6. Вычислить определитель K_i, разлагая по j-ой строке в нечётных вариантах, по j-му столбцу в чётных вариантах, если:

1) i=1, j=1	2) i=1, j=1	3) i=2, j=1	4) i=2, j=1	5) i=3, j=1	6) i=3, j=1
7) i=1, j=2	8) i=1, j=2	9) i=2, j=2	10) i=2, j=2	11) i=3, j=2	12) i=3, j=2
13) i=4, j=3	14) i=4, j=3	15) i=2, j=3	16) i=2, j=3	17) i=3, j=3	18) i=3, j=3
19) i=1, j=4	20) i=1, j=4	21) i=2, j=4	22) i=2, j=4	23) i=3, j=4	24) i=3, j=4
25) i=4, j=1	26) i=4, j=1	27) i=4, j=2	28) i=4, j=2	29) i=4, j=3	30) i=4, j=3

3. Матрицы и системы линейных уравнений

3.1. Основные понятия и теоремы

Рассмотрим матрицу A размера $m\times n$, т.е. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ или, коротко, $A=\left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$.

Определение 3.1. Наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A называется ее рангом.

Имеется правило вычисления ранга матрицы (метод окаймляющих миноров): при вычислении ранга матрицы следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка $|M|$, отличный от нуля, то вычисляют лишь миноры (k+1)-порядка, окаймляющие минор $|M|$, и если все они равны нулю, то ранг матрицы A равен k.

Также ранг матрицы можно вычислить приведением к ступенчатому виду.

Определение 3.2. Ступенчатой называется матрица A, обладающая следующими свойствами:

1) если k-я строка нулевая, то (k+1)-я строка также нулевая.
2) Если первые ненулевые элементы k-й и (k+1)-й строк располагаются в столбцах с номерами l_k и l_{k+1} соответственно, то $l_k<l_{k+1}$.

Наглядно эти свойства означают, что ниже нулевой строки могут располагаться лишь нулевые строки, а все элементы, располагающиеся влево и вниз от первого ненулевого элемента какой-нибудь строки, являются нулями. Происхождение названия нетрудно объяснить, рассматривая, например, ступенчатую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Определение</u> 3.3. Элементарными преобразованиями строк (столбцов) матриц называются следующие виды преобразований:

1. Перемена местами двух строк (столбцов) матрицы.
2. Прибавление к какой-либо строке (столбцу) матрицы другой ее строки (столбца), умноженной на некоторое число.
3. Умножение некоторой строки (столбца) на отличное от нуля число.

<u>Теорема</u> 3.1. Всякую матрицу конечным числом элементарных преобразований строк (столбцов) можно превратить в ступенчатую матрицу.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу строк матрицы. Если имеется всего одна строка, то матрица уже ступенчатая, ибо оба условия, входящие в определение ступенчатой матрицы, выполнены тривиальным образом (ввиду отсутствия второй строки). Пусть теперь матрица A содержит m строк, где $m \geq 2$. Предположим, что матрицу с числом строк, меньшим m, можно привести к ступенчатому виду. Если матрица A состоит из нулей, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть хоть один ненулевой элемент. Ненулевой элемент располагается в какой-то строке. Значит, в нашей матрице есть ненулевые строки. Выберем ту, в которой первый ненулевой элемент располагается в столбце с наименьшим номером, скажем, с номером k_1. Применив преобразование первого типа, перенесем эту строку на первое место. Тогда матрица A примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{1k_1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{2k_1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{mk_1} & \ldots \end{pmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования второго типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\frac{b_{2k_1}}{b_{1k_1}}$, к третьей строке – первую, умноженную на $-\frac{b_{3k_1}}{b_{1k_1}}$ и так далее. После применения m–1 таких элементарных преобразований добьемся того, что в k_1-м столбце всюду, кроме первой строки, будут нули:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Отбросим первую строку. Оставшаяся матрица имеет m-1 строку. По индуктивному предположению ее можно привести к ступенчатому виду

$$G=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & D \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть первые ненулевые элементы строк ступенчатой матрицы G располагаются в столбцах с номерами k_2, … , k_r. Тогда $k_2<\dots<k_r$, по определению ступенчатой матрицы. Но осуществляя элементарные преобразования уменьшенной матрицы, можно считать, что мы делаем элементарные преобразования матрицы C, не использующие первой строки. Поскольку при выполнении этих элементарных преобразований нули, стоявшие в первых k_1 столбцах матрицы C, не могли исчезнуть, то $k_1<k_2$. Таким образом, мы получили матрицу

$$H=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & D \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

удовлетворяющую второму свойству определения ступенчатой матрицы. Если же в H имеется нулевая строка, то она не совпадает с первой строкой, так как $b_{1k_1}\neq 0$, и, значит, лежит в матрице G. Но G ступенчатая. Следовательно, ниже нулевой строки лежат нулевые строки. Таким образом, H – ступенчатая матрица. Теорема доказана.

Теорема 3.2. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то от B к A также можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк.

Доказательство. Если для перехода от A к B использовано одно элементарное преобразование первого типа, то утверждение очевидно. Допустим, что от A к B перешли, используя одно элементарное преобразование второго типа, т. е.

