[x^2-(\bar{x}_0+\bar{x}_1)+\bar{x}_0\bar{x}_1\right]=$$
$$=\left(x^2-i\sqrt{2}x-1\right)\left(x^2+i\sqrt{2}x-1\right)=\left[\left(x^2-1\right)-i\sqrt{2}x\right]\left[\left(x^2-1\right)+i\sqrt{2}x\right]=$$
$$=\left(x^2-1\right)^2+2x^2=\left(x^2-1\right)^2+\left(\sqrt{2}x\right)^2$$

Обозначим $p(x)=x^2-1,\ q(x)=\sqrt{2}x$, получим $f(x)=p^2(x)+q^2(x)$.

Задача 10. Определить кратность корня $x=-1$ многочлена $f(x)=x^6-3x^5-3x^4+11x^3+6x^2-12x-8$. Найти многочлен наибольшей степени с простыми корнями, каждый корень которого является корнями многочлена $f(x)$.

Решение.

1) Проверим, является ли $x=-1$ корнем многочлена $f(x)$.

2) Проверим, является ли $x=-1$ корнем первой производной многочлена $f(x)$

$f'(x)=6x^5-15x^4-12x^3+33x^2+12x-12$. $f'(-1)=0$, поэтому $x=-1$ – корень многочлена $f(x)$, кратности не меньше 2.

3) $f''(x)=30x^4-60x^3-36x^2+66x+12$, $f''(-1)=0$, поэтому $x=-1$ корень кратности не меньше 3.

4) $f'''(-1)\neq 0$, $x=-1$ корень многочлена $f(x)$ кратности 3, т.е. $f(x)\ \vdots\ (x+1)^3$. Чтобы найти многочлен наибольшей степени с простыми корнями, каждый корень которого является корнем $f(x)$, нужно в многочлене $f(x)$ избавиться от кратных корней. Для этого разделим многочлен $f(x)$ на наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$: $\left(f(x),f'(x)\right)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$. Поэтому искомый многочлен будет $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$, где $x=-1$, $x=2$ – простые корни многочлена.

Примечание: Кратность корня $x=-1$ можно было проверить по схеме Горнера.

Задача 11. Отделить кратные множители многочлена

$$f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27.$$

Решение. По теореме о кратных множителях: если некоторый неприводимый над полем Р многочлен $g(x)$ является k-кратным множителем многочлена $f(x)$ с коэффициентами из поля Р, то $g(x)$ является (k–1) – кратным множителем производной $f(x)$. Таким образом, при переходе от $f(x)$ к $f'(x)$ кратность всех множителей понижается на 1. Однако у многочлена $f'(x)$ могут быть и такие множители, которых нет у $f(x)$. Чтобы избавиться от них мы найдем НОД f(x) и $f'(x)$. В него будут входить только те множители, которые входят в f(x), однако с меньшей на 1 кратностью.

Применив алгоритм Евклида, получим

$$d_1(x) = (f(x), f'(x)) = x^3 + x^2 - 5x + 3.$$

Так как $d_1(x)$ есть многочлен третьей степени, разложение которого на множители в общем случае затруднительно, но который в свою очередь, может иметь кратные множители, то мы применим к нему аналогичный процесс понижения кратности множителей. Получим $d_2(x) = (d_1(x), d_1'(x)) = x - 1$. Итак, множитель x–1 входит в $d_2(x)$ с кратностью 1, а следовательно, в $d_1(x)$ он входит с кратностью 2. Разделим $d_1(x)$ на $(x-1)^2$, найдем $d_1(x) = (x-1)^2(x+3)$. Отсюда имеем: множитель (x–1) входит в $f(x)$ с кратность 3, а x+3 с кратностью 2. Разделив $f(x)$ на многочлен $(x-1)^3(x+3)^2 = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$, получим

$f(x) = (x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9)(x-3)$, т. е. $f(x) = (x-3)(x+3)^2(x-1)^3$.

Задача 12. Доказать, что число $\sqrt[13]{5}$ иррациональное.

Решение. Это число является корнем приведенного целочисленного многочлена $x^{13} - 5$, который не имеет рациональных корней, т.к. все его рациональные корни целые и должны быть делителями числа 5.

Задача 13. Найти рациональные корни многочлена

$$f(x)=6x^4+19x^3-7x^2-26x+12.$$

Решение. Если $\frac{p}{k}$ рациональная несократимая дробь, являющаяся корнем многочлена $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ с целыми коэффициентами, то:

1. k есть делитель a_0;
2. p есть делитель a_n;
3. $p–mk$ есть делитель $f(m)$ при любом целом m.

В нашем случае: k может принимать значения: ±1, ±2, ±3, ±6, а p – ±1,±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Теперь можно было бы каждое из этих чисел вида $\frac{p}{k}$ проверить подстановкой в многочлен или по схеме Горнера. Однако, многие из этих чисел можно «отсеять» более простым путем. Найдем границы действительных корней данного многочлена $ВГ_x=1+\frac{A}{|a_0|}$, $НГ_x = –(1+\frac{A}{|a_0|})$, где A – наибольшая из абсолютных величин коэффициентов, а a_0 – коэффициент при x^n или $ВГ_x=1+\sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}$, где k – индекс первого отрицательного коэффициента многочлена $f(x)$, а B – наибольшая из абсолютных величин его отрицательных коэффициентов (этот способ применим, когда $a_0>0$). В нашем примере $k=2$, $B=26$, $a_0=6$. $ВГ_x=1+\sqrt{\frac{26}{6}} < 4$.

Для нахождения нижней границы этим способом достаточно в $f(x)$ вместо x подставить $(–x)$ и воспользоваться следующим правилом: нижняя граница действительных корней многочлен $f(x)$ равна верхней границе действительных корней многочлена $f(–x)$, взятой с противоположным знаком. В нашем случае

$f(–x)=6x^4–19x^3–7x^2+26x+12$, $a_0=6$, $k=1$, $B=19$. $ВГ_x=1+\frac{19}{6}<5$, значит, нижняя граница – $НГ_x= –5$. Итак, корни многочлена заключены в интервале (–5,4). Более точные границы можно было найти по методу Ньютона. Воспользуемся еще тем, что если $\frac{p}{k}$ – корень $f(x)$, то $\frac{f(m)}{p-mk}$ целое. Найдем $f(1)=4$,

$f(–1)=13$, значит $\frac{f(1)}{p-k}$ – целое, $\frac{f(-1)}{p+k}$ – целое, если $\frac{p}{k}$ – корень $f(x)$.

Проверяем всевозможные дроби $\frac{p}{k}$, учитывая границы корней.

$\frac{p}{k}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$-\frac{4}{1}$
$\frac{4}{p-k}$	ц	д	ц	ц	д	д	ц	д	ц	д	ц	д	ц	д	ц	ц	д	д
$\frac{18}{p+k}$	ц		д	ц			д		д		д		ц		д	ц		

В ходе такой проверки появились рациональные числа 2, –3, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ «кандидаты в корни», проверяем их по схеме Горнера, убеждаемся, что $f(2)\neq 0$, $f\left(\frac{1}{3}\right)\neq 0$, $f(-3)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Для многочлена четвертой степени нашли два корня, значит, $f(x)$ кратно $(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ или $f(x)=(6x^2+4x-8)(x+3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$. Корни многочлена $g(x)=6x^2+4x-8$ находим непосредственно $x=\frac{-2\pm\sqrt{4+48}}{3}$ – нерациональные числа.

Задача 14. Доказать, что данное уравнение $9x^4+y^4+3x^2y^2+xy^3=0$ не имеет ненулевых целочисленных решений.

Решение. Левая часть равенства представляет собой однородный многочлен четвертой степени. Поделим обе части равенства на x^4. Получим

$$\left(\frac{y}{x}\right)^4+\left(\frac{y}{x}\right)^3+3\left(\frac{y}{x}\right)^2+9=0.$$

Положим $\frac{y}{x}=t$, тогда $t^4+t^3+3t^2+9=0$. Заданное уравнение $9x^4+y^4+3x^2y^2+xy^3=0$ тогда и только тогда имеет ненулевое целочисленное решение, когда многочлен $f(t)=t^4+t^3+3t^2+9$ имеет рациональные корни. Многочлен $f(t)$ приведенный, целочисленный, все его рациональные корни являются: во-первых, целыми; во-вторых, делителями свободного члена 9, т.е. должны принадлежать множеству {±1, ±3, ±9}. Непосредственной проверкой можно убедиться, что ни один элемент данного множества не является корнем многочлена $f(t)$, т.е. данный многочлен не имеет рациональных корней, а значит, заданное уравнение – ненулевых целочисленных корней.

Задача 15. При каких натуральных n будет простым число $n^{35}+n^{103}+1$?

Решение. Покажем, что $n^{35}+n^{103}+1 \vdots n^2+n+1$. Действительно, если a – произвольный корень многочлена x^2+x+1, тогда a будет корнем многочлена x^3-1, т.е. a^3=1 и $a^2+a+1=0$.

Рассмотрим $a^{35}+a^{103}+1=(a^3)^{11}a^2+(a^3)^{34}a+1=a^2+a+1=0$, т.е. a – корень многочлена $x^{35}+x^{103}+1$. Так как a – произвольный корень многочлена $x^{35}+x^{103}+1$, то каждый корень многочлена x^2+x+1 является корнем многочлена $x^{35}+x^{103}+1$, поэтому $x^{35}+x^{103}+1=(x^2+x+1)P(x)$, где $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами.

Предположим $x=n\in N$, тогда $n^{35}+n^{103}+1 \vdots n^2+n+1$, т.е. $n^{35}+n^{103}+1=(n^2+n+1)P(n)$.

Рассмотрим случаи $n=0$ и $n=1$.

1. При $n=0$ $n^{35}+n^{103}+1=1$,

2. При $n=1$ $n^{35}+n^{103}+1=3$ – простое число.

Натуральное число $n^{35}+n^{103}+1$ представлено в виде произведения двух натуральных чисел. Отсюда видно, что $n^{35}+n^{103}+1$ может быть простым, если $n^2+n+1=1$ или $n=0$, $n=-1\notin N$ – отбрасываем.

При $n>1$ $n^{35}+n^{103}+1>n^2+n+1$ и $n^{35}+n^{103}+1$ представлено в виде произведения двух натуральных чисел, превышающий 1, а значит, это число – составное.

Ответ: $n=1$.

Задача 16. Решить уравнения в поле комплексных чисел:

1) $x^3+6x+2=0$; 2) $x^3-9x^2+18x-28=0$; 3) $x^4-2x^3+4x^2-2x+3=0$.

Решение.

1. Решим уравнение $x^3+6x+2=0$.

Для корней кубического уравнения $x^3+ax+b=0$ имеется так называемая формула Кардано: $x_i=u_i+v_i$ (i=0, 1, 2), где u_0, u_1, u_2 – значение радикала

$u=\sqrt[3]{-b/2+\sqrt{b^2/4+a^3/27}}$ и $v_i=-\dfrac{a}{3u_i}$. В нашем случае, a=6, b=2,

$u=\sqrt[3]{-1+\sqrt{1+216/27}}=\sqrt[3]{-1+3}=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2(\cos 0+i\sin 0)}=\sqrt[3]{2}\,(\cos\dfrac{2\pi l}{3}+i\sin\dfrac{2\pi l}{3})$, где l=0, 1, 2. Подставляя вместо l значения 0, 1, 2, получим: $u_0=\sqrt[3]{2}$, $u_1=$

$=\sqrt[3]{2}\,(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\,(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$, $u_2=\sqrt[3]{2}\,(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3})=\sqrt[3]{2}\,(-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2})$,

$$v_0=-\frac{6}{3u_0}=-\frac{6}{3\sqrt[3]{2}}=-\frac{6\sqrt[3]{4}}{6}=-\sqrt[3]{4},$$

$$v_1=-\frac{6}{3u_1}=-\frac{6}{3\sqrt[3]{2}(-1/2+i\sqrt{3}/2)}=-\frac{6(-1/2-i\sqrt{3}/2)}{3\sqrt[3]{2}(1/4+3/4)}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{4}\,(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$v_2=-\frac{6}{3u_2}=-\frac{6}{3\sqrt[3]{2}(-1/2-i\sqrt{3}/2)}=-\frac{6(-1/2+i\sqrt{3}/2)}{6}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4}\,(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$x_0=u_0+v_0=\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$, $x_1=u_1+v_1=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}{2}$, $x_2=u_2+v_2=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}-$ $-i\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}{2}$.

Ответ: $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}{2}$.

2. Решим уравнение $x^3-9x^2+18x-28=0$.

