$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & .a_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

8. Что называется алгебраическим дополнением минора порядка r?
9. Найти алгебраическое дополнение минора, расположенного: 1) в 2 и 4 строке, в 1 и 3 столбце; 2) в 1 и 3 строке, 2 и 4 столбце; в определителе

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

10. Теорема о произведении минора на его алгебраическое дополнение.
11. Теорема о разложении определителя по i-строке.
12. Разложить определитель:

1) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ по 3 столбцу; 2) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ по 3 строке.

13. Теорема Лапласа. Следствие.
14. Чему равна сумма произведений элементов одной строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки?

2.3. Решения типовых примеров

Рассмотрим на примерах различные методы вычисления определителей n-го порядка.

1. *Метод приведения к треугольному виду.*

Этот метод заключается в преобразовании определителя к такому виду, где все элементы, лежащие по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

Пример 1. Вычислить определитель порядка n

$$d=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим первую строку, умноженную на $(-x)$ ко всем остальным. Согласно свойству 9 определитель при этом не меняется, а значит

$$d=\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 1 & -x & 0 & \dots & 0 & 0\\ 1 & 0 & -x & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 0 & 0 & \dots & -x & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x\end{vmatrix}.$$

К первому столбцу прибавим все последующие столбцы, умноженные на $\frac{1}{x}$. Получим

$$d=\begin{vmatrix}\frac{n-1}{x} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ 0 & -x & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -x & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x\end{vmatrix}.$$

Мы получили треугольный вид, следовательно, определитель равен произведению элементов главной диагонали

$$d=(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix}2 & \dots & 2 & 2 & -1\\ 2 & \dots & 2 & -1 & 2\\ 2 & \dots & -1 & 2 & 2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & \dots & 2 & 2 & 2\end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первой строке все остальные, тогда в первой строке все элементы будут равны $2(n-1)-1=2n-3$. Затем, согласно свойству 5 общий множитель элементов первой строки можно вынесем за знак определителя, т.е.

$$d=(2n-3)\begin{vmatrix}1 & \dots & 1 & 1 & 1\\ 2 & \dots & 2 & -1 & 2\\ 2 & \dots & -1 & 2 & 2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ -1 & \dots & 2 & 2 & 2\end{vmatrix}.$$

Теперь воспользуемся тем, что в первой строке все элементы равны 1. Умножая первую строку на (–2) и прибавляя её ко всем остальным строкам, мы получим

$$d=(2n-3)\begin{vmatrix}1&\dots&1&1&1\\0&\dots&0&-3&0\\0&\dots&-3&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\-3&\dots&0&0&0\end{vmatrix}.$$

Побочная диагональ в определитель n-го порядка входит со знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (это легко проверить, если подсчитать число инверсий в подстановке $\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\n&n-1&n-2&\dots&1\end{pmatrix}$). Следовательно,

$$d=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(2n-3)(-3)^{n-1}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}-1}3^{n-1}(2n-3).$$

Пример 3. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix}1&2&3&\dots&n-1&n\\-2&2&0&\dots&0&0\\0&-3&3&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&-n&n\end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к (n–1)-му столбцу n-й, затем полученный (n–1)-й столбец прибавим к (n–2)-му, и т. д. Тогда получим определитель треугольного вида

$$d=\begin{vmatrix}\frac{n(n+1)}{2}&\frac{n(n+1)}{2}-1&\frac{n(n+1)}{2}-3&\dots&2n-1&n\\0&2&0&\dots&0&0\\0&0&3&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0&n\end{vmatrix}=n!\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. *Разложение определителя по строке (столбцу).*

Этот метод заключается в применении теоремы 2.2.

Пример 1. Вычислить определитель d разложением по третьей строке, если

$$d=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&-7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}.$$

Решение. Мы знаем, что имеет место, следующее разложение определителя по i-ой строке: $d=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$, где A_{ij}, $j=\overline{1,n}$ – алгебраические дополнения элементов i-ой строки определителя. В нашем случае формула принимает вид $d=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}+a_{34}A_{34}$, т.е. мы имеем следующее разложение:

$$d=5\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 1 & 2\\ 7 & -1 & 4\\ -6 & 1 & 2\end{vmatrix}+(-9)\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ -3 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -5 & 2\\ -3 & 7 & 4\\ 4 & -6 & 2\end{vmatrix}+$$

$$+(-7)\cdot(-1)^{3+4}\cdot\begin{vmatrix}2 & -5 & 1\\ -3 & 7 & -1\\ 4 & -6 & 1\end{vmatrix}.$$