(i-я строка в B)=(i-я строка в A)+λ(j-я строка в A),

а каждая из остальных строк матрицы B совпадает с соответствующей строкой матрицы A. Таким образом, $b_{ik}=a_{ik}+\lambda a_{jk}$ для каждого номера k. Если теперь к i-й строке матрицы B прибавить ее j-ю строку, умноженную на $(-\lambda)$, то в получившейся после этого матрице на месте i-ой строки и k-го столбца окажется элемент

$$b_{ik}+(-\lambda)b_{jk}=(a_{ik}+\lambda a_{jk})+(-\lambda a_{jk})=a_{ik}.$$

Поскольку элементы получившейся матрицы, расположенные в строках, отличных от i-й, совпадают с соответствующими элементами матрицы A, то и вся она совпадает с A, так что справедливость теоремы в случае применения одного элементарного преобразования полностью доказана. Допустим теперь, что переход от A к B осуществлен с использованием t элементарных преобразований, где $t>1$. Обозначим через C матрицу, возникшую после применения первого из этих элементарных преобразований. Тогда от C к B перешли, используя t-1 элементарное преобразование. В силу индуктивного предположения, используя элементарные преобразования, можно перейти от B к C, а, как установлено в начале доказательства, точно так же можно перейти и от C к A. Таким образом, применение элементарных преобразований позволяет перейти от B к A, что и требовалось. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.3. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Сначала будет доказана следующая лемма.

<u>Лемма</u>. Если от матрицы A к матрице B можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то (ранг B)$\leq$(ранг A).

Доказательство леммы будем вести индукцией по числу примененных элементарных преобразований. Допустим, что использовано только одно элементарное преобразование. Пусть (ранг A)=r. Для доказательства достаточно убедиться, что всякий минор $|M|$ матрицы B порядка, больше чем r, равен нулю. Если от матрицы A к матрице B перешли переменой местами двух строк, то матрица M либо совпадает с некоторой подматрицей M^* матрицы A, порядок которой больше чем r, либо отличается от такой подматрицы M^* только порядком строк. Поскольку (ранг A)=r, то $|M^*|$=0, а значит $|M| = \pm|M^*| = 0$ (от перестановки местами строк определитель меняет лишь свой знак). Далее допустим, что переход к матрице B осуществлен прибавлением к i-й строке матрицы A ее j-й строки, умноженной на λ. Возможны три случая: 1) i-я строка не проходит через подматрицу M; 2) как i-я, так и j-я строки проходят через подматрицу M; 3) i-я строка проходит через подматрицу M, а j-я не проходит. В первом случае подматрица M совпадает с соответствующей подматрицей матрицы A и, следовательно, $|M|$=0. Во втором случае имеем

$$|M|=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1}+\lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_s}+\lambda a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0,$$

так как последний определитель является минором матрицы *A*. В третьем случае запишем

$$|M|=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1}+\lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_1}+\lambda a_{js} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_1} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{jk_1} & \dots & \lambda a_{js} \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Но первый из этих определителей является минором матрицы *A*, а второй лишь порядком строк отличается от некоторого минора матрицы *A*. Следовательно, оба этих определителя равны нулю, откуда $|M|$=0. Таким образом, когда использовано лишь одно элементарное преобразование, лемма доказана. Допустим, что использовано *m* преобразований. Пусть *C* – матрица, полученная после осуществления $m-1$ преобразования. Учитывая индуктивное предположение, имеем

(ранг *B*)$\le$(ранг *C*) $\le$(ранг *A*),

что и требовалось. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.3. Допустим, что от матрицы *A* к матрице *B* перешли конечным числом элементарных преобразований. Ввиду леммы (ранг *B*)$\le$(ранг *A*). Но если элементарные преобразования позволяют перейти от *A* к *B*, то, согласно теореме 3.2, от *B* к *A* также можно перейти конечным числом элементарных преобразований. Применяя еще раз лемму, получаем, что (ранг *A*)$\le$(ранг *B*). Нужное равенство сразу следует из полученных неравенств. Теорема доказана.

Теорема 3.4. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Доказательство. Пусть ступенчатая матрица *A* содержит *r* ненулевых строк. Тогда, отметив ненулевые строки и столбцы, в которых располагаются первые ненулевые элементы этих строк, получим треугольную матрицу. Ее определитель равен произведению диагональных элементов, отличных от нуля, и, следовательно, отличен от нуля, так что матрица *A* содержит ненулевой минор порядка *r*. Всякий же минор большего порядка содержит нулевую строку и поэтому обращается в нуль. Таким образом, (ранг *A*)=*r*. Теорема доказана.

Теорема 3.5. Ранг матрицы не меняется при транспонировании: (ранг *A*)=(ранг A').

Доказательство. Пусть (ранг A)=r. Рассмотрим в матрице A' произвольный минор порядка s>r. Пусть он является определителем подматрицы M. Тогда M' – подматрица матрицы A. Поскольку ее порядок больше r, то минор $|M'|$=0, а значит, и $|M|$=0. Таким образом, все миноры матрицы A', порядок которых больше r, обращаются в нуль. Следовательно, (ранг A')$\le r$=(ранг A). Это же неравенство для матрицы A дает (ранг A)=(ранг A'')$\le$(ранг A'). Таким образом, (ранг A)=(ранг A'). Теорема доказана.

Далее рассмотрим основные действия (алгебраические операции) над матрицами.

Матрицы одного и того же размера можно складывать, причем если $A=\|a_{ij}\|$ и $B=\|b_{ij}\|$, то $A+B=\|a_{ij}+b_{ij}\|$ $(i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n})$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Любую матрицу можно умножить на число, при этом каждый элемент матрицы нужно умножить на это число.

В частности, $2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрицу размера $m\times n$ можно умножить на матрицу размера $n\times k$.

<u>Определение</u> 3.4. Произведением матрицы $A=\|a_{ij}\|$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ на матрицу $B=\|b_{jk}\|$ $(j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p})$ называется такая матрица $C=\|c_{ik}\|$ $(i=\overline{1,m},$ $k=\overline{1,p})$, для которой каждый ее элемент c_{ik} из i–й строки и k–го столбца находится по формуле:

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\,.$$

Произведение A на B обозначается AB.

Из определения произведения матриц A и B вытекает:

1) матрицу A лишь тогда можно умножить на матрицу B, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) матрица произведения AB имеет столько строк, сколько первый сомножитель (матрица A), и столбцов столько, сколько их имеет второй сомножитель (матрица B).

Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, т.е. $AB\neq BA$. Равенство $AB=BA$ может выполняться лишь тогда, когда A и B – квадратные матрицы одинаковых порядков, однако оно может оказаться неверным уже для квадратных матриц второго порядка.

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \text{т.е.}\quad AB\neq BA.$$

<u>Теорема</u> 3.6. $(AB)C=A(BC)$ и $(AB)'=B'A'$.

Доказательство. Сначала убедимся, что из существования левой части каждого из этих равенств следует существование правой и наоборот. Например, если существует произведение $(AB)C$, то матрицы A и B имеют размеры $m\times n$ и $n\times p$ соответственно. Но тогда AB имеют размеры $m\times p$, откуда вытекает, что матрица C должна иметь размеры $p\times q$. После этого ясно, что произведение BC существует и имеет размерность $n\times q$. Но тогда существует и произведение $A(BC)$. При этом как $(AB)C$, так и $A(BC)$ имеют размеры $m\times q$. Далее полагаем $U=AB$, $V=BC$, $S=(AB)C$, $T=A(BC)$ и убеждаемся, что

$$s_{ij}=\sum_{l=1}^{p}u_{il}c_{lj}=\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}a_{ik}b_{kl}c_{lj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{p}b_{kl}c_{lj}\right)=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}v_{kj}=t_{ij}\,.$$

Этим доказано первое равенство. При этом мы используем следующую общеупотребительную символику. Всякая сумма вида $a_1+a_2+\ldots+a_n$ обозначается через $\sum_{i=1}^{n}a_i$. Если же рассматривается сумма, слагаемые которой a_{ij} снабжены двумя индексами, причем $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, m$, то можно сначала взять суммы элементов с фиксированным первым индексом, т.е. суммы $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}$, где $i=1, 2, \ldots, n$, а затем сложить все эти суммы. Мы получим тогда для суммы всех элементов a_{ij} запись $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$.

Можно было бы, однако, вначале складывать слагаемые a_{ij} с фиксированным вторым индексом, а затем уже складывать полученные суммы. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\,,$$

т.е. в двойной сумме можно менять порядок суммирования.

Для доказательства второго положим $C=AB$ и $D=B'A'$. Тогда

$$c'_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a'_{kj}b'_{ik}=\sum_{k=1}^{n}b'_{ik}a'_{kj}=d_{ij}\,,$$

что и требовалось. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.7. Умножение матрицы A слева (справа) на диагональную матрицу

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

равносильно умножению строк (столбцов) матрицы A на элементы $d_1, d_2, \dots, d_n$ соответственно.

Доказательство. Если $DA=C$, то $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} d_{ik}a_{kj}=d_{ii}a_{ij}=d_i a_{ij}$ для каждого i. Утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично. Теорема доказана.

Следствие. Если

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

то $AE=A$ и $EB=B$ всякий раз, когда умножение возможно.

Определение 3.5. Назовем элементарными матрицы, полученные из матрицы E применением одного элементарного преобразования. Это будут матрицы вида:

$$S(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & & & & \\ . & & 1 & & & & & & & & \\ . & & & 0 & . & . & . & 1 & & & \\ . & & & . & 1 & & & . & & & \\ . & & & . & & \dots & & . & & & \vdots \\ . & & & . & & & 1 & . & & & \\ . & & & 1 & . & . & . & 0 & & & \\ . & & & & & & & & 1 & & \\ . & & & & & & & & & \dots & \\ 0 & & & & & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T(i,j,\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & & 0 \\ & \dots & & & & & \\ & & 1 & \dots & \lambda & & \\ \vdots & & . & \dots & . & & \vdots \\ & & 0 & . & 1 & & \\ & & & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \dots & & 0 \\ & \dots & & & & \\ & & \lambda & & & \\ \vdots & & & \dots & & \vdots \\ & & & & 1 & \\ & & & & \dots & \\ 0 & & & \dots & & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.8. Умножение матрицы A на матрицу $S(i, j)$ слева (справа) равносильно перемене местами i-й и j-й строк (i-го и j-го столбцов).

Доказательство. Положив $C=S(i,j)A$, будем иметь

$$c_{pq}=\sum_k s_{pk}a_{kq}=\begin{cases} s_{ij}a_{jq}=a_{jq}, \text{ если } p=i \\ s_{ji}a_{iq}=a_{iq}, \text{ если } p=j \\ s_{pp}a_{pq}=a_{pq}, \text{ если } p\neq i,j \end{cases}$$

утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.9. Умножение матрицы A на матрицу $T(i,\ j,\ \lambda)$ слева (справа) равносильно прибавлению к i-й строке (j-му столбцу) матрицы A ее j-й строки (i-го столбца), умноженной на λ.

Доказательство. Положив $C=T(i, j, \lambda)A$, будем иметь

$$c_{pq} = \sum_k t_{pk} a_{kq} = \begin{cases} t_{ii}a_{iq} + t_{ij}a_{jq} = a_{iq} + \lambda a_{jq}, \text{ если } p = i \\ t_{pp}a_{pq} = a_{pq}, \text{ если } p \neq i \end{cases}.$$

Утверждение, касающееся столбцов, доказывается аналогично. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.10. Ранг произведения двух матриц не превышает ранга каждого сомножителя: (ранг AB)$\leq$(ранг A), (ранг B).