Приведем наше уравнение к уравнению вида $y^3+ay+b=0$, произведя подстановку $x=y-\dfrac{a_1}{3a_0}=y+3$, ($a_0$, a_1 – коэффициенты при x^3 и x^2). Получим: $y^3-9y-28=0$. Его решения находятся по формуле Кардано: $y_i=u_i+v_i$, (i=0, 1,…2), где $u_0=3$, $u_1=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, $u_2=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i$, $v_0=1$, $v_1=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $v_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

$y_0=4$, $y_1=-2+\sqrt{3}i$, $y_2=-2-\sqrt{3}i$, $x_0=7$, $x_1=1+\sqrt{3}i$, $x_2=1-\sqrt{3}i$.

Ответ: 7; $1\pm\sqrt{3}i$.

3. Решим уравнение $x^4 -2x^3+4x^2-2x+3=0$.

Применим способ Феррари. Оставим в левой части уравнения члены с x^4 и x^3 и дополним её до полного квадрата:

$$x^4-2x^3+x^2=x^2-4x^2+2x-3 \text{ или } \left(x^2-x\right)^2=-3x^2+2x-3$$

Теперь прибавим к обеим частям члены с новым неизвестным y так, чтобы левая часть снова стала квадратом (независимо от значения y)

$$\left(x^2-x\right)^2+\left(x^2-x\right)y+\frac{y^2}{4}=\left(x^2-x\right)y+\frac{y^2}{4}-3x^2+2x-3 \text{ или}$$

$$\left(x^2-x+\frac{y}{2}\right)^2=\left(y-3\right)x^2-(y-2)x+\frac{y^2}{4}-3 \qquad (*)$$

Здесь коэффициенты перед степенями x в правой части зависят от неопределенной величины y. Подберем значение y так, чтобы правая часть стала квадратом. Для этого необходимо, чтобы дискриминант квадратного (относительно x) трехчлена в правой части равнялся нулю. Приравняв этот дискриминант нулю получим:

$$\left(y-2\right)^2-4(y-3)\left(\frac{y^2}{4}-3\right)=0$$

или

$$y^2-4y+4-4\left(\frac{y^3}{4}-3y-\frac{3y^2}{4}+9\right)=4y^2-y^3+8y-32=0$$

или

$$(y-4)(8-y^2)=0,$$

отсюда y=4 и $y=\pm\sqrt{8}$.

Подставив y=4 в уравнение (*), получим: $(x^2-x+2)^2=x^2-2x+1$ или $(x^2-x+2)^2=(x-1)^2$. Извлекая из обеих частей полученного уравнения квадратный корень, получим два квадратных уравнения: $x^2-x+2=x-1$ и $x^2-x+2=-x+1$ или $x^2-2x+3=0$ и $x^2+1=0$. Решив их, найдем 4 корня нашего уравнения: $x_{1,2}=1\pm i\sqrt{2}$, $x_{3,4}=\pm i$.

Ответ: $x_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$, $x_{3,4} = \pm i$.

Задача 17. Даны многочлены

$$f(x)=x^3-3x^2+2x-5,\ g(x)=x^3+3x^2-1.$$

1) Определить число действительных корней каждого;
2) С помощью теоремы Штурма найти промежуток $(a,\ b)$, где $b-a=1$, содержащий наибольший корень x_0 многочлена $g(x)$;
3) Вычислить с точностью 0,0001 корень x_0, пользуясь методом линейной интерполяции и методом Ньютона;

Решение.

1. Если коэффициенты a и b уравнения $x^3+ax+b=0$ действительны, то число действительных корней этого уравнения вполне определяется знаком числа $D = -4a^3 - 27b^2$, называемого дискриминантом многочлена x^3+ax+b, следующим образом:

а) при D=0 все три корня действительны, из них два равных;

б) при D>0 – все три корня действительны;

в) при D<0 – один корень действительный, два мнимых.

В нашем случае: $f(x)=x^3-3x^2+2x-5$ или положив $x=y+1$, $y^3-y-5=0$, т.е. $D=4-27\cdot 25<0$, поэтому многочлен $f(x)$ имеет один действительный корень.

2. Для многочлена $g(x)$ определим число действительных корней, установив число перемен знаков в системе Штурма многочлена $g(x)$ при переходе от $-\infty$ к $+\infty$. Также найдем целые границы, между которыми каждый из этих корней расположен, причем не будем строить заранее график этой функции.

Всякий многочлен $g(x)$ с действительными коэффициентами, не имеющий кратных корней, обладает системой Штурма. Если многочлен имеет кратные корни, то от их нужно избавиться, поделив многочлен $g(x)$ на НОД многочленов $g(x)$ и $g'(x)$. Систему Штурма многочлена $g(x)$ можно построить следующим образом: положим $g_1(x)=g'(x)$, затем делим $g(x)$ на $g_1(x)$ и остаток от этого деления, взятый с обратным знаком, принимаем за $g_2(x)$, т.е. $g(x)=g_1(x)h_1(x)-g_2(x)$. Вообще, если многочлены $g_{к-1}(x)$ и $g_к(x)$ уже найдены, то $g_{к+1}(x)$ будет остатком от деления $g_{к-1}(x)$ на $g_к(x)$, взятый с обратным знаком:

$$g_{к-1}(x)=g_к(x)q_к(x)-g_{к+1}(x).$$

Найдем систему Штурма для $g(x)$, применяя указанный метод. При этом в процессе деления мы будем, в отличие от алгоритма Евклида, умножать и сокращать лишь на произвольные положительные числа, т.к. знаки остатков играют важную роль в методе Штурма. Мы получим такую систему

$$g(x)=x^3+3x^2-1,$$
$$g_1(x)=3x^2+6x,$$
$$g_2(x)=2x+1,$$
$$g_3(x)=1.$$

Определим знаки многочленов этой системы при $x=-\infty$ и $x=+\infty$, для чего смотреть лишь на знаки старших коэффициентов и на степени этих многочленов (при $+\infty$ знаки всех многочленов системы Штурма будут совпадать со знаками их старших членов, а при $-\infty$ знаки многочленов системы Штурма совпадают со знаками их старших коэффициентов для многочленов четной степени и противоположны знакам старших многочленов нечетной степени).

	$g(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	Число перемен знаков
$-\infty$	–	+	–	+	3
$+\infty$	+	+	+	+	0

Таким образом, при переходе x от $-\infty$ к $+\infty$ система Штурма теряет три перемены знаков, поэтому многочлен $g(x)$ имеет ровно три действительных корня (теорема Штурма).

Продолжим исследование знаков в системе Штурма, рассматривая промежутки (0,1), (1,2), (2,3) и т.д., (0,–1), (–1,–2), (–2,–3) и т.д. Тем самым , определим промежутки (a, b), где $a-b=1$, содержащие три действительных корня и найдем промежуток для x_0.

	$g(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	Число перемен знаков
$x=-3$	–	+	–	+	3
$x=-2$	+	0	–	+	2

x=–1	+	–	–	+	2
x=0	–	0	+	+	1
x=1	+	+	+	+	0

Таким образом, система Штурма многочлена $g(x)$ теряет по одной перемене знаков при переходе x от –3 к –2, от –1 к 0 и от 0 к 1. Корни x_1, x_2, x_3 этого многочлена удовлетворяют, следовательно, неравенствам:

$-3<x_1<-2$, $-1<x_2<0$, $0<x_3<1$, т.е. наибольший корень $x_0 \in (0,1)$.

3. Построим в промежутке (0, 1) схематично график многочлена $g(x)$, вычислив следующие значения многочленов:

$g(0)=-1$, $g(1)=3$, $g'(0)=0$, $g'(1)=9$ (функция возрастает на рассматриваем интервале), $g''(0)>0 g''(1)>0$ (функция выпукла).

Схематический график функции представлен на рис.1.

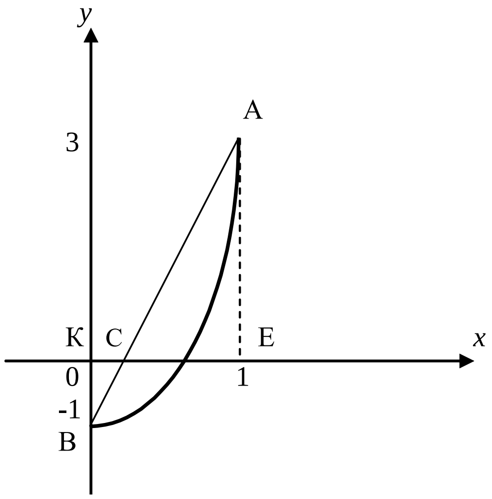


Рис.1

Сначала по методу хорд на отрезке (0,1) кривая $y=g(x)$ заменяется хордой AB и в качестве первого приближенного значения корня принимается абсцисса x=c точки пересечения этой хорды с осью x. Треугольник KBC подобен треугольнику CAE, поэтому $\frac{KC}{CE}=\frac{KB}{AE}$, или $\frac{c-0}{1-c}=-\frac{g(0)}{g(1)}$, или

$c=-\frac{g(0)}{g(1)-g(0)}=-\frac{-1}{3+1}=\frac{1}{4}=0{,}25$. В общем случае $c=\frac{вg(a)-ag(в)}{g(a)-g(в)}$.

Затем по методу Ньютона проводим касательную y к графику $g(x)$ в точке A(1, $g(1)$) (мы проводим касательную в точке x=1, т.к. $g(1)$ и $g''(1)$ одного знака) и берем за другое приближенное значение корня абсциссу $x=p$ точки пересечения этой касательной с осью Ox.

Запишем уравнение касательной, проходящей через точку A

$$y-g(1)=g'(1)(x-1).$$

Поскольку эта касательная проходит через точку (p, 0), то подставив эти значения в уравнение касательной, получим

$$0-g(1)=g'(1)(p-1) \text{ или } p=1-\frac{g(1)}{g'(1)}=1-\frac{3}{9}=\frac{2}{3}\approx 0{,}6666667\,.$$

В общем случае $p=b-\dfrac{g(в)}{g'(в)}$.

Более точное значение искомого корня x_0 теперь уже можно искать в новом промежутке (a_1, b_1), положив a_1=0,3, b_1=0,7. Повторив метод хорд и метод Ньютона в промежутке (a_1, b_1) имеем: $g(a_1)$=–0,703; $g(b_1)$=0,813; $g'(b_1)$=5,67. Так как $g(a_1)$ и $g(b_1)$ равных знаков, то $x_0\in(a_1,b_1)$ n

$$c_1=\frac{0{,}7\cdot(-0{,}703)-0{,}3\cdot 0{,}813}{-0{,}703-0{,}813}=\frac{0{,}4921+0{,}2439}{1{,}516}\approx 0{,}4854881,$$

$$p_1=0{,}7-\frac{0{,}813}{5{,}67}\approx 0{,}5566137\,.$$

Рассмотрим новый промежуток (a_2, b_2), положив a_2=0,5, b_2=0,55, $g(a_2)$=–0,125, $g(b_2)$=0,073875, $g'(b_2)$=4,2075, т.к. $g(a_2)$ и $g(b_2)$ – разных знаков, то $x_0\in(a_2,b_2)$,

$$c_2=\frac{0{,}1057}{0{,}1989}\approx 0{,}53/14228,\quad p_2=0{,}55-\frac{0{,}0739}{4{,}2075}\approx 0{,}53/24361.$$

И наконец, рассмотрев промежуток (a_3, b_3), где a_3=0,531, b_3=0,532, найдем более точно $x_0\approx 0{,}532/08887$.

Задача 18. Следующую рациональную дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где

$$f(x)=2x^4-10x^3+7x^2+4x+3,\quad g(x)=x^5-2x^3+2x^2-3x+2,$$

разложить в сумму простейших дробей в поле рациональных чисел.

Решение. Всякая правильная рациональная дробь обладает единственным разложением в сумму простейших дробей. В нашем случае степень $f(x)$ меньше степени $g(x)$, поэтому дробь правильная.

Теперь разложим знаменатель $g(x)$ на степени неприводимых множителей в поле рациональных чисел, $g(x)$ имеет два рациональных корня 1 и –2, причем 1 – корень второй кратности.

$$g(x)=(x+2)(x-1)^2(x^2+1).$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{a}{x+2}+\frac{в}{(x-1)^2}+\frac{c}{x-1}+\frac{dx+h}{x^2+1}=\frac{a(x-1)^2(x^2+1)+}{(x+2)\cdot}$$

$$\frac{+в(x+2)(x^2+1)+c(x+2)(x-1)(x^2+1)+(кx+p)(x+2)(x-1)^2}{\cdot(x-1)^2(x^2+1)} \quad \text{или}$$

$$2x^4-10x^3+7x^2+4x+3=a(x-1)^2(x^2+1)+b(x+2)(x^2+1)+c(x+2)(x-1)(x^2+1)+(dx+h)\cdot(x+2)(x-1)^2.$$

Это уравнение можно решить методом приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях, но мы сделаем более простым способом. Поскольку правый и левый многочлены тождественно равны, то равенство выполняется при $\forall\ x\in R$.