Вычисляя полученные определители третьего порядка, получим

$$d=5\cdot(-6)+9\cdot 12+2\cdot(-54)+7\cdot(-3)=-51.$$

Пример 2. Вычислить разложением по первому столбцу определитель

$$d=\begin{vmatrix}3 & 9 & 5 & 6\\ 2 & -8 & -8 & -5\\ 2 & 5 & 5 & 4\\ 2 & 10 & 8 & 7\end{vmatrix}.$$

Решение. Прежде чем разложить определитель по столбцу, преобразуем его, заменяя в первом столбце три элемента нулями. Мы это делаем для того, чтобы упростить вычисления.

Прибавляя третью строку, умноженную на (–1) ко всем остальным, получим

$$d=\begin{vmatrix}1 & 4 & 0 & 2\\ 0 & -13 & -13 & -9\\ 2 & 5 & 5 & 4\\ 0 & 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Прибавляя к третьей строке первую, умноженную на (–2), получим

$$d=\begin{vmatrix}1 & 9 & 0 & 2\\ 0 & -13 & -13 & -9\\ 0 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по первому столбцу, содержащему лишь один, не равный нулю элемент (с суммой индексов 1+1=2, т. е. чётной), получим

$$d=\begin{vmatrix}-13 & -13 & -9\\ -3 & 5 & 0\\ 5 & 3 & 3\end{vmatrix}.$$

Преобразуем полученный определитель. Прибавляя к первой строке третью, умноженную на 3, получим

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель в третьем столбце содержит лишь один, не равный нулю элемент (с суммой индексов 3+3, т. е. чётной). Поэтому его удобно разложить по третьему столбцу:

$$d=3\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}=3(10–12)=–6.$$

Замечание 4. Для упрощения вычислений определитель следует разлагать по тем строкам или столбцам, в которых содержится наибольшее количество нулевых элементов. Если же в определителе нет нулевых элементов или же их мало, то нужно выбрать одну из строк (один из столбцов) и, применяя свойства определителя, преобразовать ее (его) так, чтобы в ней все элементы, кроме одного, стали равны нулю.

Пример 3. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \\ -n & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первому столбцу, тогда

$$d=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix}+(-1)^{1+n}(-n)\begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}.$$

В этом равенстве первый и второй определители имеют треугольный вид, поэтому первый определитель равен $n!$, а второй определитель равен произведению (–1)(–2). . . $(1–n)=(–1)^{n-1}(n–1)!$ Тогда получим: $d=n!+n!(-1)^{n+2+n-1}=n!\left(1+(-1)^{2n+1}\right)=0.$

3. *Теорема Лапласа.*

Согласно теореме Лапласа в определителе d порядка n нужно выбрать k строк (или k столбцов), $1\le k\le n–1$. Тогда определитель d будет равен сумме произведений всех миноров k–го порядка, содержащихся в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.

Замечание 5. Для упрощения вычислений выбирать нужно те строки или столбцы, в которых содержится наибольшее число нулевых элементов.

Пример 1. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выберем третью и четвёртую строки. В них находится единственный минор отличный от нуля, поэтому

$$d=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{3+4+4+5}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Воспользовавшись формулами для вычисления определителей второго и третьего порядков, получим d=– (12–12+16+27)= –43.

Пример 2. Вычислить, применяя теорему Лапласа, определитель

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 5 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Данный определитель имеет вид, указанный в следствии теоремы Лапласа. Поэтому мы можем воспользоваться этим следствием, и тогда

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}=-5,\quad |B|=\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & 5 \\ 0 & \ldots & 5 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 5 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-3}=\left(-1\right)^{\frac{(n-3)(n-4)}{2}}5^{n-3}.$$

Следовательно, $d=|A||B|=\left(-1\right)^{\frac{n^2-7n+14}{2}}5^{n-2}.$

4. *Метод выделения линейных множителей.*

Определитель рассматривается как многочлен от одной или нескольких входящих в него букв. Преобразуя его, обнаруживают, что он делится на ряд линейных множителей, а значит (если эти множители взаимно просты) и на их произведение. Сравнивая отдельные члены определителя с членами произведения линейных множителей, находят частное от деления определителя на это произведение и тем самым находят выражение определителя.