Доказательства. Допустим, что матрица A имеет размеры $m\times n$, а B – размеры $n\times p$. Докажем сначала, что (ранг AB) $\leq$ (ранг A). Это очевидно, если (ранг A)=m, ибо матрица AB имеет размеры $m\times p$. Если же (ранг A)=$r<m$, то приведем матрицу A к ступенчатому виду S, используя элементарные преобразования строк. Ввиду теорем 3.8 и 3.9 можем записать

$$S=U_k\ldots U_1A,$$

где $U_1, \ldots ,U_k$ – элементарные матрицы. Но тогда

$$SB= U_k\ldots U_1AB$$

и теоремы 3.8 и 3.9 позволяют заключить, что от матрицы AB к матрице SB можно перейти, осуществляя элементарные преобразования строк. В силу теоремы 3.3

$$(\text{ранг } SB)\leq(\text{ранг } AB).$$

Далее, из теорем 3.3 и 3.4 вытекает, что все строки матрицы S, начиная с (r+1)-й, нулевые. Простой подсчет показывает, что то же самое верно и для строк матрицы SB. Следовательно,

$$(\text{ранг } AB)=(\text{ранг } SB)\leq r=(\text{ранг } A).$$

Теперь, учитывая теоремы 3.5 и 3.6, а также доказанное неравенство, получаем

$$(\text{ранг } AB)=(\text{ранг } (AB)')=(\text{ранг } (B'A'))\leq(\text{ранг } B')=(\text{ранг } B).$$

Теорема доказана.

<u>Определение</u> 3.6. Матрицы A и B, для которых выполняется равенство $AB=BA$, называются перестановочными.

<u>Определение</u> 3.7. Пусть A – квадратная матрица. Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A, если $AA^{-1}= A^{-1}A=E$.

Обратная матрица существует только для невырожденных матриц. Данное утверждение следует из следующей теоремы.

<u>Теорема</u> 3.11. Если A – квадратная матрица порядка n и $|A|\neq 0$, то существует одна и только одна матрица B такая, что $AB=BA=E$.

Доказательство. Пусть $|A| \neq 0$, т.е. (ранг A)=n. Производя элементарные преобразования над строками, можно от матрицы A перейти к некоторой диагональной матрице D. Ввиду теорем 3.8 и 3.9

$$D= U_k\ldots U_1A,$$

где U_1, … ,U_k – элементарные матрицы. С другой стороны, согласно теореме 3.4, имеем

$$(\text{ранг } D)=(\text{ранг } A)=n,$$

т.е. $|D| \neq 0$. Следовательно,

$$|D|=\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n \end{vmatrix},$$

где все d_i отлично от нуля. Положим

$$|U|=\begin{vmatrix} d_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_n^{-1} \end{vmatrix}$$

и $B=UU_1\ldots U_k$. Отсюда получим, что $BA=UU_k\ldots U_1A=UD=E$. Кроме того, $|A'| \neq 0$ и в силу доказанного $CA'=E$ для некоторой матрицы C. Ввиду теоремы 3.6 имеем $AC'=(CA')'=E'=E$. Отсюда $B=BE=B(AC')=(BA)C'=EC'=C'$, т.е. $AB=E=BA$.

Теперь докажем единственность обратной матрицы. Если $AX=E=XA$ для какой-нибудь матрицы X, то

$$X=XE=XAB=EB=B,$$

Чем доказывается единственность матрицы B. Теорема доказана.

Замечание 1. Рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 3.11,можно использовать и для получения следующего способа вычисления обратной матрицы: приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу A к единичной, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей A^{-1}: $(E|A) \to (A^{-1}|E)$.

Замечание 2. Обратную матрицу также можно найти по формуле:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

где через A_{ij} обозначено алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице A (напомним, что алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется произведение $(-1)^{i+j}|M|$, где $|M|$ – определитель матрицы, полученной из элементов матрицы А, после вычеркивания i строки и j столбца – дополнительный минор к минору первого порядка a_{ij}).

Теорема 3.12. Если A и B – квадратные матрицы, то $|AB|=|A||B|$.

Доказательство. Допустим сначала, что $|A|=0$. Ввиду теоремы 3.10 (ранг AB)$\leq$(ранг A)<(порядок A)=(порядок AB). Следовательно, $|AB|=0=|A||B|$, что и требовалось доказать. Теперь можно считать, что $|A|\neq 0$. Допустим, что матрица A является диагональной, т.е.

$$A=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая теорему 3.7 и свойство 5 определителя, получаем

$$|AB|=\begin{vmatrix} d_1b_{11} & d_1b_{12} & \dots & d_1b_{1n} \\ d_2b_{21} & d_2b_{11} & \dots & d_2b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_nb_{n1} & d_nb_{n2} & \dots & d_nb_{nn} \end{vmatrix}=d_1\dots d_n|B|=|A||B|.$$

Переходя к общему случаю, вспомним, что элементарными преобразованиями строк матрицу A с ненулевым определителем можно привести к диагональному виду D. При этом $|A|=(-1)^k|D|$, где k – число осуществленных при этом приведении перемен местами строк. В силу теорем 3.8 и 3.9 имеем $D=UA$, где U – произведение элементарных матриц. Если к матрице AB применить те же самые элементарные преобразования, то получим матрицу $U(AB)$, причем $|U(AB)|=(-1)^k|AB|$. Учитывая, что в случае диагональной матрицы A теорема верна, имеем $|AB|=(-1)^k|U(AB)|=(-1)^k|DB|=(-1)^k|D||B|=|A||B|$, что и требовалось. Теорема доказана.

Следствие. Если $|A|=0$, то матрица A не имеет обратной.

Доказательство. Действительно, если $|A|=0$ и $AB=E$, то $0=|A||B|=|AB|=|E|=1$, что невозможно.

Матрицы используют при изучении систем линейных уравнений.

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где a_{ij}, b_j – некоторые числа, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица, состоящая из коэффициентов при неизвестных, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов. Тогда систему (1) можно записать в виде следующего матричного уравнения: $AX=B$.

