16. Чему равно количество главных неизвестных согласно основной теореме теории СЛУ?
17. Какая матрица называется обратной к данной? Какая матрица обладает обратной матрицей?
18. Способы нахождения обратных матриц.
19. Пусть ранг основной матрицы СЛНУ равен 4, система сама несовместна. Чему равен ранг расширенной матрицы?
20. Пусть ранг основной матрицы совместной системы с 7 неизвестными равен 3. Что можно сказать о количестве главных и свободных неизвестных?

3.3. Решения типовых примеров

Пример 1. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров.

Решение. В матрице A есть миноры второго порядка отличные от нуля. В частности, $|M| = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0.$

Вычислим все миноры третьего порядка, окаймляющие минор $|M|$ (миноры, содержащие $|M|$, на единицу большего порядка). Всего окаймляющих миноров будет три:

$$|M_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad |M_2| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$|M_3| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все окаймляющие миноры равны нулю ранг матрицы A равен 2. Далее через $r(A)$ будем обозначать ранг матрицы A, т.е. в данном примере $r(A)=2$.

Замечание 4. Всего в матрице A десять миноров третьего порядка, C_5^3. Метод позволяет утверждать, что все эти 10 миноров равны нулю (если окаймляющие миноры равны нулю).

Пример 2. Вычислить ранг следующей матрицы приведением к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Решение. Прибавляя в этой матрице ко второй строке первую строку, умноженную на (–3), к третьей строке первую строку, умноженную на (–3) и к четвертой строке первую строку, умноженную на (–1), придем к матрице:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

В новой матрице, прибавляя к четвертой строке третью строку, умноженную на (–1), а к третьей строке вторую, умноженную на (–1), получим ступенчатую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этой матрице число ненулевых строк равно 3 и поэтому ранг ступенчатой матрицы равен 3, и он равен рангу матрицы A, т.е. $r(A)=3$.

Пример 3. Для матрицы A найти двумя способами обратную матрицу A^{-1}:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Определитель матрицы $|A|=1\neq 0$, т.е. матрица невырожденная, а значит, обратная ей матрица A^{-1} существует.

1 способ. Для матрицы A обратная может быть найдена с помощью формулы, указанной в замечании 2:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ . & . & . & . \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Найдем необходимые алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0,\ A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0,\ A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\ A_{21}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-1,\ A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,\ A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1.$$

Подставляя в формулу, получим, что $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2 способ. Приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрицу A к единичной, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей A^{-1}: $(E|A)\to(A^{-1}|E)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итак, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, также как и в первом способе. Можно сделать проверку: $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Пример 4. Решить матричное уравнение $AX+B^{-1}=C$, где $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. Из уравнения имеем $AX=C-B^{-1}$, $X=A^{-1}(C-B^{-1})$. Находим, сначала $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$, затем $C-B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 1 & 5/2\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ и получим $X=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 1 & 5/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 17/2\\ 0 & -3\end{pmatrix}$.

Пример 5. Найти, если они существуют, невырожденные матрицы P и T, удовлетворяющие равенству $A=PBT$, где $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Решение.

Замечание 5. Для матриц A и B одинакового размера невырожденные матрицы P и T, удовлетворяющие равенству $A=PBT$ найдутся тогда и только тогда, когда $r(A)=r(B)$.

1) Приписываем к матрице A единичную матрицу и слева и справа. Выполняя элементарные преобразования строк в матрице A, мы будем одновременно выполнять эти преобразования в единичной матрице, стоящей слева, а выполняя элементарные преобразования столбцов в матрице A, мы будем одновременно выполнять эти преобразования в единичной матрице, стоящей справа. Путем элементарных преобразований приводим матрицу A к матрице E_k – к матрице, у которой по главной диагонали стоит k единиц, где k – ранг матрицы A, остальные элементы нули. Вместо единичной матрицы, стоящей слева, получим матрицу P_1, а вместо единичной матрицы, стоящей справа матрицу T_1: $(E|A|E) \to (P_1|E_k|T_1)$.