Пример. Вычислить определитель методом линейных множителей

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к первой строке вторую, умноженную на (–1), а к третьей – четвёртую, умноженную на (–1):

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся тем, что в первой строке и в третьей строке стоит лишь по одному неравному нулю элементу, и обнулим элементы стоящие во втором и третьем столбцах:

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке четвёртую, тогда

$$d=\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2-4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Из первой строки видно, что определитель делится на $x^2–1$, из второй строки видно, что определитель делится на 3, а из третьей строки видно, что он делится на $x^2–4$. Так как все эти множители взаимно просты, то определитель делится на их произведение $3(x^2–1)(x^2–4)$. В данном произведении член x^4 имеет знак «+», а в определителе он содержится со знаком «–», поэтому

$$d=–3(x^2–1)(x^2–4).$$

5. *Метод представления определителя в виде суммы определителей.*

Некоторые определители легко вычисляются путём разложения их в сумму определителей того же порядка относительно строк или столбцов (свойство 7).

Пример. Вычислить определитель

$$d=\begin{vmatrix} 2+a & 1 & a & a \\ 2+b & 2 & b & a \\ 2+c & 3 & c & a \\ 2+d & 4 & d & a \end{vmatrix}.$$

Решение. Элементы первого столбца являются суммами двух слагаемых, согласно свойству 7 это даёт возможность данный определитель представить как сумму двух определителей:

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a & a \\ 2 & 2 & b & a \\ 2 & 3 & c & a \\ 2 & 4 & d & a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a & a \\ b & 2 & b & a \\ c & 3 & c & a \\ d & 4 & d & a \end{vmatrix}.$$

В первом определителе первый и четвёртый столбцы пропорциональны, следовательно, он равен нулю. Во втором определителе первый и третий столбцы равны, следовательно, он тоже равен нулю. Таким образом, d=0.

6. *Метод изменения элементов определителя*

Этот метод основан на следующем свойстве: если ко всем элементам определителя D прибавить одно и то же число x, то определитель увеличится на произведение числа x на сумму алгебраических дополнений всех элементов определителя D.

$$D'=D+x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\ .$$

Таким образом, вычисление определителя D' сводится к вычислению определителя D и суммы его алгебраических дополнений. Этот метод применяют в тех случаях, когда путём изменения всех элементов определителя на одно и то же число он приводится к такому виду, в котором легко сосчитать алгебраические дополнения всех элементов.

Пример. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & x & a_n \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко всем элементам число ($-x$), тогда

$$D'=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3-x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n-x \end{vmatrix}.$$

Алгебраические дополнения элементов определителя D, не лежащих на главной диагонали, равны нулю. Остальные алгебраические дополнения имеют положительный знак, поскольку все суммы индексов чётные. В нашем случае формула принимает вид:

$$D'=(a_1-x)\dots(a_n-x),$$

$$-x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}=-x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x).$$

Тогда искомый определитель

$$D=D'-x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}=(a_1-x)\dots(a_n-x)+x\sum_{i=1}^{n}(a_1-x)\dots(a_{i-1}-x)(a_{i+1}-x)\dots(a_n-x)=$$

$$=x(a_1-x)(a_2-x)\dots(a_n-x)\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{a_1-x}+\dots+\frac{1}{a_n-x}\right].$$

7. *Метод рекуррентных соотношений*

Этот метод заключается в том, что данный определитель выражают, преобразуя и разлагая его по строке или столбцу, через определители того же вида, но более низкого порядка. Полученное равенство называется рекуррентным соотношением. Этот метод используется для вычисления определителей вида

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & \alpha+\beta & \beta & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}.$$

$D_n-(\alpha+\beta)D_{n-1}+\alpha\beta D_{n-2}=0$ или, в общем виде $D_n-pD_{n-1}+qD_{n-2}=0$, где $p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$.

Пусть рекуррентное соотношение имеет вид:

$$D_n=pD_{n-1}-qD_{n-2},\ n>2, \tag{19}$$

где p, q – постоянные не зависящие от n.

При $q=0$ D_n вычисляется как член геометрической прогрессии: $D_n=p^{n-1}D_1$; здесь D_1 – определитель первого порядка данного вида, т. е. элемент определителя D_n, стоящий в левом верхнем углу.