1. Пусть $x=-2$, $g(-2)=135$ (левая часть равенства), правая часть равенства при $x=-2$ равна $a(-2-1)^2(4+1)$, поэтому $135=a\cdot 9\cdot 5$ или $a=3$.
2. Пусть $x=1$, $g(1)=6$, $6=b\cdot 3\cdot 2$ или $b=1$.
3. Пусть $x=2$, 0 и -1, тогда

$$\begin{cases} -9=15+20+20c+(2d+h)\cdot 4 \\ 3=3+2-2c+2h \\ 18=24+2-4c+(-d+h)\cdot 4 \end{cases}$$

или $c=-2$, $h=-3$, $d=1$.

Ответ: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-3}{x^2+1}$.

Задача 19. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{a-2}{a-3}$, где a – корень многочлена $P(x)=x^2+2x+3$.

Решение. Многочлен x^2+2x+3 неприводим над полем рациональных чисел. Знаменатель дроби является значением многочлена $f(x)=x-3$ при $x=a$. Поскольку $P(x)$ неприводим, то многочлены $P(x)$ и $f(x)$ взаимно просты, т.е. $f(x)g(x)+P(x)q(x)=d$, где d – рациональное число, а именно $f(x)(-r_1(x))+P(x)\cdot 1=18$, т.к. $P(a)=0$, то $f(a)(-r_1(a))=18$. Значит, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе достаточно члены дроби умножить на число $-r_1(a)=a-5$. Получим $\dfrac{a-2}{a-3}=\dfrac{-a^2-3a+10}{18}$.

Задача 20. Показать, что множество чисел вида $a+bk=ck^2$ (где k – один из корней многочлена $f(x)=x^3-2$, a, b, c – рациональные числа) образует поле относительно арифметических действий сложения и умножения. Найти для $\alpha=1+k+k^2$ обратный элемент α^{-1}.

Решение: Обозначим через P рассматриваемое множество чисел $a+b\alpha+c\alpha^2$ с рациональными a, b, c и покажем, что любой элемент M из P единственным образом выражается в виде трехчлена $a+bk+ck^2$. В самом деле, пусть $M=a+bk+ck^2=a_1+b_1k+c_1k^2$. Тогда $(a-a_1)+(b-b_1)k+$ $+(c-c_1)k^2=0$. Если $c-c_1=0$, то при $b-b_1\neq 0$, получаем, что $k=\dfrac{a-a_1}{b-b_1}$ – рациональное, что невозможно, (т.к. k – один из корней вида $x=\sqrt[3]{2}$). Если же $c-c_1=0$ и $b-b_1=0$, то $a-a_1=0$, т.е. $c=c_1, b=b_1, c=c_1$. Таким образом, остается разобрать случай $c\neq c_1$. В этом случае k является корнем квадратного уравнения с рациональными коэффициентами $k^2+pk+q=0$, где $p=\dfrac{b-b_1}{c-c_1}$, $q=\dfrac{a-a_1}{c-c_1}$. Отсюда получается, что $k^2=-pk-q$, $k^3=-pk^2-qk=$ $=-p(-pk-q)-qk$, $k^3=\left(p^2-q\right)k+pq$ или, т.к. $k^3=2$, $(p^2-q)k+(pq-2)=0$. В силу иррациональности k отсюда вытекает, что $p^2-q=0$, $pq-2=0$ и, значит, $p^3=2$, что невозможно, т.к. $\sqrt[3]{2}$ – иррациональное число.

Далее покажем, что P относительно арифметических действий сложения и умножения образует коммутативное кольцо.

Возьмем два числа $\alpha_1 = a_1 + b_1 k + c_1 k^2$ и $\alpha_2 = a_2 + b_2 k + c_2 k^2$ рассматриваемого числового множества P. Их сумма $\alpha_1 + \alpha_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)k + (c_1 + c_2)k^2$ и произведение $\alpha_1\alpha_2 = a_1 a_2 + 2b_1 c_2 + 2c_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + 2c_1 c_2)k + (b_1 b_2 + c_1 a_2)k^2$ принадлежат тому же множеству P, т.к. имеют вид трехчлена $a + bk = ck^2$ с рациональными a, b, c. Сложение и умножение чисел (не только рассматриваемого вида, но вообще комплексных) подчиняются ассоциативному, коммутативному и дистрибутивному законам. Число 0 принадлежит рассматриваемому числовому множеству, так как может быть представлено в виде $0 + 0k + 0k^2$ и играет в этом множестве роль нулевого элемента. Для всякого $\alpha = a + bk + ck^2$ с рациональными коэффициентами a, b, c найдется в этом же множестве противоположный элемент: $-\alpha = -a - bk - ck^2$. Таким образом, рассматриваемое числовое множество P образует относительно арифметических действий сложения и умножения коммутативное кольцо, причем это кольцо, кроме 0, содержит бесконечное множество элементов, отличных от нуля, и среди таких элементов содержит число 1, т.к. $1 = 1 + 0k + 0k^2$.

Покажем теперь, что P – поле.

Рассмотрим уравнение $(a + bk + ck^2)(x + yk + zk^2) = 1$. Если в его левой части перемножить многочлены, заменить k^3 и k^4 соответственно числами 2 и $2k$ и сгруппировать члены по возрастающим степеням k, то получится

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z)k + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)k^2 = 1,$$

где a_{ij} – некоторые рациональные числа. Отсюда

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Определитель d этой системы уравнений отличен от нуля. В самом деле, если бы d=0, то система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases}$$

с теми же коэффициентами a_{ij}, что и предыдущая система, имела бы ненулевое решение, например x_0, y_0, z_0, в силу чего произведение двух чисел $x_0 + y_0k + z_0k^2$ и $a + bk + ck^2$, отличных от нуля, равнялось бы нулю, что невозможно.

Но если $d \neq 0$, то система (*) линейных уравнений имеет единственное решение, т.е. существует единственное число $M^{-1} = a_1 + b_1\alpha + c_1\alpha^2$ с рациональными $a_1,\ b_1,\ c_1$, обратное для M и лежащее в P. Мы убедились, таким образом, что P образует поле относительно арифметических действий сложения и умножения чисел.

Отсюда получается довольно простой способ нахождения обратного элемента в поле P. Например, для $\alpha = 1 + k + k^2$ находим α^{-1} следующим образом:

Полагая $\alpha^{-1} = x + yk + zk^2$, получаем

$$x + (x + y)k + (x + y + z)k^2 + (y + z)k^3 + zk^4 = 1$$

или $x + 2y + 2z + (x + y + 2z)k + (x + y + z)k^2 = 1$ (т.к. $k^3 = 2,\ k^4 = 2k$).

Отсюда, учитывая, что $1 = 1 + 0k + 0k^2$, получаем

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, находим, что $x = -1,\ y = 1,\ \mathrm{z} = 0$.

Таким образом $\alpha^{-1} = -1 + k$.

Задача 21. Выразить симметрический многочлен f через элементарные симметрические многочлены:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\sum_{i,j=1}^{3}(x_i x_j - 2x_i^2 x_j).$$

Решение. $f(x_1, x_2, x_3)= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 +$

$+x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2) = g(x_1, x_2, x_3) + (-2)h(x_1, x_2, x_3),$

где $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3,$

$h(x_1, x_2, x_3)= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_3^2 x_2.$

Выразим через элементарные симметрические многочлены сначала многочлен $g(x_1, x_2, x_3)$, затем $h(x_1, x_2, x_3)$. Многочлен $g(x_1, x_2, x_3)$ – симметрический многочлен, равный σ_1^2. Выразим $h(x_1, x_2, x_3)$ через элементарные симметрические многочлены. Это можно получить, если предусмотреть произведение $\sigma_1^{\kappa_1}\sigma_2^{\kappa_2}\sigma_3^{\kappa_3}$, которое приходится вычитать из многочлена $h(x_1, x_2, x_3)$. Это можно сделать, если учесть следующие факты: во-первых, произведение $\sigma_1^{\kappa_1}\sigma_2^{\kappa_2}\sigma_3^{\kappa_3}$ вполне определяется своим высшим членом: если его высший член равен $x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}$, то $\kappa_1=a_1-a_2$, $\kappa_2=a_2-a_3$, $\kappa_3=a_3$; во-вторых, высший член вычитаемого из $h(x_1, x_2, x_3)$ произведения $\sigma_1^{\kappa_1}\sigma_2^{\kappa_2}\sigma_3^{\kappa_3}$ «не выше» высшего члена у $h(x_1, x_2, x_3)$; в-третьих, показатели при x_1, x_2, x_3 в высших членах образуют убывающую последовательность; в-четвертых, $h(x_1, x_2, x_3)$ однородный, поэтому сумма показателей у всех его членов, а следовательно, и у всех вычитаемых из него членов постоянна и равна 3.

Результаты решения запишем в таблицу:

Возможные высшие члены многочленов 3–й степени от трех неизвестных	Соответствующие им системы показателей	Произведения элементарных симметрических многочленов, имеющие указанные высшие члены
$x_1^3x_2^0x_3^0$ $p\,x_1^2x_2^1x_3^0$ $\kappa\, x_1 x_2 x_3$	3 0 0 2 1 0 1 1 1	σ_1^3 $a\sigma_1\sigma_2$ $b\sigma_3$

Имеем тождество: $h(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1^3+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$ с неопределенными коэффициентами a и b.

Для нахождения a и b будем подставлять в это тождество различные числовые значения переменных x_1, x_2, x_3. При этом удобнее подставлять такие значения, для которых некоторые из многочленов σ_1, σ_2, σ_3 равны нулю.

Так при $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=0$ имеем $\sigma_1=2$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=0$, $h(x_1, x_2, x_3)=4$. Следовательно, $4=8+2a$, отсюда $a=-2$ и $h(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2+b\sigma_3$.

Положим теперь $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=-2$. Тогда $h(x_1, x_2, x_3)=0$, $\sigma_1=0$, $\sigma_3=-2$. Имеем: $0=-2b$ или $b=0$. Следовательно, $h(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1^3-2\sigma_1\sigma_2$. Окончательно: $f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1^2-2\sigma_1^3+4\sigma_1\sigma_2$, где $\sigma_1=x_1+x_2+x_3$, $\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $\sigma_3=x_1x_2x_3$.

Задача 22. Вычислить значения симметрической функции f от корней уравнения $p(x)=0$, если

$$f=x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_2^3x_1+x_2^3x_3+x_3^3x_1+x_3^3x_2,\ p(x)=x^3-x^2-4x+1=0.$$

Решение. Выразим f через элементарные симметрические многочлены. Многочлен f – однородный симметрический многочлен степени 4. Высший член многочлена f равен $x_1^3x_2$. Ему соответствует система показателей 3, 1, 0. Теперь нетрудно написать системы показателей, соответствующие высшим членам многочленов, которые, возможно придется вычитать из f. Это будут: 3, 1, 0; 2, 2, 0; 2, 1, 1. Следовательно, $f=\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3$, где b, c – неопределенные коэффициенты. Определим их, подставляя в последнее тождество вместо x_1, x_2, x_3 некоторые числовые значения:

x_1	x_2	x_3	f	σ_1	σ_2	σ_3
1	1	1	6	3	3	1
1	1	0	2	2	1	0

Получим систему уравнений относительно неизвестных b, c:

$$\begin{cases} 6=27+9b+3c \\ 2=4+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ b=-2 \end{cases}.$$

Итак, $f = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3$.

Пусть x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $p(x)=0$. По формулам Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 = \sigma_1 \\ x_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 = -4 = \sigma_2 \\ x_1x_2x_3 = -1 = \sigma_3 \end{cases}.$$

Подставляя вместо σ_1, σ_2, σ_3 их значения, получим:

$$f = \sigma_1^2\sigma_2 - 2\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3 = -4 - 2(-4)^2 + 1 = -35.$$

Ответ: $f=-35$.

Задача 23. Составить многочлен, имеющий своими корнями кубы корней многочлена $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Решение. Обозначим корни многочлена $f(x)$ через x_1, x_2. Тогда корнями искомого многочлена $g(x) = x^2 + ax + b$ будут числа x_1^3 и x_2^3. По теореме Виета $a = -(x_1^3 + x_2^3)$, $b = x_1^3 + x_2^3$. Рассматривая выражения $-(x_1^3 + x_2^3)$ и $x_1^3 + x_2^3$ как многочлены от переменных x_1, x_2 представим их через основные симметриче-
ские многочлены f_1, f_2, f_3:

$$x_1^3 + x_2^3 = f_1^3 - 3f_1f_2$$

$$x_1^3x_2^3 = f_2^3$$

Если теперь переменным x_1, x_2 придать значения корней данного уравнения, то получим $f_1 = x_1 + x_2 = -2, \quad f_2 = x_1x_2 = 3$.