2) Поскольку ранги матриц A и B должны совпадать, то, применяя к матрице B действия аналогичные тем, что указанны в первом пункте, мы также приведем матрицу B к матрице E_k: $(E|B|E)\to(P_2|E_k|T_2)$. И получаем с одной стороны $E_k=P_1AT_1$, а с другой $E_k=P_2BT_2$. Отсюда имеем $P_1AT_1= P_2BT_2$ и $A=(P_1^{-1}P_2)B(T_2T_1^{-1})=PBT$.

Применим эту схему к нашим матрицам.

Матрицу A можно привести к ступенчатой $C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(A)$=2, а матрицу B – к ступенчатой матрице $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $r(B)$=2. Следовательно, матрицы P и T существуют. Применяя схему, описанную в пункте 1, получим

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&2&3&4&1&0&0\\0&1&0&4&3&2&0&1&0\\0&0&1&1&1&1&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&2&0&1&0\\0&1&-4&0&-1&-2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&1&1&1&0&0\\1&0&-2&0&1&2&0&1&0\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&1&0&1&0&0\\1&0&-2&0&1&1&0&1&-1\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&0&0&1&-1&0\\1&0&-2&0&1&1&0&1&-1\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&1&1&0&0&1&-1&1\\1&0&-2&0&1&0&0&1&-2\\1&1&-6&0&0&0&0&0&1\end{array}\right).$$

$$P_1 \qquad E_2 \qquad T_1$$

Таким образом,

$$E_2=P_1AT_1. \tag{10}$$

1) Аналогично, путем нескольких преобразований получим следующее:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&1&1&1&1&0&0\\0&1&0&2&2&2&0&1&0\\0&0&1&3&1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}1&0&0&1&0&0&1&1&1\\-3&0&1&0&1&0&0&0&1\\-2&1&0&0&0&0&0&-1&-2\end{array}\right)$$

$$P_2 \qquad E_2 \qquad T_2$$

А значит,

$$E_2=P_2BT_2. \tag{11}$$

Приравнивая правые части равенств (10) и (11), получим $P_1AT_1=P_2BT_2$. Откуда $A=(P_1^{-1}P_2)B(T_2\cdot T_1^{-1})=PBT$ или, обозначив $P_1^{-1}P_2=P$, а $T_2T_1^{-1}=T$, имеем $A=PBT$. Находим $P_1^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$, $T_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ (обратные матрицы можно найти по формуле, указанной в замечании 2). Отсюда $P=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$ и $T=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&1\\0&-1&-4\end{pmatrix}$ или $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&4\\0&0&1\\0&-1&-4\end{pmatrix}$.

Пример 6. Найти матрицу B, удовлетворяющую равенству $BA=C$, где C – ступенчатая матрица, к которой приводится матрица A с помощью элементарных преобразований строк.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приписываем к матрице A слева единичную матрицу, затем с помощью элементарных преобразований строк приводим матрица A к ступенчатой матрице C, одновременно выполняя эти преобразования и над единичной матрицей. Матрица, полученная вместо единичной матрицы, и будет искомой матрицей B: $(E|A) \to (B|C)$.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 7 & 3 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 12 & -7 & 0 & 0 & 0 & -9 & 5 \end{array}\right).$$

Получили, что матрица

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 12 & -7 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку – перемножим матрицы B и A:

$$BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 12 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 5 \end{pmatrix}=C.$$

Пример 7. Представить матрицу A в виде произведения элементарных матриц:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 6. Только невырожденную матрицу можно представить в виде произведения элементарных матриц.

