

## 2. Определители $n$ -го порядка

### 2.1. Основные понятия и теоремы

Введем понятие матрицы. Назовем матрицей таблицу, представляющую собой несколько  $n$ -мерных строк, записанных одна под другой:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A$  имеет  $m$  строк и  $n$  столбцов. При этом говорят, что ее размер  $m \times n$ . Матрицу размера  $n \times n$  (таблица, содержащая одинаковое количество строк и столбцов) называют квадратной матрицей порядка  $n$ .

Пусть дана квадратная матрица порядка  $n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

**Определение 2.1.** Определителем  $d$  порядка  $n$ , соответствующим матрице (1), называется алгебраическая сумма  $n!$  членов, составленная следующим образом: членами служат всевозможные произведения  $n$  элементов матрицы, взятых по одному в каждой строке и в каждом столбце, причем член берется со знаком плюс, если его индексы составляют четную подстановку, и со знаком минус – в противоположном случае.

Для записи определителя  $n$ -го порядка  $d$ , соответствующего матрице (1), будем употреблять символ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Определитель  $n$ -го порядка можно записать в виде:  $d = \sum (-1)^I a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega}$ , где суммирование ведется по всем подстановкам вида  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}$ , а  $I$  – это общее число инверсий в данной подстановке.

*Замечание 1.* Понятие определителя вводится только для квадратных матриц.

**Определение 2.2.** Транспонированием матрицы (1) называется такое преобразование этой матрицы, при котором ее строки становятся столбцами с тем же самым номером, т.е. переход от матрицы (1) к матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Можно сказать, что транспонирование есть поворот матрицы (1) около главной диагонали. Соответственно говорят, что определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

получен транспонированием определителя (2).

#### *Свойства определителей*

1°. *Определитель не меняется при транспонировании.*

Доказательство. В самом деле, всякий член определителя (2) имеет вид

$$a_{1\alpha}a_{2\beta}\dots a_{n\omega}, \quad (5)$$

где вторые индексы составляют некоторую перестановку из символов  $1, 2, \dots, n$ . Однако все множители произведения (5) и в определителе (4) остаются в разных строках и разных столбцах, т.е. (5) служит членом и для транспонированного определителя. Верно и обратное, и поэтому определители (2) и (4) состоят из одних и тех же членов. Знак члена (5) в определителе (2) определяется четностью подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}, \quad (6)$$

в определителе (4) первые индексы элементов указывают на номер столбца, вторые – на номер строки, поэтому члену (5) в определителе (4) соответствует подстановка

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \omega \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Подстановки (6) и (7) – в общем случае различные, но имеют, очевидно, одну и ту же четность, а поэтому член (5) имеет в обоих определителях один и тот же знак. Таким образом, определители (2) и (4) являются суммами одинаковых членов, взятых с одинаковыми знаками, т. е. равными друг другу.

*Замечание 2.* Из свойства 1° вытекает, что всякое утверждение о строках определителя справедливо и для его столбцов и обратно, т. е. что в определителе строки и столбцы равноправны.

2°. Если одна из строк определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство. Действительно, пусть все элементы  $i$ -й строки определителя являются нулями. В каждый член определителя должен войти множителем один элемент из  $i$ -й строки, поэтому в нашем случае все члены определителя равны нулю.

3°. Если один определитель получен из другого перестановкой двух строк, то все члены первого определителя будут членами и во втором, но с обратным знаком, т. е. от перестановки двух строк определитель лишь меняет свой знак.

Доказательство. В самом деле, пусть в определителе (2) переставляются  $i$ -я и  $j$ -я строки,  $i \neq j$ , а все остальные строки остаются на месте. Мы получим определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (8)$$

Если

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega} \quad (9)$$

есть член определителя (2), то все его множители и в определителе (8) остаются, очевидно, в разных строках и разных столбцах. Таким образом, определители (2) и (8) состоят из одних и тех же членов. Члену (9) в определителе (2) соответствует подстановка

$$\left( \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \eta & \dots & \omega \end{matrix} \right), \quad (10)$$

а в определителе (8) – подстановка

$$\left( \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \mu & \dots & \eta & \dots & \omega \end{matrix} \right), \quad (11)$$

так как, например, элемент  $a_{i\mu}$  стоит теперь в  $j$ -й строке, но остается в старом  $\mu$ -м столбце. Подстановка (11) получается из подстановки (10) путем одной транспозиции в верхней строке, т.е. имеет противоположную четность. Отсюда

следует, что все члены определителя (2) входят в определитель (8) с обратными знаками, т.е. определители (2) и (8) отличаются друг от друга лишь знаком.