Пусть $q>0$ и α, β – корни квадратного уравнения $x^2-px+q=0$. Тогда $p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$ и равенство (5) можно переписать так:

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}) \qquad (20)$$

или

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}). \qquad (21)$$

Предположим сначала, что $\alpha\neq\beta$. По формуле $(n-1)$–го члена геометрической прогрессии находим из равенств (20) и (21):

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1) \text{ и } D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1).$$

Откуда

$$D_n=\frac{\alpha^{n-1}(D_2-\beta D_1)-\beta^{n-1}(D_2-\alpha D_1)}{\alpha-\beta}. \qquad (22)$$

Пусть теперь $\alpha=\beta$. Равенства (20) и (21) обращаются в одно и то же

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\alpha\,(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),$$

откуда

$$D_n-\alpha D_{n-1}=A\alpha^{n-2}, \qquad (23)$$

где $A=D_2-\alpha D_1$.

Заменяя здесь n на $n-1$, получим:

$$D_{n-1}-\alpha D_{n-2}=A\alpha^{n-3}, \text{ откуда } D_{n-1}=\alpha D_{n-2}+A\alpha^{n-3}.$$

Подставляя это выражение в равенство (23), найдём $D_n=\alpha^2 D_{n-2}+2A\alpha^{n-2}$. Повторяя тот же приём несколько раз, получим

$$D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2},$$

где $A=D_2-\alpha D_1$.

Пример 1. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений.

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первой строке, тогда

$$D_n=2(-1)^{1+1}D_{n-1}+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем равенстве разложим по первому столбцу, тогда D_n примет вид: $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. Значит $p=2$, $q=1$. Решая уравнение $x^2-2x+1=0$, находим α, β и придём к случаю, когда $\alpha=\beta$. Тогда по формуле $D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2}$, где $A=D_2-\alpha D_1$ находим, при $\alpha=1$, $D_n=D_1+(n-1)A$. В нашем случае $D_1=2$, $D_2=3$, тогда $A=3-2=1$. Следовательно, $D_n=2+(n-1)=n+1$.

Пример 2. Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$d=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая d по последней строке, получим

$$D_n=2(-1)^{n+n}D_{n-1}+(-1)^{n+(n-1)}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определитель в последнем равенстве разложим по $(n-1)$-му столбцу, тогда D_n примет вид: $D_n=2D_{n-1}-D_{n-2}$. Значит $p=2$, $q=1$. Решая уравнение $x^2-2x+1=0$, находим α, β и придём к случаю, когда $\alpha=\beta$. Тогда по формуле $D_n=\alpha^{n-1}D_1+(n-1)A\alpha^{n-2}$, где $A=D_2-\alpha D_1$ находим, при $\alpha=1$, $D_n=D_1+(n-1)A$. В нашем случае $D_1=3$, $D_2=-2$, тогда $A=-5$. Следовательно, $D_n=3+(n-1)(-5)=8-5n$.

8. Определитель Вандермонда

Определителем Вандермонда называется определитель вида

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^{\ 2} & a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \dots & a_n^{\ 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{\ n-1} & a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \dots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что при любом n определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i–a_j$, где $1\le j<i\le n$. Действительно при $n=2$ будет

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1.$$

Пусть наше утверждение уже доказано для определителей Вандермонда (n–1)-го порядка. Преобразуем определитель d следующим образом: к n-й (последней строке) прибавим (n–1)-ю, умноженную на ($–a_1$), затем к (n–1)-й прибавим (n–2)-ю, также умноженную на ($–a_1$), и т. д. Наконец ко второй строке прибавим первую, умноженную на ($–a_1$). Мы получим, что

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^{\ 2}-a_1a_2 & a_3^{\ 2}-a_1a_3 & \dots & a_n^{\ 2}-a_1a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{\ n-1}-a_1a_2^{\ n-2} & a_3^{\ n-1}-a_1a_3^{\ n-2} & \dots & a_n^{\ n-1}-a_1a_n^{\ n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по первому столбцу, мы придём к определителю (n–1)-го порядка; после вынесения из всех столбцов общих множителей за знак определителя он примет вид:

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^{\ 2} & a_3^{\ 2} & \dots & a_n^{\ 2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{\ n-1} & a_3^{\ n-1} & \dots & a_n^{\ n-1} \end{vmatrix}.$$

Последний множитель является определителем Вандермонда (n–1)-го порядка, т. е., по предположению, равен произведению всех разностей $a_i–a_j$ для $2\le j<i\le n$. Можно написать, следовательно, употребляя символ для обозначения произведения, что

$$d=(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\prod_{2\le i<j\le n}(a_i-a_j)=\prod_{1\le i<j\le n}(a_i-a_j).$$