Отсюда имеем

$$a = -(x_1^3 + x_2^3) = -(f_1^3 - 3f_1f_2) = -((-2)^3 - 3(-2)(3)) = -(-8 + 18) = -10$$

$$b = x_1^3x_2^3 = 27.$$

Итак, $f(x) = x^2 - 10x + 27$.

Задача 24. Найти сумму пятых степеней корней 30-й степени из 1.

Решение. Искомая сумма – это симметрический многочлен f от тридцати неизвестных: $f=\sum_{i=1}^{30} x_i^5$, где x_i – один из тридцати корней уравнения $x^{30}-1=0$. Выразим многочлен f через элементарные симметрические многочлены. f – однородный симметрический многочлен степени 5. Высший его член равен x_1^5. Ему соответствует система показателей $5\underbrace{00\ldots0}_{29}$.

Напишем системы показателей высших членов, которые, возможно, придется вычитать из f. Это будут

$$\begin{matrix} 5 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 4 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 3 & 2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 3 & 1 & 1 & . & . & . & 0 \\ 2 & 2 & 1 & . & . & . & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & . & . & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & . & 0 \end{matrix}$$

Здесь в любой степени показателей всего 30 цифр и их сумма равна 5. Следовательно,

$$f = f_1^5 + bf_1^3 f_2 + cf_1 f_2^2 + df_1^2 f_3 + ef_2 f_3 + kf_1 f_4 = mf_5. \qquad (*)$$

По формулам Виета:

$$f_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{30} = 0$$
$$f_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + \ldots + x_{29}x_{30} = 0$$
$$f_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{28}x_{29}x_{30} = 0$$
$$f_4 = x_1x_2x_3x_4 + \ldots + x_{27}x_{28}x_{29}x_{30} = 0$$
$$f_5 = x_1x_2x_3x_4x_5 + \ldots + x_{26}x_{27}x_{28}x_{29}x_{30} = 0$$

т.к. $x_1,\ x_2,\ldots,x_{30}$ корни – корни уравнения $x^{30}-1=0$. Поэтому находим, что $f=\sum_{i=1}^{30} x_i^5 = 0$ в силу равенства (*) и формул Виета.

Задача 25. Доказать, что многочлен x^4+2x^2-1+3 имеет комплексные корни.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена x^4+2x^2-x+3. Рассмотрим сумму квадратов этих корней $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$, это симметрический многочлен. Выразим его через симметрические многочлены.

Имеем $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=f_1^2-2f_2$. По формулам Виета $f_1=0$, $f_2=2$. Поскольку x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена x^4+2x^2-x+3. Поэтому $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=-4$.

Получили, что сумма квадратов корней уравнения число отрицательное, что невозможно, если все корни действительны, значит, многочлен x^4+2x^2-x+3 имеет комплексные корни.

2.4. Индивидуальные задания

1. Найти НОД следующих многочленов:
   1) $f(x)=x^3+5x^2-2x-4$, $g(x)=2x^3-4x^2+3x-1$, $h(x)=3x^3-x^2-5x+3$;
   2) $f(x)=4x^4-x^3+2x^2-x-4$, $g(x)=2x^3-4x^2+3x-1$,
      $h(x)=x^3+x^2-x-1$;
   3) $f(x)=5x^4+x^3+x^2-4x-3$, $g(x)=x^3+2x^2-2x-1$,
      $h(x)=2x^3-3x^2+3x-2$;
   4) $f(x)=4x^6-x^5+2x^3-6x^2$, $g(x)=3x^3+x^2-x$, $h(x)=4x^2-x$;
   5) $f(x)=-x^5+2x^4+x^3-x^2-1$, $g(x)=3x^3+x^2-x+1$, $h(x)=x^3+1$;
   6) $f(x)=x^5+1$, $g(x)=2x^4+x^3+x^2+x-1$, $h(x)=x^3+1$;
   7) $f(x)=x^4-2x^2+1$, $g(x)=2x^3+x^2+3x+4$, $h(x)=x^3+x^2-x+1$;
   8) $f(x)=5x^5+5$, $g(x)=x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$, $h(x)=x^3+1$;
   9) $f(x)=4x^4-10x^2+5x+1$, $g(x)=2x^3+2x^2-3x-1$, $h(x)=x^2+2x-3$;
   10) $f(x)=x^4-2x^3+x-2$, $g(x)=2x^3-2x^2-8$, $h(x)=x^2-6x+8$;
   11) $f(x)=9x^3-x^2+x$, $g(x)=x^4+2x^3-x^2$, $h(x)=x^4+x^3$;
   12) $f(x)=x^3+3x^2+2x+6$, $g(x)=2x^3+6x^2+x+3$, $h(x)=x^3+3x^2$;
   13) $f(x)=x^4-2x^3+4x-8$, $g(x)=2x^4-4x^3+x^2-4$, $h(x)=2x^2-8$;
   14) $f(x)=x^4+16$, $g(x)=2x^3-4x^2+2x-4$, $h(x)=-x^3+2x^2$;
   15) $f(x)=2x^4-x^3$, $g(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, $h(x)=x^3-x^2-2x-1$;
   16) $f(x)=3x^4+x^3-x$, $g(x)=x^3+x^2-2x+1$, $h(x)=2x^3+2x^2+2x-1$;

17) $f(x)) = 5x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$, $g(x) = 3x^3 + x^2 - 2x - 2$,

$h(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$;

18) $f(x) = 5x^4 + 5x^3 - x^2 - x$, $g(x) = 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2$,

$h(x) = 2x^2 + 4x + 2$;

19) $f(x) = 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - x - 1$, $g(x) = x^2 + 2x + 1$, $h(x) = x^5 + 1$;

20) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 5x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 2x$, $h(x) = 3x^2 + 6x + 3$;

21) $f(x) = 8x^3 + 6x^2 - x + 1$, $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$,

$h(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 3$;

22) $f(x) = 3x^4 - x^3 - x^2 - 1$, $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - x - 3$,

$h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$;

23) $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$,

$h(x) = 2x^3 + x^2 - x - 2$;

24) $f(x) = 7x^5 - x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 1$, $g(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$,

$h(x) = x^3 - x^2 + x - 1$;

25) $f(x) = 6x^4 - 3x^3 - x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 1$,

$h(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$;

2. Используя алгоритм Евклида найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяющие равенству $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$ – НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если:

1) $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - x - 1$, $g(x) = x^3 - 2x + 1$;

2) $f(x) = 2x^3 + x^2 - x$, $g(x) = x^2 - 3x - 4$;

3) $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x$, $g(x) = 3x^3 - 3x^2 - x$;

4) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$, $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;

5) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $g(x) = x^2 - 6x + 8$;

6) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^5 + 1$;

7) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$;

8) $f(x) = 2x^3 - x^2 + x$, $g(x) = x^4 + 3x^3 - x^2$;

9) $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - x^2 - x$, $g(x) = x^3 + 1$;

10) $f(x)= x^4 - 4x^3 + 2x - 8$, $g(x)= x^3 - 5x^2 + 16$;

11) $f(x)= x^3+8$, $g(x)= x^4+2x^3 + x + 2$;

12) $f(x)= x^4 + x^3$, $g(x)= x^4 - 2x^2 + 1$;

13) $f(x)=2x^3+x^2 + 3x + 4$, $g(x)= x^3 - 2x - 1$;

14) $f(x)= x^3 -3x^2 + x - 3$, $g(x)= x^3 - 6x^2 + 9x$;

15) $f(x)= x^3 -3x^2 - 4x$, $g(x)= x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x$

16) $f(x)= x^3+2x^2 - 2x - 1$, $g(x)= 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4$;

17) $f(x)= x^3+2x^2 - x$, $g(x)= x^6 + x^5 + x^4$

18) $f(x)= x^4 - 3x^3 + 2x^2$, $g(x)= x^5 + 1$;

19) $f(x)= 2x^4 - x^3 + 3x$, $g(x)= x^4 - 3x^3 - 4x^2$;

20) $f(x)= x^4 - 1$, $g(x)= x^3 + 2x^2 - x - 2$;

21) $f(x)= x^4 - 2x^2 - 3$, $g(x)=2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$;

22) $f(x)=3x^3 -4x^2 + 3x - 4$, $g(x)= x^3 - 2x^2 + x - 2$;

23) $f(x)= 2x^4 + x^2 - 1$, $g(x)= 3x^4 + 2x^2 - 1$;

24) $f(x)= x^4 + x^2 - 2$, $g(x)=2x^3 - 3x^2 + 4x - 6$;

25) $f(x)= x^4 - x^3 + x - 1$, $g(x)= 2x^4 - 3x^3 + 2x - 3$.

3. С помощью неопределенных коэффициентов найти многочлены *u(x)* и *v(x)*, такие, что $f(x)u(x)+g(x)v(x)=1$, если:

1) $f(x)=3x^3 - x^2 + 3x - 1$, $g(x)= x^2 - 4x + 3$;

2) $f(x)=2x^3 - x^2 + 4x - 2$, $g(x)= x^2 - 2x - 3$;

3) $f(x)=2x^3 + x^2 + 4x + 2$, $g(x)= x^2 - 5x + 6$;

4) $f(x)=2x^3 - x^2 + 6x - 3$, $g(x)= x^2 - 2x + 1$;

5) $f(x)= x^3 +1$, $g(x)= x^2 - 4$;

6) $f(x)= x^3 +8$, $g(x)= x^2 - 2x - 3$;

7) $f(x)=2x^3 -2x^2 + x - 1$, $g(x)= x^2 - 6x + 3$;

8) $f(x)=3x^3 - x^2 + 3x - 1$, $g(x)= x^2 - 6x + 8$;

9) $f(x)=2x^3+x^2+6x+3,\ g(x)=x^2-4x+4$;

10) $f(x)=6x^3-2x^2+3x-1,\ g(x)=x^2+2$;

11) $f(x)=2x^3+x^2-4x-2,\ g(x)=x^2-1$;

12) $f(x)=2x^3+x^2+4x+2,\ g(x)=x^2-x-2$;

13) $f(x)=3x^3+x^2+3x+1,\ g(x)=x^2-6x+5$;

14) $f(x)=2x^3+x^2-4x-2,\ g(x)=x^2-4x+3$;

15) $f(x)=2x^3+x^2-6x-3,\ g(x)=x^2-1$;

16) $f(x)=2x^3-2x^2-3x+3,\ g(x)=x^2-4x+4$;

17) $f(x)=x^3-x^2+4x-4,\ g(x)=x^2-2x-3$;

18) $f(x)=3x^3+x^2-3x-1,\ g(x)=x^2-x+12$

19) $f(x)=2x^3-2x^2-3x-3,\ g(x)=2x^2+2$;

20) $f(x)=3x^3-3x^2+4x-4,\ g(x)=x^2+1$;

21) $f(x)=6x^3-3x^2+4x-2,\ g(x)=x^2-1$;

22) $f(x)=x^3+1,\ g(x)=x^2-6x+8$;

23) $f(x)=2x^3+2x^2+3x+3,\ g(x)=x^2+2$;

24) $f(x)=6x^3+2x^2+3x+1,\ g(x)=x^2+3$;

25) $f(x)=2x^3+2x^2+x+1,\ g(x)=x^2+4$.