4°. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, пусть определитель равен числу  $d$  и пусть соответственные элементы его  $i$ -й и  $j$ -й строк ( $i \neq j$ ) равны между собой. После перестановки этих двух строк определитель будет равен, ввиду свойства 3°, числу  $-d$ . Так как, однако, переставляются одинаковые строки, то определитель на самом деле не меняется, т. е.  $d = -d$ , откуда  $d = 0$ .

5°. *Если все элементы некоторой строки определителя умножить на некоторое число  $\lambda$ , то сам определитель умножится на  $\lambda$ .*

Доказательство. Пусть на  $\lambda$  умножены все элементы  $i$ -й строки. Каждый член определителя содержит ровно один элемент  $i$ -й строки, поэтому всякий член приобретает множитель  $\lambda$ , т. е. сам определитель умножается на  $\lambda$ .

6°. *Определитель, содержащий две пропорциональные строки, равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, пусть элементы  $j$ -й строки определителя отличаются от соответствующих элементов  $i$ -й строки ( $i \neq j$ ) одним и тем же множителем  $\lambda$ . Вынося этот общий множитель  $\lambda$  из  $j$ -й строки за знак определителя, мы получим определитель с двумя одинаковыми строками, равный нулю по свойству 4°.

7°. *Если все элементы  $i$ -й строки определителя  $n$ -го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ij} = b_j + c_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

*то определитель равен сумме двух определителей, у которых все строки, кроме  $i$ -й, такие же, как и в заданном определителе, а  $i$ -я строка в одном из слагаемых состоит из элементов  $b_j$ , в другом – из элементов  $c_j$ .*

Доказательство. Действительно, всякий член заданного определителя можно представить в виде:

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{i\mu} \dots a_{n\omega} = a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots (b_\mu + c_\mu) \dots a_{n\omega} = a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots b_\mu \dots a_{n\omega} + a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots c_\mu \dots a_{n\omega}.$$

Собирая вместе первые слагаемые этих сумм (с теми же знаками, какие имели соответствующие члены в заданном определителе), мы получим, очевидно, определитель  $n$ -го порядка, отличающийся от заданного определителя лишь тем, что в  $i$ -й строке вместо элементов  $a_{ij}$  стоят элементы  $b_j$ . Соответственно вторые слагаемые составляют определитель, в  $j$ -й строке которого стоят элементы  $c_j$ . Таким образом,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Определение 2.3.** Будем говорить, что  $i$ -я строка определителя есть *линейная комбинация* его остальных строк, если для всякой строки с номером  $j$ ,  $j=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$ , можно указать такое число  $\lambda_j$ , что, умножая  $j$ -ю строку на  $\lambda_j$ , а затем складывая все строки, кроме  $i$ -й (причем сложение строк следует понимать так, что складываются элементы всех этих строк в каждом столбце отдельно), мы получим  $i$ -ю строку. Некоторые из коэффициентов  $\lambda_j$  могут быть равными нулю, т.е.  $i$ -я строка будет на самом деле линейной комбинацией не всех, а лишь некоторых из оставшихся строк. В частности, если лишь один из коэффициентов  $\lambda_j$  отличен от нуля, мы получаем случай пропорциональности двух строк. Наконец, если строка состоит целиком из нулей, то она всегда будет линейной комбинацией остальных строк, – случай, когда все  $\lambda_j$  равны нулю.

8°. Если одна из строк определителя есть линейная комбинация его других строк, то определитель равен нулю.

Доказательство. Пусть, например,  $i$ -я строка будет линейной комбинацией  $s$  других строк,  $1 \leq s \leq n-1$ . Всякий элемент  $i$ -й строки будет тогда суммой  $s$  слагаемых, а поэтому, применяя свойство 7°, мы представим наш определитель в виде суммы определителей, в каждом из которых  $i$ -я строка будет пропорциональна одной из других строк. По свойству 6° все эти определители будут равны нулю; равен нулю, следовательно, и заданный определитель.

9°. Определитель не меняется, если к элементам одной из его строк прибавляются соответственные элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

Доказательство. Пусть, в самом деле, к  $i$ -й строке определителя  $d$  прибавляется  $j$ -я строка,  $i \neq j$ , умноженная на число  $\lambda$ , т.е. в новом определителе всякий элемент  $i$ -й строки имеет вид  $a_{is} + \lambda a_{js}$ ,  $s=1, 2, \dots, n$ . Тогда, на основании свойства 7°, этот определитель равен сумме двух определителей, из которых первый есть  $d$ , а второй содержит две пропорциональные строки и поэтому равен нулю.