Решение. Схема решения задачи такова:

1) сначала убедимся, что матрица является невырожденной;

2) найдем обратную матрицу A^{-1};

3) приписываем к матрице A^{-1} слева единичную матрицу E. Конечная цель – получить с помощью элементарных преобразований строк вместо матрицы A^{-1} единичную матрицу (как в примерах 3 и 5), но при этом каждое преобразование рассматриваем в отдельности. Пусть после первого преобразования справа вместо A^{-1} получается матрица A_1, а слева – вместо E матрица U_1 (элементарная матрица). Далее к матрице A_1 слева приписываем единичную матрицу и продолжаем преобразования. Сделав одно преобразование в A_1, получим справа и слева соответственно матрицы A_2 и U_2. Повторяя конечное число раз данную процедуру, в конце справа должны получить единичную матрицу. Схематично это выглядит так:

$$(E|A^{-1}) \to (U_1|A_1);$$
$$(E|A_1) \to (U_2|A_2);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(E|A_{k-1}) \to (U_k|E).$$

Тогда согласно теоремам 3.8 и 3.9 справедливо равенство $U_k\ldots U_2U_1A^{-1}=E$, а значит $A=U_k\ldots U_2U_1$ (теорема 3.11).

Применим данную процедуру к матрице A. Матрица A невырожденная ($|A|\neq 0$). Найдем обратную матрицу $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$ (см. пример 3). Далее действуя согласно схеме, описанной выше, получим:

$$1)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right)}_{U_1};$$

$$2)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right)}_{U_2};$$

$$3)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right)}_{U_3};$$

$$4)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right)}_{U_4};$$

$$5)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right)}_{U_5};$$

$$6)\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \to \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{U_6}.$$

Следовательно, $U_6U_5U_4U_3U_2U_1A^{-1}=E$. Отсюда имеем:

$$A=U_6U_5U_4U_3U_2U_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Решить следующие системы, заданные расширенными матрицами методом Гаусса (метод исключения неизвестных):

$$\text{а)}\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & 3 \end{array}\right);\ \text{б)}\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right);\ \text{в)}\ \tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 4 & 8 \\ -3 & -2 & 1 & 3 & 7 \\ -5 & -1 & 0 & 2 & 6 \\ -8 & -3 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right).$$

Решение.

а) Приводим расширенную матрицу $\tilde{A}$ к ступенчатому виду, тем самым в системе последовательно исключаем неизвестные – во втором уравнении неизвестное x_1, в третьем уравнении неизвестные x_1 и x_2, а в четвертом уравнении неизвестные x_1, x_2 и x_3.

$$\tilde{A}\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 3 & 4 & -13 & -25 \\ 0 & -1 & 9 & -13 & -47 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 9 & 22 \\ 0 & 1 & 7 & -26 & -63 \\ 0 & 0 & -17 & 65 & 164 \\ 0 & 0 & 16 & -39 & -110 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\0&1&7&-26&-63\\0&0&-17&65&164\\0&0&-1&26&54\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\0&1&7&-26&-63\\0&0&1&-26&-54\\0&0&-17&65&164\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&-4&9&22\\0&1&7&-26&-63\\0&0&1&-26&-54\\0&0&0&-377&-754\end{array}\right),$$

приведя $\widetilde{A}$ к ступенчатому виду, получили, что $r(A)=r(\widetilde{A})=4$, отсюда следует, что система совместна и определена.

Заданная система эквивалентна системе: $\begin{cases}x_1-x_2-4x_3+9x_4=22\\ x_2+7x_3-26x_4=-63\\ x_3-26x_4=-54\\ -377x_4=-754\end{cases}$, из которой находим, что $x_4=2$, $x_3=-2$, $x_2=3$, $x_1=-1$. Таким образом, решение системы представляет собой четверку чисел:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)=(-1, 3, -2, 2);$$

Замечание 7. Определенные системы линейных уравнений можно решать с помощью правила Крамера, а также матричным способом. Систему из n линейных уравнений от n неизвестных (3) можно представить в следующем матричном виде $AX=B$, где $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$. Тогда, поскольку $|A|\neq 0$ (условие определенности СЛУ), $X=A^{-1}B$.