4. Пользуясь схемой Горнера вычислить $f(a)$ и разложить многочлен $f(x)$ по степеням двучлена $x–a$, где:

1) $f(x)=x^4-2x^3+x-1,\ a=2$;

2) $f(x)=2x^5-4x^4+x-2,\ a=2$;

3) $f(x)=2x^4-3x^2+2x-2,\ a=1$;

4) $f(x)=x^5+2x^4+x^2-4,\ a=-2$;

5) $f(x)=2x^4-x^2+2x+1,\ a=-1$;

6) $f(x)=x^3+3x^2-x-1,\ a=-4$;

7) $f(x)=x^4-3x^2+2x-1,\ a=-2$;

8) $f(x)=x^3-2x^2+x-3,\ a=4$;

9) $f(x)=3x^4-2x^2+x-1,\ a=2$;

10) $f(x)=x^3-3x^2+2x-5,\ a=3$;

11) $f(x)=3x^4-x^3+2x-1,\ a=3$;

12) $f(x)=x^4-3x^3+x-1,\ a=2$;

13) $f(x)=x^4-x^3+x-4,\ a=-3$;

14) $f(x)=x^4-2x^3-x^2+x,\ a=-2$;

15) $f(x)=x^5-x^3+2x-1,\ a=1$;

16) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2+5,\ a=-1$;

17) $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 2$, $a = -1$;
18) $f(x) = x^5 - x^3 + 1$, $a = 2$;
19) $f(x) = x^5 - x^4 + 2x^2 - 3$, $a = 2$;
20) $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x$, $a = -2$;
21) $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 + 1$, $a = -2$;
22) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 4$, $a = 3$;
23) $f(x) = x^4 - x^3 + 2x - 2$, $a = 3$;
24) $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 8$, $a = -3$;
25) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 3$, $a = -3$;

5. Доказать, что:

1) $3^{55} + 1 \vdots 61$;
2) $3^{33} + 1 \vdots 28$;
3) $3^{21} + 1 \vdots 7$;
4) $3^{75} + 1 \vdots 61$;
5) $3^{39} + 1 \vdots 28$;
6) $5^{27} + 1 \vdots 7$;
7) $3^{45} + 1 \vdots 28$;
8) $2^{25} + 1 \vdots 33$;
9) $3^{51} + 1 \vdots 14$;
10) $3^{15} + 1 \vdots 61$;
11) $5^{33} + 1 \vdots 9$;
12) $5^{15} + 1 \vdots 7$;
13) $2^{21} + 1 \vdots 3$;
14) $2^{15} + 1 \vdots 11$;
15) $5^{33} + 1 \vdots 7$;
16) $5^{39} + 1 \vdots 7$;
17) $5^{21} + 1 \vdots 7$;
18) $5^{15} + 1 \vdots 7$;
19) $5^{39} + 1 \vdots 9$;
20) $3^{27} + 1 \vdots 7$;
21) $3^{57} + 1 \vdots 28$;
22) $3^{27} + 1 \vdots 28$;
23) $3^{27} + 1 \vdots 14$;
24) $3^{33} + 1 \vdots 14$;
25) $2^{1992} + 1 \vdots 3$;

6. Остатки от деления многочлена $f(x)$ на двучлены $x - a$ и $x - b$ равны соответственно r и s. Найти остаток от деления многочлена на многочлен $h(x) = (x - a)(x - b)$, если:

1) $a=2$, $b=3$, $r=1$, $s=2$;
2) $a=2$, $b=1$, $r=2$, $s=3$;
3) $a=3$, $b=-2$, $r=1$, $s=3$;
4) $a=3$, $b=-1$, $r=1$, $s=0$;
5) $a=-1$, $b=-3$, $r=$, $s=1$;
6) $a=-3$, $b=1$, $r=2$, $s=3$;
7) $a=-1$, $b=-2$, $r=0$, $s=2$;
8) $a=-1$, $b=2$, $r=0$, $s=1$;
9) $a=-2$, $b=-3$, $r=2$, $s=1$;
10) $a=1$, $b=-3$, $r=1$, $s=2$;
11) $a=-3$, $b=-4$, $r=1$, $s=3$;
12) $a=1$, $b=3$, $r=2$, $s=4$;
13) $a=-3$, $b=3$, $r=1$, $s=2$;
14) $a=4$, $b=-3$, $r=1$, $s=2$;
15) $a=-1$, $b=1$, $r=2$, $s=3$;
16) $a=2$, $b=-2$, $r=1$, $s=2$;
17) $a=-2$, $b=2$, $r=1$, $s=2$;
18) $a=3$, $b=-5$, $r=0$, $s=1$;
19) $a=-4$, $b=3$, $r=2$, $s=3$;
20) $a=4$, $b=1$, $r=1$, $s=2$;
21) $a=-3$, $b=2$, $r=3$, $s=1$;
22) $a=2$, $b=-1$, $r=2$, $s=1$;
23) $a=-4$, $b=-5$, $r=0$, $s=2$;
24) $a=-2$, $b=5$, $r=1$, $s=3$;
25) $a=-3$, $b=-1$, $r=1$, $s=3$.

7. Найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$, если:

1) $f(x)=x^{26}-9x^{2}+x^{12}-9x^{10}+3x^{2}-2x+4$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
2) $f(x)=x^{44}-9x^{42}+x^{12}-9x^{10}+x^{2}-3x+4$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
3) $f(x)=x^{27}-27x^{24}-x^{2}+2x+4$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
4) $f(x)=x^{40}+27x^{37}+x^{20}-9x^{18}+x^{3}-27$, $g(x)=x^{2}+4x+3$;
5) $f(x)=x^{31}-2x^{30}+x^{15}-4x^{13}+x^{2}-x$, $g(x)=x^{2}-x-2$;
6) $f(x)=x^{12}-9x^{10}+x^{2}-x-1$, $g(x)=x^{2}-2x-3$;
7) $f(x)=x^{10}-16x^{8}+x^{6}-4x^{5}+x^{2}-3x+4$, $g(x)=x^{2}-5x+4$;
8) $f(x)=x^{26}-27x^{11}+x^{3}-x^{2}-9$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
9) $f(x)=x^{20}+27x^{17}-x^{2}-3x+10$, $g(x)=x^{2}+2x-3$;
10) $f(x)=x^{12}-9x^{10}+3x^{3}-2x^{2}-3x+4$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
11) $f(x)=x^{19}-2x^{18}+x^{11}-2x^{10}+x^{9}-4x^{7}+x^{6}-4x^{4}+x$, $g(x)=x^{2}-x-2$;
12) $f(x)=x^{15}+x^{14}-25x^{13}-25x^{12}-x+4$, $g(x)=x^{2}-6x+5$;
13) $f(x)=x^{12}-9x^{10}+3x^{2}-3x-4$, $g(x)=x^{2}-2x-3$;
14) $f(x)=x^{15}+5x^{14}+x^{13}+5x^{12}+x+6$, $g(x)=x^{2}+6x+5$;
15) $f(x)=x^{11}-27x^{8}-3x^{2}+x+4$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
16) $f(x)=x^{15}+x^{14}-9x^{13}-9x^{12}+x^{2}-2x+1$, $g(x)=x^{2}-2x-3$;
17) $f(x)=x^{12}-4x^{11}+x^{10}-4x^{9}+3x^{2}-2x+3$, $g(x)=x^{2}-5x-4$;
18) $f(x)=x^{10}+x^{9}-9x^{8}-9x^{7}+9x-9$, $g(x)=x^{2}-4x+3$;
19) $f(x)=x^{16}-8x^{13}+x^{12}-4x^{10}+x^{2-1}$, $g(x)=x^{2}-x-2$;
20) $f(x)=x^{10}-9x^{8}+x^{7}-9x^{5}+x^{2}-9$, $g(x)=x^{2}-2x-3$;
21) $f(x)=x^{14}-2x^{13}+x^{4}-2x^{3}-3x+2$, $g(x)=x^{2}-x-2$;
22) $f(x)=x^{15}-5x^{14}+x^{13}-25x^{11}-2x^{2}+5x+9$, $g(x)=x^{2}-6x+5$;
23) $f(x)=x^{10}-6x^{9}+x^{8}-6x^{7}+x-3$, $g(x)=x^{2}-7x+6$;
24) $f(x)=x^{9}+6x^{8}-x^{7}+6x^{6}+x-6$, $g(x)=x^{2}+7x+6$;
25) $f(x)=x^{13}-4x^{11}+2x^{10}-8x^{8}+x^{3}-x^{2-3}$, $g(x)=x^{2}-x-2$;

8. Доказать, что если *f(a)* ⋮ *p*, *f*(*b*) ⋮ *p*, *то f(c)* ⋮ *p*, где:

1) $a=2, b=3, c=5, p=6$;
2) $a=3, b=10, c=13, p=30$;
3) $a=2, b=5, c=7, p=10$;
4) $a=3, b=8, c=11, p=24$;
5) $a=3, b=5, c=8, p=15$;
6) $a=5, b=12, c=17, p=60$;
7) $a=3, b=4, c=7, p=12$;
8) $a=5, b=8, c=13, p=40$;
9) $a=5, b=6, c=11, p=30$;
10) $a=3, b=16, c=19, p=48$;
11) $a=3, b=13, c=16, p=39$;
12) $a=5, b=14, c=19, p=70$;
13) $a=20, b=3, c=23, p=60$;
14) $a=7, b=9, c=16, p=63$;
15) $a=19, b=3, c=22, p=57$;
16) $a=3, b=11, c=14, p=33$;
17) $a=22, b=3, c=25, p=66$;
18) $a=5, b=9, c=14, p=45$;
19) $a=5, b=11, c=16, p=55$;
20) $a=5, b=13, c=18, p=65$;
21) $a=3, b=1, c=17, p=42$;
22) $a=3, b=7, c=10, p=21$;
23) $a=7, b=8, c=15, p=56$;
24) $a=3, b=17, c=20, p=51$;
25) $a=5, b=7, c=12, p=35$.

9. Разложить многочлен $f(x)$ в произведение многочленов не выше второй степени с действительными коэффициентами, где:

1) $f(x)=x^7-4$;
2) $f(x)=2x^8+9$;
3) $f(x)=3x^8-5$;
4) $f(x)=x^6-6$;
5) $f(x)=3x^8+5$;
6) $f(x)=2x^9+1$;
7) $f(x)=2x^7-3$;
8) $f(x)=x^5+15$;
9) $f(x)=3x^7+5$;
10) $f(x)=3x^8-4$;
11) $f(x)=x^7+5$.
12) $f(x)=3x^6+4$;
13) $f(x)=2x^9-5$;
14) $f(x)=x^6-5$;
15) $f(x)=2x^5+11$;
16) $f(x)=3x^9-7$;
17) $f(x)=x^9-2$;
18) $f(x)=x^6+6$;
19) $f(x)=3x^7-6$;
20) $f(x)=2x^8-5$;
21) $f(x)=4x^9+5$;
22) $f(x)=2x^5+3$;
23) $f(x)=3x^6-2$;
24) $f(x)=2x^6+5$;
25) $f(x)=3x^7-5$.

10. Представить многочлен $f(x)$ в виде суммы квадратов двух многочленов, где:

1) $f(x)=x^4+2x^2+1$; 2) $f(x)=x^6+2x^3+1$; 3) $f(x)=x^4+4x^2+4$;

4) $f(x)=x^4+4x^2+3$; 5) $f(x)=x^6+4x^3+3$; 6) $f(x)=x^4+5x^2+6$;

7) $f(x)=x^4+5x^2+4$; 8) $f(x)=x^4+6x^2+5$; 9) $f(x)=x^4+8x^2+7$;

10) $f(x)=x^4+9x^2+8$; 11) $f(x)=x^6+7x^3+10$; 12) $f(x)=x^4+7x^2+10$;

13) $f(x)=x^6+6x^3+9$; 14) $f(x)=x^6+4x^3+4$; 15) $f(x)=x^4+6x^2+8$;

16) $f(x)=x^4+7x^2+6$; 17) $f(x)=x^6+6x^3+8$; 18) $f(x)=x^6+9x^3+8$;

19) $f(x)=x^6+7x^3+6$; 20) $f(x)=x^4+3x^2+2$; 21) $f(x)=x^6+6x^3+5$;

22) $f(x)=x^6+8x^3+7$; 23) $f(x)=x^6+3x^3+2$; 24) $f(x)=x^6+5x^3+4$;

25) $f(x)=x^6+5x^3+6$.

11. Определить кратность корня $x=a$ многочлена $f(x)$. Найти многочлен наибольшей степени с простыми корнями, каждый корень которого является корнем многочлена $f(x)$, где:

1) $f(x)=x^4-4x^3+5x^2-4x+4$, $a=1$;
2) $f(x)=x^4-x^3-x+1$, $a=1$;
3) $f(x)=2x^5+4x^4+5x^3+4x^2-x-2$, $a=-1$;
4) $f(x)=2x^5-7x^4+4x^3+8x^2-4x$, $a=1$;
5) $f(x)=4x^5-12x^4+15x^3-13x^2+9x-3$, $a=1$;
6) $f(x)=x^6-3x^5+4x^4-2x^3+3x^2-x$, $a=1$;
7) $f(x)=x^5-4x^4+5x^3-2x^2-4x+8$, $a=2$;
8) $f(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$, $a=-1$;
9) $f(x)=x^4-2x^2-1$, $a=1$;
10) $f(x)=x^6+x^5+4x^3+7x^2+3x$, $a=-1$;

11) $f(x)=2x^5-7x^4+9x^3-8x^2+4$, $a=1$;

12) $f(x)=2x^5+4x^4+x^3-x^2+x+1$, $a=-1$;

13) $f(x)=x^5-3x^4+5x^3-5x^2+4x-2$, $a=1$;

14) $f(x)=x^5-4x^4+5x^3-3x^2+4$, $a=2$;

15) $f(x)=2x^4-5x^3+3x^2+x-1$, $a=1$;

16) $f(x)=x^5-7x^4+14x^3-3x^2-9x$, $a=3$;

17) $f(x)=2x^6-6x^5+9x^4-11x^3+9x^2-3x$, $a=1$;

18) $f(x)=x^5-5x^4+2x^3+15x^2-9x$, $a=3$;

19) $f(x)=x^5+3x^4-2x^3-2x^2+x+1$, $a=-1$;

20) $f(x)=2x^5-6x^4+7x^3-5x^2+3x-2$, $a=1$;

21) $f(x)=2x^5+4x^4+3x^3+x^2-x-1$, $a=-1$;

22) $f(x)=2x^5+4x^4+3x^3-3x-2$, $a=-1$;

23) $f(x)=x^5-6x^2+3x$, $a=1$;

24) $f(x)=2x^4-7x^3+7x^2-x-1$, $a=1$;

25) $f(x)=x^5-4x^4+4x^3+x^2-4x+4$, $a=2$.