*Замечание 3.* Определитель не меняется и при вычитании из одной его строки другой строки, умноженной на некоторое число. Определитель не меняется, если к одной из его строк прибавляется любая линейная комбинация других строк.

**Определение 2.4.** Пусть дан определитель  $d$  порядка  $n$ . Берем целое число  $k$ , удовлетворяющее условию  $1 \leq k \leq n-1$ , и в определителе  $d$  выберем произвольные  $k$  строк и  $k$  столбцов. Элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, составляют матрицу порядка  $k$ . Определитель этой матрицы называется минором  $k$ -го порядка определителя  $d$ .

**Определение 2.5.** Пусть в определителе  $d$   $n$ -го порядка взят минор  $|M|$  порядка  $k$ . Если мы вычеркнем те строки и столбцы, на пересечении которых стоит этот минор, то остается минор  $|M'|$  порядка  $n-k$ , который называется дополнительным минором для минора  $|M|$ .

**Определение 2.6.** Алгебраическим дополнением минора  $|M|$  называется его дополнительный минор  $|M'|$ , взятый со знаком плюс или минус в зависимости от того, четна или нечетна сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор  $|M|$  или, иными словами, число  $(-1)^{s_M} |M'|$ , где  $s_M$  — сумма номеров всех строк и столбцов, в которых расположен минор  $|M|$ .

**Теорема 2.1.** Произведение любого минора  $|M|$   $k$ -го порядка на его алгебраическое дополнение в определителе  $d$  является алгебраической суммой, слагаемые которой, получающиеся от умножения членов минора  $|M|$  на взятые со знаком  $(-1)^{s_M}$  члены дополнительного минора  $|M'|$ , будут некоторыми членами определителя  $d$ , причем их знаки в этой сумме совпадают с теми знаками, с какими они входят в состав определителя.

Доказательство. Доказательство этой теоремы начнем со случая, когда минор  $|M|$  расположен в левом верхнем углу определителя:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & M & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1,1} & \dots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е. в строках с номерами  $1, 2, \dots, k$  и в столбцах с такими же номерами. Тогда минор  $|M'|$  будет занимать правый нижний угол определителя. Число  $s_M$  в этом случае будет четным:

$$s_M = 1+2+\dots+k+1+2+\dots+k = 2(1+2+\dots+k),$$

поэтому алгебраическим дополнением для  $|M|$  служит сам минор  $|M'|$ .

Берем произвольный член

$$a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\omega} \quad (12)$$

минора  $|M|$ ; его знак в  $|M|$  будет  $(-1)^I$ , если  $I$  есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha & \beta & \dots & \omega \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Произвольный член

$$a_{k+1, \beta_{k+1}} a_{k+2, \beta_{k+2}} \dots a_{n, \beta_n} \quad (14)$$

минора  $|M'|$  имеет в этом миноре знак  $(-1)^{I'}$ , где  $I'$  есть число инверсий в подстановке

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & n \\ \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}.$$

Перемножая члены (12) и (14), мы получим произведение  $n$  элементов

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{k\alpha_k} a_{k+1, \beta_{k+1}} a_{k+2, \beta_{k+2}} \dots a_{n\beta_n}, \quad (15)$$

расположенных в разных строках и разных столбцах определителя; оно будет, следовательно, членом определителя  $d$ . Знак члена (15) в произведении  $|M||M'|$  будет произведением знаков членов (12) и (14), т.е.  $(-1)^I(-1)^{I'} = (-1)^{I+I'}$ . Такой же знак имеет, однако, член (15) и в определителе  $d$ . Действительно, нижняя строка подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & k+2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \beta_{k+1} & \beta_{k+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix},$$

составленной из индексов этого члена, содержит лишь  $I+I'$  инверсий, так как никакое  $\alpha$  ни с одним  $\beta$  не может составить инверсию: все  $\alpha$  не больше  $k$ , все  $\beta$  не меньше  $k+1$ .