Системе (1) можно сопоставить две матрицы – A и $\tilde{A}=(A|B)$, при этом матрицу A называют основной матрицей системы (1), а $\tilde{A}$ – расширенной матрицей.

Отметим, что расширенная матрица получается из основной A добавлением столбца свободных членов B, при этом мы просто проводим вертикальную черту, чтобы отделить A от B. Например, для системы $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_4 = 3 \end{cases}$ основная и расширенная матрицы соответственно имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

<u>Определение</u> 3.8. Решением системы линейных уравнений (1) называется такой упорядоченный набор n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что каждое из уравнений (1) обращается в тождество после замены в нем неизвестных x_i соответствующими числами α_i.

<u>Определение</u> 3.9. Система линейных уравнений, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной. В противном случае она называется несовместной.

<u>Определение</u> 3.10. Совместная система называется определенной, если она обладает одним единственным решением, и неопределенной, если решений будет бесконечно много.

<u>Определение</u> 3.11. Две системы линейных уравнений называются эквивалентными, если всякое решение первой системы является решением второй системы и наоборот.

<u>Определение</u> 3.12. Будем называть элементарными преобразованиями системы (1):

- перестановку двух уравнений местами;
- прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число;
- умножение обеих частей любого уравнения на число, отличное от нуля.

Применяя к системе (1) указанные преобразования, мы практически работаем с расширенной матрицей системы, т.е. мы выполняем элементарные преобразования строк в матрице $\tilde{A}$. Можно менять и столбцы местами, но при этом не забывать, что в уравнениях системы поменялись местами слагаемые (неизвестные). Это единственное преобразование, которое можно применить к столбцам в этом случае.

<u>Теорема</u> 3.13. Если от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то соответствующие системы линейных уравнений эквивалентны.

Предварительно докажем следующую лемму.

<u>**Лемма**</u>. Если от матрицы $\tilde{A}$ к матрице $\tilde{B}$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований строк, то всякое решение системы, соответствующей матрице $\tilde{A}$, служит решением системы, соответствующей матрице $\tilde{B}$.

Доказательство. Ясно, что лемму достаточно доказать для случая, когда применяется одно элементарное преобразование, ибо переход к общему случаю легко осуществляется индукцией. Если применено элементарное преобразование первого типа, т.е. переставлены местами строки, наши уравнения только меняются местами. Конечно, старые решения по-прежнему будут им удовлетворять. При элементарных преобразованиях второго типа к i-й строке прибавляем j-ю строку, умноженную на λ. Следовательно, i-я строка матрицы $\widetilde{B}$ имеет вид

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1},\ \dots,\ a_{in}+\lambda a_{jn}|\ b_i+\lambda b_j).$$

Пусть $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n)$ – решение системы с матрицей $\widetilde{A}$, т.е. решение каждого из ее уравнений. Будет ли оно решением системы с матрицей $\widetilde{B}$? Сомнение может вызвать только i-е уравнение этой системы. Но

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1+\ldots+(a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n=(a_{i1}\alpha_1+\ldots+a_{in}\alpha_n)+\lambda(a_{j1}\alpha_1+\ldots+a_{jn}\alpha_n)=B_i+\lambda B_j.$$

Переходя к доказательству теоремы, заметим согласно лемме каждое решение системы $\widetilde{A}$ (т.е. системы, соответствующей матрице $\widetilde{A}$) служит решением системы $\widetilde{B}$. С другой стороны, в силу теоремы 3.2 от матрицы $\widetilde{B}$ к матрице $\widetilde{A}$ можно перейти с помощью элементарных преобразований. Следовательно, применив лемму еще раз, видим, что каждое решение системы $\widetilde{B}$ служит решением системы $\widetilde{A}$. Таким образом, эти системы эквивалентны. Теорема доказана.

Вывод: если к системе (1) будут несколько раз применены элементарные преобразования (из определения 3.12), то вновь полученная система уравнений остается эквивалентной исходной системе (т.е. они или обе несовместны, или же обе совместны и обладают одними и теми же решениями).

Пусть ранг основной матрицы A системы (1) равен r и ступенчатая матрица, к которой приводится матрица $\widetilde{A}$ с помощью к.ч.э.п. строк (см. теореме 3.1.), имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1r} & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r} & a'_{2,r+2} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & a'_{rr} & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right), \qquad (2)$$

где $a'_{ii}\neq 0,\ i=\overline{1,r}$.

Замечание 3. Первые ненулевые элементы строк ступенчатой матрицы необязательно должны стоять на главной диагонали, но в данном случае для простоты рассуждений и выкладок мы их разместили именно так.

Согласно теореме 3.13 система (1) эквивалентна системе линейных уравнений от n неизвестных, задаваемой матрицей (2). Поэтому далее вместо системы (1) будем исследовать эквивалентную ей ступенчатую систему с расширенной матрицей (2).

Пусть нам дана ступенчатая система линейных уравнений от n неизвестных (эквивалентная системе (1)), задаваемая матрицей (2). Возможны следующих два случая: $b'_{r+1} \neq 0$ или $b'_{r+1} = 0$.

Пусть $b'_{r+1} \neq 0$. Тогда r+1-ое уравнение системы имеет вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b'_{r+1}$, и так как $b'_{r+1} \neq 0$, система будет несовместной. Заметим, что в данном случае ранг расширенной матрицы системы равен r+1, а основной матрицы – r.

Пусть $b'_{r+1} = 0$. Тогда рассмотрим следующие два случая: $r = n$ или $r < n$.

Допустим, что $r = n$. Следовательно, расширенная матрица системы будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right), \ (a'_{ii} \neq 0, \ i = \overline{1,n}). \qquad (3)$$

И в этом случае система будет иметь единственное решение, так как матрицу (3) с помощью к.ч.э.п. строк можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_n \end{array}\right), \qquad (4)$$

а значит, решением системы будет строка ($\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$).