12. Зная, что многочлен $f(x)$ имеет корень a, найти остальные его корни, если:

1) $f(x)=x^4-6x^3+9x^2+4x-12$, $a=2$;

2) $f(x)=x^4+2x^3-7x^2-20x-12$, $a=-2$;

3) $f(x)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$, $a=3$;

4) $f(x)=6x^4-19x^3+5x^2+16x+4$, $a=2$;

5) $f(x)=6x^4-29x^3+45x^2-24x+4$, $a=2$;

6) $f(x)=6x^4-7x^3-3x^2+3x+1$, $a=1$;

7) $f(x)=x^4+8x^3+23x^2+28x+12$, $a=-2$;

8) $f(x)=x^4-5x^3+x^2+21x-18$, $a=3$;

9) $f(x)=6x^4-17x^3+17x^2-7x+1$,

10) $f(x)=3x^4-4x^3-2x^2+4x-1$,

a=1; a=1;

11) $f(x)=6x^4+7x^3-3x^2-3x+1$, a=–1;

12) $f(x)=3x^4-2x^3-4x^2+2x+1$, a=–1;

13) $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-1$, a=1;

14) $f(x)=3x^4+8x^3+6x^2-1$, a=–1;

15) $f(x)=x^4-11x^2+4x+12$, a=2;

16) $f(x)=x^4-8x^3+23x^2-28x+12$, a=2;

17) $f(x)=3x^4+4x^3-2x^2-4x-1$, a=–1;

18) $f(x)=6x^4+17x^3+17x^2+7x+1$, a=–1;

19) $f(x)=3x^4-10x^3+11x^2-6x+1$, a=–1;

20) $f(x)=x^4+7x^3+13x^2-3x-18$, a=–3;

21) $f(x)=6x^4+20x^3+45x^2+24x+4$, a=–2;

22) $f(x)=x^4-9x^3-4x+12$, a=–2;

23) $f(x)=6x^4+19x^3+5x^2-16x+4$, a=–2;

24) $f(x)=x^4+6x^3+9x^2-4x-12$, a=–2;

25) $f(x)=x^4-2x^3-7x^2+20x-12$, a=2.

13.Доказать, что число $\sqrt[m+5]{nm+1}$ - иррациональное.

14. Найти рациональные корни многочлена:

1) $2x^5+3x^4-2x^3-2x^2+1$;

2) $2x^4-4x^3+5x^2-4x+1$;

3) $4x^4-16x^3+11x^2+4x-3$;

4) $3x^4-2x^3-3x^2+4x-2$;

5) $2x^4-10x^3+11x^2+5x-6$;

6) $2x^5+4x^4+x^3-x^2+x+1$;

7) $2x^4-5x^3+3x^2+15x-9$;

8) $2x^4+10x^3+11x^2-5x-6$;

9) $2x^4+10x^3+13x^2+5x+6$;

10) $3x^4-3x^3-7x^2+x+2$;

11) $2x^4-7x^3+4x^2+8x-4$;

12) $2x^4-7x^3+12x^2-8x+4$;

13) $4x^4+16x^3+13x^2+4x+3$;

14) $2x^4-x^3+2x-1$;

15) $2x^5+x^4+4x^2+7z+3$;

16) $3x^4-2x^3+2x-1$;

17) $3x^4-3x^3-5x^2-x-2$;

18) $2x^5-6x^4+9x^3-11x^2+9x-3$;

19) $2x^4-7x^3+7x^2-x-1$;

20) $4x^4+16x^3+11x^2-4x-3$;

21) $3x^4+2x^3-6x^2-x+2$;

22) $3x^4+3x^3-5x^2+x-21$;

23) $2x^4-x^3-2x+1$;

24) $2x^5-4x^4+5x^3-3x^2+4$;

25) $2x^4-5x^3+3x^2+x-1$.

15.Доказать, что данное уравнение не имеет ненулевых целочисленных решений:

1) $9x^4+3x^3y-2x^2y^2+2xy^3+y^4=0$;

2) $x^4+5x^3y-6x^2y^2-2xy^3+3y^4=0$;

3) $3x^4+3x^3y+2x^2y^2-2xy^3-y^4=0$;

4) $x^4-5x^3y-3x^2y^2-2xy^3-2y^4=0$;

5) $5x^4-3x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4=0$;

6) $x^4-4x^3y+2x^2y^2-xy^3+3y^4=0$;

7) $5x^4+4x^3y-2x^2y^2-xy^3-y^4=0$;

8) $x^4-8x^3y+x^2y^2-xy^3+2y^4=0$;

9) $4x^4+3x^3y-2x^2y^2+xy^3+y^4=0$;

10) $x^4-7x^3y+2x^2y^2+xy^3+2y^4=0$;

11) $6x^4+2x^3y-3x^2y^2-xy^3+y^4=0$;

12) $x^4-6x^3y-3x^2y^2-2xy^3+3y^4=0$;

13) $6x^4-2x^3y-4x^2y^2-2xy^3+y^4=0$

14) $x^4-2x^3y-3x^2y^2-2xy^3-3y^4=0$;

15) $x^4+2x^3y-3x^2y^2+4xy^3+5y^4=0$

16) $x^4-3x^3y-2x^2y^2+3xy^3+2y^4=0$;

17) $x^4+3x^3y-x^2y^2+5xy^3+3y^4=0$;

18) $x^4-5x^3y-3x^2y^2+xy^3+3y^4=0$;

19) $x^4-6x^3y+3x^2y^2-xy^3+2y^4=0$;

20) $x^4-2x^3y-3x^2y^2-2xy^3+3y^4=0$;

21) $x^4-3x^3y-4x^2y^2-2xy^3+3y^4=0$;

22) $x^4-2x^3y-5x^2y^2-3xy^3+2y^4=0$;

23) $x^4-3x^3y-4x^2y^2-4xy^3+3y^4=0$;

24) $x^4-5x^3y-3x^2y^2-xy^3+3y^4=0$;

25) $x^4-3x^3y-2x^2y^2+xy^3+4y^4=0$.

16.Найти а) многочлен $f(x)$ и б) многочлен с действительными коэффициентами $g(x)$, наименьшей степени, имеющие простой корень $m+1+i^n$, корень $-m-i^{n+1}$ кратности 2.

17. Многочлен $f(x)$ при делении на многочлен $g^2(x)$ дает остаток $r(x)=(n+3)x^{5-n}-m-1$. Какой остаток дает многочлен $f(x)$ при делении на многочлен $g(x)=x^3+(m+2)x+m-5$?

18. Доказать, что многочлен $19x^{2k}-2(k+1)x^k+2kx+2-k$ делится на многочлен $(x-1)^2$, если:

1. k=100;	2. k=101;	3. k=102;	4. k=103;	5. k=104;
6. k=90;	7. k=91;	8. k=92;	9. k=93;	10. k=94;
11. k=80;	12. k=81;	13. k=82;	14. k=83;	15. k=84;
16. k=70;	17. k=71;	18. k=72;	19. k=73;	20. k=74;
21. k=60;	22. k=61;	23. k=62;	24. k=63;	25. k=64.

19. Корни многочлена образуют арифметическую (геометрическую) прогрессию. Найти a, и корни многочлена $f(x)$, если:

1) $f(x)=x^3+2x^2-3x+a$;	2) $f(x)=x^3-4x^2-4x+a$;
3) $f(x)=x^3-2x^2+3x+a$;	4) $f(x)=x^3+3x^2-5x+a$;
5) $f(x)=x^3-4x^2-3x+a$;	6) $f(x)=x^3-6x^2+x+a$;
7) $f(x)=x^3+3x^2-4x+a$;	8) $f(x)=x^3-5x^2+6x+a$;
9) $f(x)=x^3-3x^2-5x+a$;	10) $f(x)=x^3-3x^2+6x+a$;
11) $f(x)=x^3-6x^2+2x+a$;	12) $f(x)=x^3-6x^2+11x+a$;
13) $f(x)=x^3-3+a$;	14) $f(x)=x^3-4x+a$;
15) $f(x)=x^3-3x^2+2x+a$;	16) $f(x)=x^3-6x^2+11x+a$;
17) $f(x)=x^3-12x^2+44x+a$;	18) $f(x)=x^3-9x^2+23x+a$;
19) $f(x)=x^3+3x^2+2x+a$;	20) $f(x)=x^3+3x^2-x+a$;
21) $f(x)=x^3+9x^2+26x+a$;	22) $f(x)=x^3+12x^2+44x+a$;
23) $f(x)=x^3+12x^2+47x+a$;	24) $f(x)=x^3+9x+a$;
25) $f(x)=x^3+92x^2+23x+a$.	

20.При каких натуральных n будет простым следующее число :

1) $n^{56}+n^{25}+1$; 2) $n^{101}+n^{100}+1$; 3) $n^{104}+n^{103}+1$; 4) $n^{65}+n^{73}+1$;

5) $n^{425}+n^{514}+1$; 6) $n^{515}+n^{64}+1$; 7) $n^{89}+n^{82}+1$; 8) $n^{113}+n^{421}+1$;

9) $n^{512}+n^{424}+1$; 10) $n^{94}+n^{91}+1$; 11) $n^{92}+n^{72}+1$; 12) $n^{95}+n^{91}+1$;

13) $n^{77}+n^{109}+1$; 14) $n^{110}+n^{94}+1$; 15) $n^{121}+n^{118}+1$; 16) $n^{116}+n^{120}+1$;

17) $n^{119}+n^{511}+1$; 18) $n^{71}+n^{301}+1$; 19) $n^{98}+n^{301}+1$; 20) $n^{302}+n^{55}+1$;

21) $n^{242}+n^{67}+1$; 22) $n^{80}+n^{67}+1$; 23) $n^{68}+n^{106}+1$; 24) $n^{422}+n^{105}+1$;

25) $n^{107}+n^{106}+1$.

21.Решить уравнение в поле комплексных чисел:

1) $x^3+3x^2+4x-8=0$; 2) $x^3+2x^2+6x-9=0$; 3) $x^3+4x^2+2x-7=0$;

4) $x^3+6x^2+4x-11=0$; 5) $x^3-3x^2+2x-6=0$; 6) $x^3+2x^2+2x-5=0$;

7) $x^3+6x^2+16x+21=0$; 8) $x^3+10x^2+30x+27=0$; 9) $x^3-x^2-7x-20=0$;

10) $x^3-3x^2-3x-35=0$; 11) $x^3+3x^2-7x+15=0$; 12) $2x^3+x^2+3x-2=0$;

13) $x^3-x^2+x+3=0$; 14) $x^3+9x^2+23x+18=0$; 15) $x^3-5x^2-5x+18=0$;

16) $x^3-6x^2+14x-15=0$; 17) $2x^3+x^2+x-1=0$; 18) $8x^3+6x^2+5x+1=0$;

19) $3x^3-2x^2+8x+3=0$; 20) $5x^3+4x^2+4x-1=0$; 21) $2x^3+3x^2+2x+1=0$;

22) $2x^3+x^2-x+2=0$; 23) $2x^3-5x^2-2x-3=0$; 24) $2x^3-5x^2-2x-3=0$;

25) $2x^3+7x^2+4x+3=0$.