Этим доказан рассматриваемый нами частный случай теоремы. Переходим к рассмотрению общего случая, т.е. предположим, что минор  $|M|$  расположен в строках с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$  и в столбцах с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_k$ , причем

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k, \quad j_1 < j_2 < \dots < j_k.$$

Переставляя строки и столбцы определителя, передвинем минор  $|M|$  в левый верхний угол, причем так, чтобы дополнительный минор не изменился. Для этого переставим  $i_1$ -ю строку с  $(i_1-1)$ -й строкой, затем с  $(i_1-2)$ -й и т. д., пока  $i_1$ -я строка не займет место первой строки, при этом строки будем переставлять  $i_1-1$  раз. Будем затем последовательно переставлять  $i_2$ -ю строку со строками, расположенные над нею, пока она не расположится непосредственно под  $i_1$ -й строкой, т. е. на месте, которое до начала всех преобразований занимала вторая строка, при этом строки будем переставлять  $(i_2-2)$  раза. Аналогичным образом

$i_3$ -ю строку мы передвинем на место третьей строки и т. д., пока  $i_k$ -я строка не окажется на месте  $k$ -й строки. Всего при этом будем совершать

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\dots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\dots+i_k) - (1+2+\dots+k)$$

транспозиций строк.

Минор  $|M|$  расположен уже в первых строках нового определителя. Будем теперь последовательно переставлять столбцы определителя:  $n$ -й со всеми ему предшествующими, пока он не займет первого места, затем  $n-1$ -й, пока он не займет второго места, и т. д. Всего столбцы будут переставлены  $(j_1+j_2+\dots+j_k) - (1+2+\dots+k)$  раз.

После всех этих преобразований мы приходим к новому определителю  $d'$ , в котором минор  $|M|$  занимает левый верхний угол. Так как мы переставляли лишь соседние строки или столбцы, то взаимное расположение строк и столбцов, содержащих в определителе  $d$  минор  $|M|$ , остается без изменения, а потому дополнительным к минору  $|M|$  в определителе  $d'$  остается минор  $|M'|$ , занимающий, однако, уже правый нижний угол. Как доказано выше, произведение  $|M||M'|$  является суммой некоторого количества членов определителя  $d'$ , взятых с теми же знаками, с какими они входят в  $d'$ . Однако определитель  $d'$  получен из определителя  $d$  путем

$$[(i_1+i_2+\dots+i_k) - (1+2+\dots+k)] + [(j_1+j_2+\dots+j_k) - (1+2+\dots+k)] = s_m - 2(1+2+\dots+k)$$

транспозиций строк и столбцов. Как мы знаем из свойств определителей, члены определителя  $d'$  отличаются от соответственных членов определителя  $d$  лишь знаком  $(-1)^{s_m}$  (четное число  $2(1+2+\dots+k)$  не будет влиять на знак). Отсюда следует, что произведение  $(-1)^{s_m} |M||M'|$  состоит из некоторого количества членов определителя  $d$ , взятых с такими же знаками, какие они имеют в этом определителе. Теорема доказана.

**Теорема 2.2.** (о разложении определителя). Определитель  $d$  равен сумме произведений всех элементов произвольной строки на их алгебраические дополнения:

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

Доказательство. Введём следующие обозначения: если  $a_{ij}$  – элемент определителя  $d$ , то через  $|M_{ij}|$  обозначим дополнительный минор этого элемента, т.е. минор  $(n-1)$ -го порядка, получающийся после вычеркивания из определителя  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

Далее, через  $A_{ij}$  обозначим алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ , т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|.$$

Как доказано в теореме 2.1, произведение  $a_{ij}A_{ij}$  является суммой нескольких членов определителя  $d$ , входящих в эту сумму с теми же знаками, с какими они входят в состав определителя. Легко подсчитать число этих членов: оно равно числу членов в миноре  $|M_{ij}|$ , т.е. равно  $(n-1)!$

Выбираем теперь любую  $i$ -ю строку определителя  $d$  и берем произведение каждого элемента этой строки на его алгебраическое дополнение:

$$a_{i1}A_{i1}, a_{i2}A_{i2}, \dots, a_{in}A_{in}. \quad (16)$$

Никакой член определителя  $d$  не может войти в состав двух разных из числа произведений (16): все члены определителя, входящие в произведение  $a_{i1}A_{i1}$ , содержат из  $i$ -й строки элемент  $a_{i1}$  и поэтому отличаются от членов, входящих в произведение  $a_{i2}A_{i2}$ , т.е. содержащих из  $i$ -й строки элемент  $a_{i2}$  и т.д.

С другой стороны, общее число членов определителя  $d$ , входящих во все произведения (16) есть:

$$(n-1)!n=n!$$

т.е. этим исчерпываются вообще все члены определителя  $d$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.3 (Лапласа).** Пусть в определителе  $d$  порядка  $n$  произвольно выбраны  $k$  строк (или  $k$  столбцов),  $1 \leq k \leq n-1$ . Тогда сумма произведений всех миноров  $k$ -го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения равна определителю  $d$ .