Пусть теперь $r < n$. В этом случае, применив к матрице (2) к.ч.э.п. строк, мы можем привести ее к виду

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_{1,r+1} & \ldots & -\alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_{2,r+2} & \ldots & -\alpha_{2n} & \beta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{r,r+1} & \ldots & -\alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad (5)$$

Следовательно, $x_1 = \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + ..\alpha_{1n}x_n + \beta_1$, $x_2 = \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + ..\alpha_{2n}x_n + \beta_2$, … , $x_r = \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + ..\alpha_{rn}x_n + \beta_r$, где $x_{r+1}, \ x_{r+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения. Придавая неизвестным $x_{r+1}, \ x_{r+2}, \ldots, x_n$ всевозможные значения, мы найдем все решения рассматриваемой системы. Тогда, говорят, что общее решение системы имеет вид

$(\alpha_{1,r+1}x_{r+1} + ...\alpha_{1n}x_n + \beta_1,\ \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + ...\alpha_{2n}x_n + \beta_2,\ \dots,\ \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + ...\alpha_{rn}x_n + \beta_r,\ x_{r+1},\ x_{r+2}, ..., x_n)$, при этом неизвестные $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_r$ объявляются главными, а $x_{r+1},\ x_{r+2}, ..., x_n$ – свободными. Таким образом, в случае $r < n$ система в данном случае является неопределенной.

Отметим, что в случае $r = n$ свободных неизвестных нет, все неизвестные – главные.

<u>Теорема</u> 3.14 (Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы.

Доказательство. Как уже было замечено согласно теоремам 3.1 и 3.13, от системы линейных уравнений (1) можно перейти к эквивалентной ей ступенчатой системе с матрицей (2). Поскольку ранги основной и расширенной матриц при этом меняться не будут, то достаточно установить справедливость теоремы 3.14 для ступенчатой системы. Для ступенчатой же системы, в силу теоремы 3.4, ранги основной и расширенной матриц равны тогда и только тогда, когда эти матрицы имеют одинаковое число ненулевых строк. Следовательно, первый ненулевой элемент последней ненулевой строки расширенной матрицы не должен располагаться в столбце свободных членов, т.е. в матрице (2) $b'_{r+1} = 0$. Из анализа ступенчатой системы, ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда система совместна. Теорема доказана.

<u>Теорема</u> 3.15. Совместная система линейных уравнений от n неизвестных с основной матрицей A будет определенной тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен n.

Доказательство. В силу теорем 3.3 и 3.4 (ранг A)=n тогда и только тогда, когда данная система приводится к треугольному виду. С другой стороны, ступенчатая система имеет единственное решение в том и только в том случае, когда она треугольная (расширенная матрица имеет вид (3)). Теорема доказана.

<u>Следствие</u>. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными обладает ненулевыми решениями тогда и только тогда, когда определитель основной матрицы системы равен нулю.

<u>Теорема</u> 3.16 (правило Крамера). Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель основной матрицы которой отличен от нуля, обладает решением и притом только одним.

Доказательство. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\qquad (6)
$$

Пусть система (6) совместна и (α_1, α_2, … , α_n) – одно из ее решений. Справедливы, следовательно, равенства

$$
\begin{cases}
a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\
a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n = b_n
\end{cases}
\qquad (7)
$$

Пусть j будет любым из чисел 1, 2, … , n. Умножим обе части первого из равенств (7) на A_{1j}, т.е. на алгебраическое дополнение элемента a_{1j} в определителе

$$
d=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}
\end{vmatrix},
$$

равном определителю основной матрицы системы (7); обе части второго равенства умножим на A_{2j} и т.д., наконец, обе части последнего – на A_{nj}. Складывая, затем отдельно левые и отдельно правые части всех равенств, мы придем к следующему равенству:

$$
(a_{11}A_{1j}+a_{21}A_{2j}+\ldots+a_{n1}A_{nj})\alpha_1+(a_{12}A_{1j}+a_{22}A_{2j}+\ldots+a_{n2}A_{nj})\alpha_2+\ldots+(a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj})\alpha_j+\ldots
$$
$$
+(a_{1n}A_{1j}+a_{2n}A_{2j}+\ldots+a_{nn}A_{nj})\alpha_n=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\ldots+b_nA_{nj}.
$$

Коэффициентом при α_j в этом равенстве служит d, коэффициенты при всех остальных α будут равны нулю, ввиду того, что сумма произведений всех элементов некоторого столбца определителя на алгебраические дополнения соответственных элементов другого столбца равна нулю. А свободный член будет определителем, получающимся из определителя d после замены в нем j-го столбца столбцом из свободных членов системы (6). Если этот последний определитель мы обозначим через d_j, то наше равенство примет вид

$$d\alpha_j=d_j,$$

откуда, ввиду $d \neq 0$,

$$\alpha_j = \frac{d_j}{d}.$$

Этим доказано, что если система (6) совместна, то она обладает единственным решением.

$$\alpha_1 = \frac{d_1}{d},\ \alpha_2 = \frac{d_2}{d},\ \dots,\ \alpha_n = \frac{d_n}{d}. \tag{8}$$

Покажем теперь, что система чисел (8) на самом деле удовлетворяет системе уравнений (6), т.е. что система (6) совместна.

Подставим теперь в i-е уравнение системы (6) значения неизвестных (8). Так как левую часть i-го уравнения можно записать в виде $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ и так как $d_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$, то мы получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right).$$

Относительно этих преобразований заметим, что число $\frac{1}{d}$ оказалось общим множителем во всех слагаемых, и поэтому мы его вынесли за знак суммы; кроме того, после перемены порядка суммирований множитель b_k вынесен за знак внутренней суммы, так как от индекса внутреннего суммирования j он не зависит.

