2.4. Индивидуальные задания

Даны определители:

$$|A_1|=\begin{vmatrix} b & \dots & b & b & a \\ b & \dots & b & a & b \\ b & \dots & a & b & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & \dots & b & b & b \end{vmatrix},\ |A_2|=\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix},$$

$$|B_1|=\begin{vmatrix} i_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_{k+2} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_n & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},\ |B_2|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_k & \dots & 0 & 0 \\ i_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_{k+2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & i_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$|B_3|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & i_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & i_{k-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & i_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_{n-1} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},\ |B_4|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & i_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & i_{k-1} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i_k & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_{k+1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & i_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & i_n \end{vmatrix},$$

$$|B_5|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_2 & \dots & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & i_k \\ i_{k+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_{k+2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & i_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},\ |B_6|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & i_k \\ 0 & 0 & \dots & i_{k+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & i_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ i_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

$$|C_1|=\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_{n-1} & j_n \\ i_2 & -i_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_3 & -i_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i_n & -i_n \end{vmatrix},\ |C_2|=\begin{vmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{n-1} & j_n & j_{n+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & i_1 & -i_1 \\ 0 & 0 & \dots & i_2 & -i_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i_n & -i_n & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$|D_1|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & j_1 & i_1 \\ 0 & 0 & \dots & j_2 & i_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & i_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ j_{n-1} & i_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ i_n & 0 & \dots & 0 & 0 & j_n \end{vmatrix},\ |D_2|=\begin{vmatrix} i_1 & j_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i_2 & j_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & i_{n-1} & j_{n-1} \\ j_n & 0 & 0 & \dots & 0 & i_n \end{vmatrix},$$

$$|\mathrm{H}_1|=\begin{vmatrix} x+y & xy & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x+y & xy & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a & b \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c & d \end{vmatrix},\ |\mathrm{H}_2|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & d & xy & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{vmatrix},$$

$$|K_1|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix},\ |K_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},\ |K_3|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},\ |K_4|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

1. Вычислить определитель A_i, если:

1) i=1, a=1, b=2 2) i=2, a=1, b=3 3) i=1, a=1, b= –1 4) i=2, a=3, b=1
5) i=1, a=1, b=4 6) i=2, a=4, b=1 7) i=1, a=2, b=3 8) i=2, a=1, b=5
9) i=1, a=2, b=4 10) i=2, a=3, b=2 11) i=1, a=4, b=2 12) i=2, a=1, b=6
13) i=1, a=3, b=5 14) i=2, a=4, b=3 15) i=1, a=1, b=7 16) i=2, a=6, b=3
17) i=1, a=5, b=3 18) i=2, a=6, b=2 19) i=1, a=3, b=4 20) i=2, a=0, b=3
21) i=1, a=5, b=4 22) i=2, a=6, b=1 23) i=1, a=2, b=7 24) i=2, a=0, b=4
25) i=1, a=2, b=6 26) i=2, a=5, b=2 27) i=1, a=4, b=5 28) i=2, a=5, b=1
29) i=1, a=3, b=6 30) i=2, a=2, b=5

2. Вычислить определитель B_j, если:

1) j=1, k=2, n=30 2) j=2, k=1, n=40 3) j=3, k=3, n=20
4) j=4, k=4, n=30 5) j=5, k=5, n=25 6) j=6, k=6, n=20

7) j=1, k=6, n=30 8) j=2, k=5, n=40 9) j=3, k=4, n=34
10) j=4, k=3, n=33 11) j=5, k=2 12) j=6, k=10,
13) j=1, k=5, 14) j=2, k=2 15) j=3, k=3,
16) j=4, k=4 17) j=5, k=5 18) j=6, k=6, n=40
19) j=1, k=n-2 20) j=2, k=3, n=19 21) j=3, k=38, n=40
22) j=4, k=20, n=30 23) j=5, k=10, n=30 24) j=6, k=39, n=40
25) j=1, k=5, n=25 26) j=2, k=10, n=20 27) j=3, k=20, n=30
28) j=4, k=2, n=20 29) j=5, k=3, n=40 30) j=6, k=4, n=24

3-4. Вычислить определитель C_i, D_i если:

1) $i=1,\ i_k=1,\ k=\overline{1,n}$ 2) $i=2,\ j_k=3^k,\ k=\overline{1,n}$ 3) $i=1,\ j_k=k,\ i_k=1,\ k=\overline{1,n}$
4) $i=2,\ i_k=3,\ j_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 5) $i=1,\ i_k=k^2,\ j_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 6) $i=2,\ i_k=2^k,\ j_k=1,\ k=\overline{1,n}$
7) $i=1,\ i_k=3^k,\ k=\overline{1,n}$ 8) $i=2,\ i_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 9) $i=1,\ i_k=k^2,\ k=\overline{1,n}$
10) $i=2,\ i_k=2^k,\ k=\overline{1,n}$ 11) $i=1,\ j_k=n-k,\ k=\overline{1,n}$ 12) $i=2,\ j_k=1,\ k=\overline{1,n}$
13) $i=1,\ i_k=2k,\ k=\overline{1,n}$ 14) $i=2,\ i_k=3+k,\ k=\overline{1,n}$ 15) $i=1,\ i_k=k-1,\ k=\overline{1,n}$
16) $i=2,\ i_k=k+1,\ k=\overline{1,n}$ 17) $i=1,\ i_k=3k,\ k=\overline{1,n}$ 18) $i=2,\ j_k=3k,\ k=\overline{1,n}$
19) $i=1,\ j_k=j,\ k=\overline{1,n}$ 20) $i=2,\ j_k=2,\ k=\overline{1,n}$ 21) $i=1,\ j_k=k^2,\ k=\overline{1,n}$
22) $i=2,\ j_k=3^k,\ k=\overline{1,n}$ 23) $i=1,\ j_k=1,\ k=\overline{1,n}$ 24) $i=2,\ j_k=k+1,\ k=\overline{1,n}$
25) $i=1,\ i_k=j_k=k,\ k=\overline{1,n}$ 26) $i=2,\ i_k=j_k=k^2,\ k=\overline{1,n}$ 27) $i=1,\ i_k=j_k=k+1,\ k=\overline{1,n}$
28) $i=2,\ i_k=j_k=1,\ k=\overline{1,n}$ 29) $i=1,\ i_k=j_k=k-1,\ k=\overline{1,n}$ 30) $i=2,\ i_k=j_k=k^3,\ k=\overline{1,n}$