Доказательство. Произведение любого минора  $k$ -го порядка  $|M|$ , расположенного в выбранных строках, на его алгебраическое дополнение состоит из  $k!(n-k)!$  членов, так как минор  $k$ -го порядка  $|M|$  состоит из  $k!$  членов, а его алгебраическое дополнение, отличаясь, возможно, лишь знаком от минора порядка  $n-k$ , содержит  $(n-k)!$  членов. С другой стороны, число миноров  $k$ -го порядка, содержащихся в выбранных нами строках, равно числу

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Умножив  $k!(n-k)!$  на  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ , мы получаем, что сумма произведений всех

миноров  $k$ -го порядка из выбранных строк на их алгебраическое дополнение состоит из  $n!$  слагаемых. Таково же, однако, и общее число членов определителя  $d$ . Теперь остается доказать, что всякий член определителя  $d$  входит хотя бы один раз (а тогда и точно один раз) в рассматриваемую сумму произведений миноров на их алгебраические дополнения.

Пусть

$$a_{1\alpha}a_{2\beta} \dots a_{n\omega}, \quad (17)$$

произвольный член определителя  $d$ . Возьмем отдельно произведение тех элементов из этого члена, которые принадлежат к выбранным нами строкам с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$ . Это будет произведение

$$a_{i_1 \alpha_{i_1}} a_{i_2 \alpha_{i_2}} \dots a_{i_k \alpha_{i_k}}, \quad (18)$$

$k$  множителей стоящих в  $k$  различных столбцах, а именно, в столбцах с номерами  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$ . Эти номера столбцов вполне определяются, следовательно, заданием члена (17). Если мы обозначим через  $|M|$  минор  $k$ -го порядка, стоящий на пересечении столбцов с этими номерами  $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_k}$  и выбранных ранее строк с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , то произведение (18) будет одним из членов минора  $|M|$ , а произведение всех элементов из члена (17), не вошедших в (18), членом его дополнительного минора. Для того, чтобы получить взятый нами член определителя с тем знаком, какой он имеет в определителе, остается, заменить дополнительный минор алгебраическим дополнением. Теорема доказана.

**Следствие.** (об определителе с нулями в правом верхнем углу). Если  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы, то

$$\left| \begin{array}{c|ccc} & 0 & \dots & 0 \\ A & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & \dots & 0 \\ \hline C & & & B \end{array} \right| = |A||B|.$$

## 2.2. Контрольные вопросы

1. Что называется определителем матрицы  $n$ -го порядка?
2. Сколько членов содержит определитель 5-го порядка?
3. При каком значении  $i$  и  $j$  произведение:
  - $a_{13}a_{2i}a_{3j}a_{42}a_{55}$  входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
  - $a_{13}a_{2i}a_{31}a_{4j}a_{52}$  входит в определитель 5-го порядка со знаком "-";
  - $a_{12}a_{2i}a_{31}a_{43}a_{5j}$  входит в определитель 5-го порядка со знаком "+";
  - $a_{14}a_{25}a_{3i}a_{4j}a_{53}$  входит в определитель 5-го порядка со знаком "-".
4. С каким знаком входит побочная диагональ в определитель:
  - 1) 102 порядка; 2) 97 порядка; 3) 202 порядка; 4) 192 порядка?
5. В каких случаях определитель равен нулю?
6. При каких преобразованиях определитель не меняется или меняет лишь свой знак?
7. Чему равен определитель матриц вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

8. Что называется алгебраическим дополнением минора порядка  $r$ ?
9. Найти алгебраическое дополнение минора, расположенного: 1) в 2 и 4 строке, в 1 и 3 столбце; 2) в 1 и 3 строке, 2 и 4 столбце; в определителе

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

10. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
11. Теорема о разложении определителя по  $i$ -строке.
12. Разложить определитель:

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \text{ по 3 столбцу; } 2) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \text{ по 3 строке.}$$

13. Теорема Лапласа. Следствие.
14. Чему равна сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки?

### 2.3. Решения типовых примеров

Рассмотрим на примерах различные методы вычисления определителей  $n$ -го порядка.

#### 1. Метод приведения к треугольному виду.

Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

*Пример 1.* Вычислить определитель порядка  $n$

$$d = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим первую строку, умноженную на  $(-x)$  ко всем остальным. Согласно свойству 9 определитель при этом не меняется, а значит