Мы знаем, что выражение $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ будет равно d при $k=i$ и равно 0 при всех других k. Таким образом, в нашей внешней сумме по k остается лишь одно слагаемое, а именно $b_j d$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{d_j}{d} = \frac{1}{d} \cdot b_j d = b_j .$$

Этим доказано, что система чисел (8) действительно служит решением для системы уравнений (6). Теорема доказана.

Теорема 3.17. Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет хотя бы одно ненулевое решение.

Доказательство. Приведем данную однородную систему, т. е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

к ступенчатому виду. Разумеется, она остается однородной. Ясно, что число главных неизвестных не может превысить числа строк. Следовательно, существуют свободные неизвестные, что обеспечивает существование ненулевых решений. Теорема доказана.

При исследовании ступенчатой системы в случае ее неопределенности мы выделяли главные и свободные неизвестные, причем выбирали в качестве главных первые r неизвестные (r – ранг основной матрицы системы). Данному выбору способствовал вид матрицы (2), так как именно в первых r столбцах и строках матрицы (2) был расположен ненулевой минор треугольного вида. Но это не означает, что каждый раз при рассмотрении произвольной системы такой минор обязательно будет расположен в первых r столбцах. Следовательно, первые ненулевые элементы ступенчатой матрицы необязательно будут находиться в первых r столбцах (см. замечание 3). Тогда, если, например, матрица ступенчатой системы от 7 неизвестных имеет вид $\left(\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & -3 \end{array}\right)$, то в качестве главных мы можем выбрать неизвестные $x_2,\ x_4,\ x_5$.

Следующая теорема позволит определить, какие неизвестные можно выбрать в качестве главных, и какого их количество.

<u>**Теорема**</u> **3.18 (Основная теорема теории систем линейных уравнений).** Пусть имеется совместная система (1), $\tilde{A}$ – расширенная матрица этой системы и ранг $\tilde{A}$ равен r. Тогда неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными в том и только в том случае, когда $k=r$ и в столбцах матрицы $\tilde{A}$ с номерами $i_1, \ldots, i_k$ располагается ненулевой минор порядка r.

Доказательство. Допустим, что $k=r$ и что в столбцах с указанными номерами располагается ненулевой минор порядка r. Тогда ранг матрицы (подматрицы основной матрицы, расположенной в столбцах с номерами $i_1, \ldots, i_k$)

$$\begin{pmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_r} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_r} \end{pmatrix}$$

размера $m \times r$ равен r. В силу теорем 3.3 и 3.4, приведя эту матрицу к ступенчатому виду, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} \\ 0 & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ri_r} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \dots, b_{ri_r}$ отличные от нуля числа. Применив те же самые элементарные преобразования к матрице $\tilde{A}$, получим матрицу

$$\tilde{B} = \left(\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & 0 & b_{1i_1} & \dots & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} & b_{1,i_1+1} & \dots & b_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & b_{2i_2} & \dots & b_{ri_r} & b_{2,i_1+1} & \dots & b_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & b_{ri_r} & b_{r,i_1+1} & \dots & b_{rn} & c_r \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & c_m \end{array}\right).$$

Подчеркнем, что эта запись не означает, что все строки матрицы $\tilde{B}$, начиная с (r+1)-й, нулевые: в столбцах с номерами, отличными от $i_1, i_2, \dots, i_r$, могут встретиться ненулевые элементы, стоящие в этих строках. Однако на самом деле все строки матрицы $\tilde{B}$, начиная с (r+1)-й, нулевые. Действительно, допустим, что это не так, т.е. $b_{pq} \neq 0$ для некоторых p и q, где $r+1 \leq p \leq m$. Конечно $q \neq i_1, i_2, \dots, i_r$. Однако может случиться, что $q=n+1$, т.е. $b_{pq} = c_p$. Пусть $|M|$ – минор матрицы $\tilde{B}$ порядка r+1, расположенный в строках с номерами 1, 2, … , r, p и столбцах с номерами $i_1, i_2, \dots, i_r$, q. Переставляя, если нужно, столбцы этого минора, получим

$$|M| = \pm \begin{vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \dots & b_{1i_r} & b_{1q} \\ 0 & b_{2i_2} & \dots & b_{2i_r} & b_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{ri_r} & b_{rq} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{bq} \end{vmatrix} = \pm b_{1i_1} \dots b_{ri_r} b_{pq} \neq 0,$$

т.е. $|M|$ – ненулевой минор матрицы $\tilde{B}$ порядка r+1.

Но тогда

$$(\text{ранг } \tilde{A}) = (\text{ранг } \tilde{B}) \geq r+1,$$

что противоречит условию. Таким образом, система линейных уравнений, соответствующая матрице $\tilde{B}$, эквивалентна исходной системе и содержит r уравнений. Придавая неизвестным, отличным от $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$, произвольные значения и перенося их в правую часть, легко убедиться, что неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}$ однозначно определяются одно за другим, начиная с последнего. Таким образом, их можно объявить главными.

Допустим теперь, что неизвестные $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ можно объявить главными. Положив остальные неизвестные равными нулю, придем к системе

$$\begin{cases} a_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + a_{1i_k}x_{i_k} = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mi_1}x_{i_1} + \ldots + a_{mi_k}x_{i_k} = b_m \end{cases} \tag{9}$$

имеющей единственное решение. В силу теоремы 3.15, ранг основной матрицы этой системы равен k. Следовательно, k=r и в столбцах $i_1,\ i_2,\ \ldots\ ,i_k$ располагается ненулевой минор порядка k. Допустим, что k<r. Заметим, что система (9) приводится к треугольному виду, и применим к исходной системе те же самые элементарные преобразования. Тогда расширенная матрица системы приобретает вид

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} \ldots & b_{1i_1} & \ldots & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_k} & \ldots & c_1 \\ \ldots & 0 & \ldots & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_k} & \ldots & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & b_{ri_k} & \ldots & c_r \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_m \end{array}\right).$$

В силу теоремы Кронекера-Капелли, ранг матрицы системы равен r>k. Поэтому среди $b_{i1},\ \ldots\ ,b_{in}$, где k<i=m, есть хотя бы одно число отличное от нуля. Следовательно, найдется $b_{pq} \neq 0$, где p>k. Если теперь положить равными нулю все неизвестные с номерами, отличными от $i_1,\ \ i_2,\ \ \ldots\ ,i_k$, q, то получим $x_q = \dfrac{c_p}{b_{pq}}$, т.е. x_q не может быть взят произвольным, что противоречит возможности объявить $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ главными неизвестными. Следовательно, k=r. Теорема доказана.