б) Поступаем аналогично случаю (а). Тогда после конечного числа элементарных преобразований матрицы $\widetilde{A}$ приводится к следующему ступенчатому виду:

$$\widetilde{A}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&3&5&-2&3\\0&1&-7&5&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Следовательно, $r(A)=r(\widetilde{A})=2$, система совместна и неопределенна. Таким образом, исходная система эквивалентна системе $\begin{cases}x_1+3x_2+5x_3-2x_4=2\\ x_2-7x_3+5x_4=-1\end{cases}$, в которой x_1, x_2 можно объявить главными неизвестными, а x_3, x_4 – свободными неизвестными и выразить однозначно главные неизвестные через свободные, получив общее решение системы. Общее решение рассматриваемой системы будет иметь вид $(-26x_3+17x_4+6,\ 7x_3-5x_4-1,\ x_3,\ x_4)$, где x_3, x_4 могут принимать любые значения.

*Замечание 8***.** Придавая свободным неизвестным конкретные значения, мы можем найти бесконечно много частных решений.

в) После применения конечного числа элементарных преобразований матрицы $\widetilde{A}$ можно привести к следующему ступенчатому виду:

$$\widetilde{A} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & 8 \\ 0 & 7 & -11 & 15 & 31 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 310 \end{array}\right).$$

Откуда получаем, что $r(A)$=3, $r(\widetilde{A})$=4. Согласно теореме Кронекера-Капелли заданная система несовместна.

Пример 9. Исследовать заданную систему и найти общее решение в зависимости от значения параметра *a*:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение. Найдем определитель основной матрицы *A*:

$$d=|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a-1)^2$$

Рассмотрим три случая в зависимости от значения *d*.

1) Если $d = (a+2)(a-1)^2 \neq 0$, то система имеет единственное решение и его можно найти по правилу Крамера. Вычислим три определителя

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2,\ d_2 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2, d_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2.$$

Тогда получим, что $x_1 = x_2 = x_3 = \dfrac{1}{\kappa + 2}$;

2) Если *d* =0, т.е. *a*= –2 или *a*=1, то

а) рассмотрим сначала случай, когда *a*=–2. Тогда нашей системе соответствует расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Получаем, что при a =–2 $r(A)$=2, $r(\tilde{A})$=3, т.е. в этом случае система несовместна;

б) рассмотрим случай, когда a=1: система принимает вид: $x_1+x_2+x_3=1$, $r(A)=r(\tilde{A})=1$, т.е. система имеет бесконечно много решений. Одно неизвестное – x_1 можем объявить главным, x_2, x_3 – свободными и имеем общее решение $(1–x_2–x_3, x_2, x_3)$, где x_2, x_3 могут принимать любые значения. Таким образом, при a=1 система совместна и неопределенна.

Пример 10. Найти фундаментальную систему решений следующей системы однородных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Каждое решение данной системы (x_1, x_2, x_3, x_4) представляет собой некоторую четырехмерную строку, или четырехмерный вектор. По определению несколько решений образуют фундаментальную систему, если:

1) эти решения линейно независимы;

2) любое решение может быть представлено в виде их линейной комбинации.

Один из способов нахождения фундаментальной системы состоит в следующем. Находим сначала общее решение данной системы уравнений. Далее выбираем одно из свободных неизвестных и полагаем его равным единице, остальные свободные неизвестные берем равными нулю, после чего определяем значения всех остальных неизвестных. Таким путем, мы получаем некоторое частное решение данной системы. Выбирая другое свободное неизвестное (и снова полагая его равным единице, а остальные свободные неизвестные – нулю), получим другое частное решение. Построенные таким образом частные решения (число которых равно числу свободных неизвестных) образуют фундаментальную систему решений. В данном случае общее решение (найденное методом Гаусса) имеет вид:

$$\left(2x_2 + \frac{2}{7}x_4, \quad x_2, \quad -\frac{5}{7}x_4, \quad x_4\right).$$

Фундаментальная система решений: $(2, \ 1, \ 0, \ 0)$, $\left(\frac{2}{7}, \ 0, \ -\frac{5}{7}, \ 1\right)$, любое решение ($x_1$, x_2, x_3, x_4) данной системы уравнений может быть представлено в виде линейной комбинации

$$c_1(2, \ 1, \ 0, \ 0)+c_2\left(\frac{2}{7}, \ 0, \ -\frac{5}{7}, \ 1\right),$$

где $c_1=x_1$, $c_2=x_2$.