22.Отделить кратные множители многочлена:

1) $x^5-10x^3-20x^2-15x-4$; 2) $x^7+2x^5+x^4+x^3+2x^2+1$;

3) $x^7+2x^5-x^4+x^3-2x^2-1$; 4) $x^6+4x^5+4x^4-x^2-4x-4$;

5) $x^6+4x^5+3x^4-x^2-4x-3$; 6) $x^6-4x^5+3x^4-x^2+4x-3$;

7) $x^6-2x^4-3x^5-4x^2+4x$; 8) $x^6-x^4-x^3+x$;

9) $x^5-5x^4+4x^3-x^2+5x-4$; 10) $x^6-6x^5+9x^4+4x^3-12x^2+4$;

11) $x^6-x^5-2x^4-x^2+x+2$; 12) $x^6-x^5-4x^4+2x^3-3x^2-x-2$;

13) $x^6-2x^5-3x^4-x^2+2x+3$; 14) $x^6+3x^4+3x^2+1$;

15) $x^6-4x^5+4x^4-x^2+4x-4$; 16) $x^6-5x^5+4x^4-x^3-5x^2-4x$;

17) $x^6+4x^5+4x^4-x^2-4x-4$; 18) $x^6+x^5-2x^4-x^2-x+2$;

19) $x^7+2x^5-x^4+x^3-2x^2-1$; 20) $x^6+2x^5-3x^4-x^2-2x+3$;

21) $x^{10}-x^8-2x^6+2x^4+x^2-1$; 22) $x^6+x^4-x^2-1$;

23) $x^5-5x^4+16x^3-24x^2+20x-8$; 24) $x^6+2x^5+x^4-x^2-2x-1$;

25) $x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27$.

23. Даны многочлены $f(x)$ и $g(x)$

a) Определить число действительных корней каждого.

b) С помощью теоремы Штурма найдите промежуток (a, b), где $b-a=1$, содержащий наибольший положительный корень x_0 многочлена $g(x)$ в задачах 1 – 6; наименьший положительный корень x_0 многочлена $g(x)$ в задачах 7 – 11; наибольший отрицательный корень x_0 многочлена $g(x)$ в задачах 12 – 16; наименьший отрицательный корень x_0 многочлена $g(x)$ в задачах 17 – 25.

c) Вычислить с точностью 0,0001 корень x_0 пользуясь методом линейной интерполяции и методом Ньютона.

d) С помощью калькулятора по схеме Горнера найдите значение многочлена $g(x)$ от найденного приближенного значения корня x_0.

1) $f(x)=x^3-3x+1,\ g(x)=x^4-7x^2+2x+2$;

2) $f(x)=x^3-3x+1,\ g(x)=x^4-9x^2+6x-1$;

3) $f(x)=x^3+3x^2-1,\ g(x)=x^4-9x^2-6x-1$;

4) $f(x)=x^3-3x^2+3,\ g(x)=x^4-5x^2-2x3$;

5) $f(x)=x^3+3x^2-3,\ g(x)=x^4-13x^2-4x+2$;

6) $f(x)=x^3-3x^2+1,\ g(x)=x^4-13x^2+4x+2$;

7) $f(x)=x^3-3x^2+3x-3,\ g(x)=x^4-7x^2-2x+2$;

8) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1,\ g(x)=x^4-7x^2+2x+2$;

9) $f(x)=x^3+3x^2+3x-2,\ g(x)=x^4-5x^2-2x+3$;

10) $f(x)=x^3-3x^2+3x-4,\ g(x)=x^4-13x^2-4x+2$;

11) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2,\ g(x)=x^4-7x^2-2x+2$;

12) $f(x)=x^3+3x^2+3x+4,\ g(x)=x^4-7x^2+2x+2$;

13) $f(x)=x^3-6x^2+7x+5$, $g(x)=x^4-5x^2+2x+3$;

14) $f(x)=x^3-12x^2+45x+54$, $g(x)=x^4-13x^2-4x+2$;

15) $f(x)=x^3-3x+5$, $g(x)=x^4-13x^2+4x+2$;

16) $f(x)=x^3+5x-1$, $g(x)=x^4-7x^2-2x+2$;

17) $f(x)=x^3+3x-1$, $g(x)=x^4-7x^2+2x+2$;

18) $f(x)=x^3+2x+6$, $g(x)=x^4-9x^2+6x-1$;

19) $f(x)=x^3-3x+5$, $g(x)=x^4-13x^2+4x+2$;

20) $f(x)=x^3+2x+2$, $g(x)=x^4-5x^2+2x+3$;

21) $f(x)=x^3-3x-3$, $g(x)=x^4-13x^2-4x+2$;

22) $f(x)=x^3-3x+6$, $g(x)=x^4-13x^2+4x+2$;

23) $f(x)=x^3+3x-7$, $g(x)=x^3-3x+1$;

24) $f(x)=x^3-5x-5$, $g(x)=x^3-3x-1$;

25) $f(x)=x^3-x-1$, $g(x)=x^3+3x+1$.

24. Исследовать данный многочлен на приводимость в поле рациональных чисел:

1) $3x^4-2x^3+6x^2-14x+6$;
2) $x^4-4x^3+6x^2+14x-10$;
3) $4x^5-3x^4-2x^3+6x^2-14z+6$;
4) $x^5-2x^4+4x^3-12x-14$;
5) $5x^4-4x^3-6x^2+8x-10$;
6) $3x^5-2x^3-6x^2+14x-6$;
7) $7x^4+14x^3-22x^2-14$;
8) $2x^5-3x^4+6x^3+15x-15$;
9) $4x^5-3x^4+6x^3-3x-6$;
10) $6x^5-5x^4+10x-10$;
11) $3x^5-2x^4-2x^3-6$;
12) $7x^5-14x^4+16x^3-6$;
13) $2x^5-6x^4+9x^3-18x-3$;
14) $8x^5-6x^4+9x^3-15$;
15) $5x^5-2x^4+6x^3-8x-6$;
16) $9x^5-14x^4+21x-14$;
17) $7x^5-36x^4+22x^3+10x-2$;
18) $13x^5-2x^3+4x^2-4x-6$;
19) $6x^5-30x^4-10x^3-5x-15$;
20) $3x^4-6x^3-10x^2+6$;
21) $2x^4-6x^3-9x^2-12x-15$;
22) $8x^5-3x^4+6x^3-21x^2-3$;

23) $x^4+2x^3-4x^2-4x-6$; 24) $6x^5-5x^4+10x^3-15x^2-10$;

25) $8x^4-6x^3+6x^2-6x-6$.

25. Разложить многочлен $f(x)$ по степеням $g(x)$, если:

1) $f(x)=x^6-x^5+1,\ g(x)=x^2+1$;

2) $f(x)=x^7-x^6+2,\ g(x)=x^2-1$;

3) $f(x)=x^9-x^7+x^5-1,\ g(x)=x^2+2$;

4) $f(x)=x^8-6x^2+x+1,\ g(x)=x^3+1$;

5) $f(x)=x^9-7x^9+x^2+1,\ g(x)=x^4+1$;

6) $f(x)=x^9+x^7+x^6-1,\ g(x)=x^2-2$;

7) $f(x)=x^9-x^8+x^2-1,\ g(x)=x^2+x+1$;

8) $f(x)=x^{10}-x^3+x^2-1,\ g(x)=x^4-1$;

9) $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+1,\ g(x)=x^2+x-1$;

10) $f(x)=x^{10}-x^5-1,\ g(x)=x^2+1$;

11) $f(x)=x^{10}+x^6-x^2+1,\ g(x)=x^2+2x+1$;

12) $f(x)=x^9+x^8-x^6-1,\ g(x)=x^2+2$;

13) $f(x)=x^{11}+x^{19}-x^3+1,\ g(x)=x^2+x-1$;

14) $f(x)=x^8-x^7+x-1,\ g(x)=x^2+3$;

15) $f(x)=x^9+x^8+x^3+1,\ g(x)=x^2-1$;

16) $f(x)=x^9-x^8+2x^7+1,\ g(x)=x^2+2x-1$;

17) $f(x)=x^9-3x^8+4x^7+1,\ g(x)=x^2+1$;

18) $f(x)=x^9+2x^6-x^4+1,\ g(x)=x^2+2$;

19) $f(x)=x^9-x^8+2x^7+x^6+1,\ g(x)=x^2+x-1$;

20) $f(x)=x^9-2x^3+x^2+1,\ g(x)=x^2+4$;

21) $f(x)=x^{10}-x^8+x^6+1,\ g(x)=x^2+x-1$;

22) $f(x)=x^9+x^8+x^2+1,\ g(x)=x^2+x+2$;

23) $f(x)=x^9-x^8+x^7+x^2+2,\ g(x)=x^2+1$;

24) $f(x)=x^8-x^7+x^4-2,\ g(x)=x^2-1$;

25) $f(x)=x^8+x^6+x^4+x^2+1,\ g(x)=x^2+x+1$.

26. Следующие рациональные дроби представить в виде суммы простейших дробей в поле рациональных чисел:

1) а) $\dfrac{3x-1}{x^2+x}$, б) $\dfrac{x-3}{x^3+1}$;

2) а) $\dfrac{x^2-2}{x^3+x^2}$, б) $\dfrac{x^2-4}{x^4+2x^2+1}$;

3) а) $\dfrac{x^2-4}{(x^4-4x^2)(x+1)}$, б) $\dfrac{x-1}{x^3+8}$;

4) а) $\dfrac{2x+1}{x^5-x^3}$, б) $\dfrac{2x^2+2}{(x^2+x)^2}$;

5) а) $\dfrac{2x-5}{(x-1)^3x}$, б) $\dfrac{x^2-1}{(x^2+x)^2}$;

6) а) $\dfrac{2x^2+1}{(x^2+1)^2}$, б) $\dfrac{x-2}{x^2-2x-3}$;

7) а) $\dfrac{3x^2+1}{x^3-4x}$, б) $\dfrac{x^2-x}{(x^3-x^2)(x+1)}$;

8) а) $\dfrac{x^3}{(x+1)^2(x-2)^2}$, б) $\dfrac{x-3}{(x^2-4x+3)x}$;

9) а) $\dfrac{2x^3+3}{x^3-x^2+x-1}$, б) $\dfrac{x-3}{x^3+x^2+x+1}$;

10) а) $\dfrac{2x+3}{x^3+4x^2+3x}$, б) $\dfrac{3x+4}{x^3-4x^2+4x}$;

11) а) $\dfrac{x+5}{x^3-x^2}$, б) $\dfrac{3x-2}{x^3+1}$;

12) а) $\dfrac{2x-1}{x^4+x^2}$, б) $\dfrac{x-2}{x(x+1)(x-3)}$;

13) а) $\dfrac{2x+3}{x^3-x^2-12x}$, б) $\dfrac{x^2-3}{x^3-4x^2+4x}$;

14) а) $\dfrac{2x-4}{(x^3-2x^2)(x+1)}$, б) $\dfrac{3x^3+1}{(x^3+1)(x-2)}$;

15) а) $\dfrac{3x^2-x+1}{x^4-x^2}$, б) $\dfrac{3x^2+2x}{x^5-x^2}$;

16) а) $\dfrac{x^2+x+1}{(x^3-1)^2}$, б) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-x^2}$;

17) а) $\dfrac{x^2+2x-3}{(x^2-x-2)^2}$, б) $\dfrac{x-3}{x^4-x}1$;

18) а) $\dfrac{x-2}{x^5-4x^3}$, б) $\dfrac{2x+x^2}{x^4-x^2}$;

19) а) $\dfrac{3x-2}{x^5+2x^4+x^3}$, б) $\dfrac{x^2-3}{(x-3)^2x}$;

20) а) $\dfrac{3x-2}{x^3-4x}$, б) $\dfrac{3x^3+3x}{(x^2+1)^2x}$;

21) а) $\dfrac{x^2-1}{(x^3-1)^2}$, б) $\dfrac{x^2-x}{x^3-5x^2+4x}$;

22) а) $\dfrac{x-5}{(x^2-2x-3)^2}$, б) $\dfrac{x-3}{(x^2-4x+3)^2}$;

23) а) $\dfrac{x-2}{x^4-x}$, б) $\dfrac{x^2+1}{(x^2+2)^2}$;

24) а) $\dfrac{x^2+3}{(x^2+1)x^2}$, б) $\dfrac{x^3-1}{(x^2-1)^2}$;

25) а) $\dfrac{3x^2-1}{x^4-x^2}$, б) $\dfrac{x-3}{x^5-3x^4}$.

27. Пользуясь схемой Горнера представить в виде суммы простейших дробей в поле рациональных чисел следующую дробь:

1) $\frac{x^3-3x^2+x-1}{(x+2)^4}$; 2) $\frac{x^3+3x^2-2x-1}{(x-2)^4}$; 3) $\frac{x^4-2x^3+x-3}{(x-1)^5}$;

4) $\frac{x^4-2x^5+3x-1}{(x+1)^5}$; 5) $\frac{x^3-2x^2+3}{(x+2)^4}$; 6) $\frac{x^4-3x^3-x^2-1}{(x-3)^5}$;

7) $\frac{x^3-2x^2+3x-2}{(x+3)^4}$; 8) $\frac{x^3-2x^2+3x-4}{(x-1)^4}$; 9) $\frac{x^4-2x^3+3x^2+1}{(x+1)^5}$;

10) $\frac{x^4-2x^2+x-1}{(x-1)^5}$; 11) $\frac{x^3-x^2+2x-1}{(x+2)^4}$; 12) $\frac{2x^3-3x-1}{(x-2)^4}$;

13) $\frac{3x^3-2x^2+5}{(x-3)^4}$; 14) $\frac{5x^3-x^2+x}{(x-2)^4}$; 15) $\frac{2x^3+3}{(x-1)^4}$;

16) $\frac{3x^3-2}{(x+1)^4}$; 17) $\frac{3x^3-x+1}{(x+3)^4}$; 18) $\frac{4x^2-2}{(x+1)^4}$;

19) $\frac{5x^2-3}{(x+4)^3}$; 20) $\frac{3x^3-x-1}{(x+1)^4}$; 21) $\frac{3x^3+3x^2+1}{(x-1)^4}$;

22) $\frac{2x^3+x-4}{(x+1)^6}$; 23) $\frac{2x^4-1}{(x+1)^6}$; 24) $\frac{x^4-x^2-1}{(x-2)^8}$;

25) $\frac{x^4+x^3+2}{(x-1)^9}$.

28. Освободиться от иррациональности в знаменателе дроби:

1) а) $\frac{a}{a+1}$, $a^3-3a+1=0$; б) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

2) а) $\frac{a^2-3a-1}{a^2+2a+1}$, $a^3+a^2+3a+4=0$; б) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}}$;

3) а) $\frac{1}{3a^3+a^2-2a-1}$, $a^4-a^3+2a+1=0$; б) $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}}$;

4) а) $\frac{2}{a^2+a+1}$, $a^3-a-1=0$; б) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$;

5) а) $\frac{2}{a^3+4a^2+3a-1}$, $a^4-5a^3+6a^2-1=0$; б) $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}}$;

6) а) $\dfrac{1}{a^3+a^2+a+1}$, $a^4-a^3-a^2+1=0$; б) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{1+\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{2}}$;

7) а) $\dfrac{2}{a^2+a}$, $a^3-a+2=0$; б) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}+\sqrt[4]{7}-1}$;

8) а) $\dfrac{3}{a^3+2}$, $a^4-3a+1=0$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}-2}{\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}-1}$;

9) а) $\dfrac{2}{a^3-2}$, $a^4-a-2=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}-\sqrt[4]{4}}$;

10) а) $\dfrac{3}{a^3-2}$, $a^4-a-2=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$;

11) а) $\dfrac{1}{a^2+2a+1}$, $a^3-a-1=0$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-1}$;

12) а) $\dfrac{3}{a^2+2}$, $a^3-a^2-2a+1=0$; б) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}$;

13) а) $\dfrac{3}{a^2+a}$, $a^3-a-1=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}}$;

14) а) $\dfrac{2}{a-1}$, $a^3-a^2-2a+1=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}$;

15) а) $\dfrac{3}{a+2}$, $a^3+2a^2+2=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}}$;

16) а) $\dfrac{1}{a-2}$, $a^3-a-1=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}}$;

17) а) $\dfrac{2}{2a-1}$, $a^2-3a+1=0$; б) $\dfrac{1}{1+\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}}$;

18) а) $\dfrac{2}{2a-1}$, $a^2-3a+1=0$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}}$;

19) а) $\dfrac{3}{3a-1}$, $a^2-2a-1=0$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}$;

20) а) $\dfrac{1}{3a+1}$, $a^2+a+1=0$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}}$;

21) а) $\dfrac{3}{2a^2-1}$, $a^2+a+1=0$; б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$;

22) а) $\dfrac{2}{a^2+2}$, $a^2-a-1=0$; б) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2}}$;

23) а) $\frac{2}{3a+a^2}$, $a^2+a-1=0$; б) $\frac{2}{\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2}}$;

24) а) $\frac{1}{3a-1}$, $a^2-a-1=0$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}}$;

25) а) $\frac{2}{a^2+a}$, $a^2-a-1=0$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt[3]{4}}$.

29. Составить уравнение с рациональными коэффициентами, корнем которого является a, если:

1) $a=b^2+b+1$, если $b^3-b-1=0$;
2) $a=b^2+1$, если $b^3+2b^2+2=0$;
3) $a=2-b^2$, если $b^3-b^2-2b=0$;
4) $a=b^3-2$, если $b^4-b-2=0$;
5) $a=b^2+b^2+b+1$, если $b^4-b^3-b^2+1=0$;
6) $a=b^2+b$, если $b^2-b+2=0$;
7) $a=b^3+b$, если $b^4-3b+1=0$;
8) $a=b^3+4b^2+3b-1$, если $b^4-5b^3+6b^2-1=0$;
9) $a=b^2-b$, если $b^3+b+1=0$;
10) $a=b^2+b$, если $b^4+1=0$;
11) $a=b^2+b+1$, если $b^4+1=0$;
12) $a=b^2+b$, если $b^3-b^2-1=0$;
13) $a=b^2+1$, если $b^3+b^2+1=0$;
14) $a=b^2+2$, если $b^3-2b+1=0$;
15) $a=b^2+3$, если $b^3+3b^2+1=0$;
16) $a=b^2+4$, если $b^3-3b^2-1=0$;
17) $a=b^2-4$, если $b^4+b^2+1=0$;
18) $a=b^2-4$, если $b^4+2b+1=0$;
19) $a=b+1$, если $b^2+2b-1=0$;
20) $a=2b+1$, если $b^3+b^2+1=0$;
21) $a=2b-1$, если $b^3-b^2-1=0$;
22) $a=b-1$, если $b^3+b^2+b=0$;

23) $a = b - 2$, если $b^3 + b - 1 = 0$;

24) $a = b + 2$, если $b^3 + 2b - 1 = 0$;

25) $a = b - 1$, если $b^3 - b - 1 = 0$.

30. Решите уравнение в поле комплексных чисел:

1) $x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = 0$;

2) $x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$;

3) $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = 0$;

4) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

5) $x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = 0$;

6) $x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0$;

7) $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$;

8) $x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = 0$;

9) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;

10) $x^{15} + x^{12} + x^9 + x^6 + x^3 + 1 = 0$;

11) $x^{24} + x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = 0$;

12) $x^{24} + x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = 0$;

13) $x^{30} + x^{24} + x^{18} + x^{12} + x^6 + 1 = 0$;

14) $x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 = 0$;

15) $x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1 = 0$;

16) $x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1 = 0$;

17) $x^{40} + x^{30} + x^{20} + x^{10} + 1 = 0$;

18) $x^{21} + x^{14} + x^7 + 1 = 0$;

19) $x^{28} + x^{21} + x^{14} + x^7 + 1 = 0$;

20) $x^{32} + x^{24} + x^{16} + x^8 + 1 = 0$;

21) $x^{24} + x^{16} + x^8 + 1 = 0$;

22) $x^{25} + x^{20} + x^{15} + x^5 + 1 = 0$;

23) $x^{36} + x^{24} + x^{12} + 1 = 0$;

24) $x^{48} + x^{36} + x^{24} + x^{12} + 1 = 0$;

25) $x^{28} + x^{24} + x^{20} + x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1 = 0$.

31. Доказать, что многочлен $f(x) = x^3 + m^3 + 1$ не делится на приведенный (со старшим коэффициентом равным единице) квадратный трехчлен с целыми коэффициентами.

32. Образует ли числовое поле (относительно четырех арифметических операций) множество чисел вида $a + b\alpha + c\alpha^2$, где a, b, c - рациональные числа, а a - один из корней многочлена $f(x) = (n+2)x^3 + 10 - m$.

33. Составить с помощью интерполяционной формулы Лагранжа многочлен не выше третьей степени, который в точках с координатами 1, 2, 3, 4 принимает значения a, b, c, d соответственно, если:

1) a=2, b=–1, c=–2, d=–3;	2) a=–1, b=–2, c=3, d=0;	3) a=1, b=–1, c=2, d=–2;
4) a=2, b=0, c=3, d= –1;	5) a=3, b=2, c=1, d=0;	6) a=3, b= –2, c= –1, d=1;
7) a=4, b=–4, c=2, d= –2;	8) a=4, b=0, c=0, d=1;	9) a=2, b=3, c= –1, d= –2;
10) a=4, b=1, c=0, d= –1;	11) a=5, b=–5, c=3, d=–3;	12) a=4, b=–4, c=5, d= –1;
13) a=1, b= 2, c=5, d= 0;	14) a=3, b=0, c=2, d= –3;	15) a=0, b=–1, c=1, d=2;
16) a=3, b= 4, c=–3, d=2;	17) a=3, b=2, c=1, d=0;	18) a=1, b=6, c= 0, d= 1;
19) a=4, b=3, c=2, d= 4;	20) a=5, b=3, c=–3, d=–2;	21) a=2, b=1, c=–1, d= –2;
22) a=2, b=1, c=2, d= 0;	23) a=3, b=2, c=–2, d=–1;	24) a=3, b=2, c=–2, d= 4;
25) a=1, b=3, c=4, d= 0.		

34. Выразить симметрический многочлен

$$g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i}^{3} x_i^{n+2} + (10-m)\sum_{i,j}^{3} x_i x_j^{n+1}$$

через элементарные симметрические многочлены.

35. Вычислить значение симметрической функции

$$g(x_1, x_2) = \sum_{i,j}^{2} x_i x_j^{n+2} + \sum_{i,j}^{2} x_i x_j^{n+1} + (m+2)x_1^{\,3} x_2^{\,3}$$

от корней многочлена $f(x) = x^2 + (n+1)x + 4 + m$.

36. Найти сумму квадратов и кубов корней многочлена

$$f(x)=x^4+(5-m)x^3+(m+2)x^2+(m-4)x+n+2\,.$$

37. Составить многочлены, имеющие своими корнями: *a*) квадраты, *b*) кубы корней многочлена $f(x)=x^3+(n+2)x^2+(m-4)x+n+1$.

38.Найти сумму $(\overline{nm}+5)$-х степеней всех корней степени $(40-\overline{nm})$ из единицы.

39.Доказать, что не все корни многочлена $f(x)=x^{5+\overline{nm}}+(1+m)x^{3+\overline{nm}}+(10-m)x^{2+\overline{nm}}+(6-m)x+n+m$ принадлежат полю действительных чисел.

40.

a) Доказать, что если многочлен является четной функцией, то он не содержит одночленов нечетной степени;

b) Доказать, что многочлен, являющийся нечетной функцией не содержит одночленов четной степени;

c) Доказать, что многочлен $(x^2-(n+2)x+1)^{2\overline{nm}+10}+(x^2+(n+2)x+1)^{2\overline{nm}+10}$ является четной функцией;

d) Найти свободный член и сумму коэффициентов многочлена $(x^{m+4}+(5-n)x^{m+3}+(n-6)x^{m+2}+1)^{\overline{nm}}$;

e) Найти суммы коэффициентов многочлена $(x^2-x+1)^{2\overline{nm}+10}+(x^2+x+1)^{2\overline{nm}+10}$ а) при четных степенях *x*, б) при нечетных степенях *x*;

f) Доказать тождества:

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots+x+1)\,,$$

$$x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}+x^{2n-3}+\ldots-x+1)\,;$$

g) При каких значениях параметров *a* и *b* многочлен $x^{10}+ax+bx+1$ делится нацело на многочлен x^2-1;

h) Найти значения a, b, c при которых x=1 является трехкратным корнем многочлена $x^5 + ax^3 + bx + c$;

i) При каких натуральных n

– $(x^{2n} + 2x^n + 1) \vdots (x+1)^2$;

– $(nx^{2n} - (n+1)x^n + 1) \vdots (x-1)^2$;

j) Число a – корень кратности 4 многочлена $f(x)$. Доказать, что a является простым корнем многочлена $f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x)$;

k) Доказать, что если $f(x^n) \vdots x-1$, то $f(x^n) \vdots x^n - 1$;

l) Для многочлена $f(x)$ соотношение: $(n+2)f(x) - (m+1)f'(x) - 0{,}025x^8 = 0$ выполняется для всех $x \in R$. Найти $f(0)$.

СПИСОК ИСПОЛЗОВАНННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. – М.: Физ.-мат. лит., 2004.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – Спб.: Лань, 2008.
3. Сборник задач по алгебре. Под. ред. А. И. Кострикина. – М: Физико-математическая литература, 2001.
4. Сборник задач по линейной алгебре / И.В. Проскуряков. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

СОДЕРЖАНИЕ