Далее рассмотрим одно из важных понятий в теории систем алгебраических уравнений – понятие фундаментальной системы решений.

Пусть дана однородная система линейных уравнений от n неизвестных с действительными коэффициентами:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}, \qquad (10)$$

причем ранг основной матрицы равен r. Отметим, что эта система всегда имеет решение, т.е. является совместной. Положим $r<n$, т.е. будем считать, что система (10) имеет бесконечно много решений (в случае $r=n$ система имеет единственное нулевое решение).

Всякое решение системы (10) представляет собой упорядоченный набор n действительных чисел $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$. На множестве всех решений системы (10) определим операции сложения и умножения на число.

Сумма двух решений $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ и $(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$ системы (10) определяется следующим правилом:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)+(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)=(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n).$$

В виду того, что наборы $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ и $(\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$ являются решения системы (10), то справедливы следующие равенства: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0$ для всех $i=\overline{1,m}$. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j+\beta_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0$ для всех $i=\overline{1,m}$, т.е. $(\alpha_1+\beta_1,\ \alpha_2+\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n+\beta_n)$ также является решением системы (10).

Произведение решения $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ на произвольное число определяется правилом:

$$\lambda\cdot(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)=(\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \ldots,\ \lambda\alpha_n).$$

Полученный набор $(\lambda\alpha_1,\ \lambda\alpha_2,\ \ldots,\ \lambda\alpha_n)$ также является решением системы (10), так как $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda\alpha_j) = \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = 0$.

Пусть общее решение системы (10) имеет вид

$$(\alpha_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots\alpha_{1n}x_{n\,1},\ \alpha_{2,r+1}x_{r+1}+\ldots\alpha_{2n}x_{n\,2},\ \ldots,\ \alpha_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots\alpha_{rn}x_n,\ x_{r+1},\ x_{r+2},\ldots,x_n), \qquad (11)$$

т.е. полагаем, что $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_r$ главные, а $x_{r+1},\ x_{r+2},\ldots,x_n$ свободные неизвестные. Общее решение (11) можно разложить следующим образом:

$$(\alpha_{1,r+1}x_{r+1}+\ldots\alpha_{1n}x_{n\,1},\ \alpha_{2,r+1}x_{r+1}+\ldots\alpha_{2n}x_{n\,2},\ \ldots,\ \alpha_{r,r+1}x_{r+1}+\ldots\alpha_{rn}x_n,\ x_{r+1},\ x_{r+2},\ldots,x_n)=$$

$$=x_{r+1}(\alpha_{1,r+1},\ \alpha_{2,r+1},\ \ldots,\ \alpha_{r,r+1},\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)+x_{r+2}(\alpha_{1,r+3},\ \alpha_{2,r+2},\ \ldots,\ \alpha_{r,r+2},\ 0,\ 1,\ \ldots,\ 0)+$$

$\ldots + x_n(\alpha_{1n},\ \ \alpha_{2n},\ \ ...,\ \ \alpha_{rn},\ \ 0,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 1)$, где $x_{r+1},\ x_{r+2},\ldots,x_n$ – произвольные действительные числа, а

$$\begin{array}{c}(\alpha_{1,r+1},\ \ \alpha_{2,r+1},\ \ ...,\ \ \alpha_{r,r+1},\ \ 1,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 0),\\ (\alpha_{1,r+3},\ \ \alpha_{2,r+2},\ \ ...,\ \ \alpha_{r,r+2},\ \ 0,\ \ 1,\ \ ...,\ \ 0),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (\alpha_{1n},\ \ \alpha_{2n},\ \ ...,\ \ \alpha_{rn},\ \ 0,\ \ 0,\ \ ...,\ \ 1)\end{array} \qquad (12)$$

– частные решения системы (10). Семейство решений (12) называют фундаментальной системой решений. Отметим, что количество решений в системе (12) совпадает с количеством свободных неизвестных и равно $n–r$. Кроме того, обратим внимание на то, что если построить матрицу из данных решений, то ее ранг будет равен $n–r$. Роль фундаментальной системы решений подробнее будет раскрыта в курсе линейной алгебры.

3.2. Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей, порядком матрицы?
2. Какие преобразования называются элементарными преобразованиями матрицы?
3. Какая матрица называется ступенчатой?
4. Какие действия (алгебраические операции) определены над матрицами?
5. Свойства основных операций над матрицами.
6. Что называется рангом матрицы?
7. Способы нахождения ранга матрицы.
8. Меняется ли ранг матрицы при выполнении конечного числа элементарных преобразований, при транспонировании?
9. Чему равен ранг ступенчатой матрицы?
10. Какая система линейных уравнений (СЛУ) называется совместной (несовместной)?
11. Какая система линейных уравнений называется определенной (неопределенной)?
12. В каком случае системы линейных уравнений называются эквивалентными?
13. Какие неизвестные мы можем объявить главными?
14. Необходимое и достаточное условие совместности СЛУ (теорема Кронекера-Капелли).
15. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы совместная система была определенной.