5. Вычислить определитель H_i, если:

1. i=1, x=1, y=2, a=1, b=2, c=1, d=2
2. i=2, x=1, y=1, a=2, b=3, c=1, d=2
3. i=1, x=1, y=3, a=2, b=3, c=2, d=2
4. i=1, x=1, y=2, a=1, b=3, c=1, d=2
5. i=2, x=2, y=3, a=1, b=2, c=1, d=3
6. i=1, x=2, y=3, a=1, b=2, c=3, d=1
7. i=1, x=2, y=1, a=2, b=3, c=1, d=2
8. i=2, x=3, y=2, a=1, b=2, c=2, d=1
9. i=1, x=2, y=3, a=1, b=2, c=1, d=1
10. i=2, x=2, y=1, a=1, b=1, c=2, d=3
11. i=1, x=3, y=1, a=1, b=0, c=2, d=3
12. i=2, x=3, y=4, a=2, b=1, c=0, d=3
13. i=1, x=3, y=3, a=1, b=4, c=1, d=2
14. i=2, x=3, y=1, a=2, b=0, c=1, d=3
15. i=1, x=2, y=2, a=1, b=3, c=0, d=1
16. i=2, x=2, y=4, a=2, b=0, c=1, d=3
17. i=1, x=2, y=1, a=4, b=1, c=0, d=2
18. i=2, x=2, y=5, a=3, b=3, c=1, d=2
19. i=1, x=2, y=5, a=1, b=3, c=1, d=1
20. i=2, x=2, y=3, a=1, b=2, c=1, d=3
21. i=1, x=4, y=-3, a=1, b=2, c=2, d=3
22. i=2, x=4, y=1, a=1, b=0, c=1, d=2
23. i=1, x=4, y=-2, a=3, b=1, c=2, d=0
24. i=2, x=5, y=-1, a=1, b=0, c=2, d=1
25. i=1, x=5, y=-2, a=1, b=1, c=3, d=2
26. i=2, x=5, y=-3, a=1, b=4, c=2, d=3
27. i=1, x=-1, y=1, a=1, b=3, c=1, d=2
28. i=2, x=-1, y=3, a=0, b=1, c=3, d=2
29. i=1, x=-1, y=2, a=1, b=2, c=3, d=1
30. i=2, x=-2, y=1, a=1, b=1, c=3, d=2

6. Вычислить определитель K_i, разлагая по j-ой строке в нечётных вариантах, по j-му столбцу в чётных вариантах, если:

1) i=1, j=1	2) i=1, j=1	3) i=2, j=1	4) i=2, j=1	5) i=3, j=1	6) i=3, j=1
7) i=1, j=2	8) i=1, j=2	9) i=2, j=2	10) i=2, j=2	11) i=3, j=2	12) i=3, j=2
13) i=4, j=3	14) i=4, j=3	15) i=2, j=3	16) i=2, j=3	17) i=3, j=3	18) i=3, j=3
19) i=1, j=4	20) i=1, j=4	21) i=2, j=4	22) i=2, j=4	23) i=3, j=4	24) i=3, j=4
25) i=4, j=1	26) i=4, j=1	27) i=4, j=2	28) i=4, j=2	29) i=4, j=3	30) i=4, j=3

3. Матрицы и системы линейных уравнений

3.1. Основные понятия и теоремы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$, т.е. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ или, коротко, $A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$.

<u>Определение</u> 3.1. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется ее рангом.

Имеется правило вычисления ранга матрицы (метод окаймляющих миноров): при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка $|M|$, отличный от нуля, то вычисляют лишь миноры (k+1)-порядка, окаймляющие минор $|M|$, и если все они равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Также ранг матрицы можно вычислить приведением к ступенчатому виду.

<u>Определение</u> 3.2. Ступенчатой называется матрица A, обладающая следующими свойствами:

1) если k-я строка нулевая, то (k+1)-я строка также нулевая.
2) Если первые ненулевые элементы k-й и (k+1)-й строк располагаются в столбцах с номерами l_k и l_{k+1} соответственно, то $l_k < l_{k+1}$.

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от первого ненулевого элемента какой-нибудь строки, являются нулями. Происхождение названия нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу: