Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

Якутский государственный университет
имени М. К. Аммосова

Лабораторные работы
по теме

"ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ"

Якутск 1996

Данные задания предназначены для помощи студентам математического факультета при овладении техникой решения задач по указанной теме.

В начале даются необходимые понятия и образцы решения задач. Далее излагаются сами задания.

Составители:
Г. Г. Гурзо, доцент кафедры алгебры и геометрии;
А. И. Антонен, ассистент кафедры алгебры и геометрии.

Утверждено
методическим советом университета

Лабораторные работы
по теме
"ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ"

Составители: ***Г. Г. Гурзо, А. И. Антонен***
Редактор ***Л. Ф. Бецинская***
Техн. редактор ***Э. Н. Сотникова***

Подписано в печать 18.04.96. Формат 60x84/16.
Бумага тип. № 2. Печать офсетная. Печ. л. 2,75.
Уч.-изд. л. 3,43. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство ЯГУ
677891, г. Якутск, ул. Белинского, 58

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Преобразование φ линейного пространства V_n называется линейным преобразованием этого пространства, если сумму любых двух векторов **a**, **в** оно переводит в сумму образов этих векторов,

$$(a+в)\varphi=a\varphi+в\varphi,$$

а произведение любого вектора **a** на любое число α переводит в произведение образа вектора **a** на это же число α,

$$(\alpha a)\varphi=\alpha(a\varphi).$$

Из этого определения вытекает утверждение: Линейное преобразование линейного пространства переводит любую линейную комбинацию данных векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ в линейную комбинацию образов этих векторов,

$$(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_k a_k)\varphi=\alpha_1(a_1\varphi)+\alpha_2(a_2\varphi)+\dots+\alpha_k(a_k\varphi).$$

ТЕОРЕМА 1. Если

$$e_1, e_2, \dots, e_n \qquad (1)$$

база пространства V_n, то всякое линейное преобразование φ пространства V_n однозначно определяется заданием образов $e_1\varphi, e_2\varphi, \dots, e_n\varphi$ всех векторов фиксированной базы (1).

ТЕОРЕМА 2. Какова бы ни была упорядоченная система из n векторов пространства V_n

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \qquad (2)$$

существует, притом единственное, такое линейное преобразование φ этого пространства, что (2) служит системой образов векторов базы (1) при этом преобразовании,

$$e_i\varphi=c_i, \quad i=1,2,\dots,n. \qquad (3)$$

Матрица A - матрица, строки которой являются строками координат векторов c_i, $i=1,2,\ldots,n$ в базе (1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2: Матрица A задает линейное преобразование φ в базе (1), или A - есть матрица линейного преобразования φ в базе (1).

Через $E\varphi$ обозначим столбец, составленный из образов векторов базы (1), а через E - столбец из векторов той же базы. Тогда следующее матричное равенство, полностью описывает связь, существующую между линейным преобразованием φ, базой E и матрицей A, задающей это линейное преобразование в этой базе:

$$E\varphi=AE, \text{ или } \begin{pmatrix} e_1\varphi \\ e_2\varphi \\ \ldots \\ e_n\varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

Пусть даны базы E и E' с матрицей перехода T,

$$E'= TE \qquad (4)$$

и пусть линейное преобразование φ задается в этих базах соответственно матрицами A и A',

$$E\varphi=AE, \quad E'\varphi=A'E'. \qquad (5)$$

Второе из равенств (5) приводит, ввиду (4), к равенству

$$(TE)\varphi=A'(TE).$$

Однако $\qquad (TE)\varphi=T(E\varphi).$

Таким образом, ввиду (5),

$$(TE)\varphi=T(E\varphi)=T(AE)=(TA)E.$$

$$A'(TE)=(A'T)E,$$

т.е. $\qquad (TA)E=(A'T)E.$

Следовательно $\qquad TA = A'T,$

откуда, ввиду невырожденности матрицы перехода T,

$$A' = TAT^{-1}, \quad A=T^{-1}A'T. \qquad (6)$$

Равенства (6) можно сформулировать в виде следующей важной теоремы:

ТЕОРЕМА 3: Матрицы, задающие одно и то же линейное преобразование в разных базах, подобны между собой. При этом матрица линейного преобразования φ в базисе E' получается трансформированием матрицы этого преобразования в базе E матрицей перехода от базы E' к базе E.

Если матрица A задает линейное преобразование φ в базе E, то любая матрица B, подобная матрице A,

$$B = Q^{-1}AQ,$$

также задает преобразование φ в некоторой базе, а именно в базе, получающейся из базы E при помощи матрицы перехода Q^{-1}.

Если L - любое линейное подпространство пространства V_n, то совокупность $L\varphi$ образов всех векторов из L при преобразовании φ также будет линейным подпространством.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Совокупность $V_n\varphi$ образов всех векторов пространства V_n называется областью значений преобразования φ.

Все матрицы, задающие преобразование φ в разных базах, подобны между собой, следовательно они все имеют один и тот же ранг. Это число равно рангу линейного преобразования φ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Размерность области значений линейного преобразования φ называется рангом этого преобразования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Совокупность $N(\varphi)$ всех векторов пространства V_n, отображающихся при φ в нулевой вектор называется ядром преобразования φ.

ТЕОРЕМА 4. Для любого линейного преобразования φ пространства V_n сумма ранга и дефекта этого преобразования равна размерности n всего пространства.

ЗАДАЧА 1.

Выяснить, какие из следующих преобразований φ, заданных путем указания координат вектора $\mathbf{x}\varphi$, как функций координат вектора $\mathbf{x}$ являются линейными, и в случае линейности, найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}\varphi$:

$$1)\ \mathbf{x}\varphi=(3x_1+x_2,\, x_2-x_3,\, x_1+3x_3),\quad 2)\ \mathbf{x}\varphi=(x_1+2,\, x_2+x_3,\, x_3-x_2).$$

Решение:

Для решения, требуется проверить выполнимость условий линейного преобразования: $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\varphi=\mathbf{x}\varphi+\mathbf{y}\varphi$, $(\alpha\mathbf{x})\varphi=\alpha(\mathbf{x}\varphi)$. Пусть $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, а $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$. Тогда

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\varphi=(3(x_1+y_1)+x_2+y_2,\, x_2+y_2-x_3-y_3,\, x_1+y_1+3(x_3+y_3))=$$

$$=(3x_1+x_2,\, x_2-x_3,\, x_1+3x_3)+(3y_1+y_2,\, y_2-y_3,\, y_1+3y_3)=\mathbf{x}\varphi+\mathbf{y}\varphi.$$

Таким образом, первое условие линейности выполнимо. Проверим второе условие:

$$(\alpha\mathbf{x})\varphi=(\alpha 3x_1+\alpha x_2,\, \alpha x_2-\alpha x_3,\, \alpha x_1+\alpha 3x_3)=\alpha(3x_1+x_2,\, x_2-x_3,\, x_1+3x_3)=$$
$$=\alpha(\mathbf{x}\varphi).$$

Следовательно первое преобразование φ линейно. Найдем матрицу преобразования. Известно, что строка координат вектора $\mathbf{x}\varphi$ равна строке координат вектора $\mathbf{x}$, умноженной справа на матрицу A линейного преобразования φ, в [illegible]).

$$[\mathbf{x}\varphi]=[\mathbf{x}]A,$$

$$[3x_1+x_2,\, x_2-x_3,\, x_1+3x_3]=[x_1,\, x_2,\, x_3]A.$$

Тогда матрица A имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В пункте 2) условие линейности не выполняется:

$$(\alpha\mathbf{x})\varphi=(\alpha x_1+2,\, \alpha x_2+\alpha x_3,\, \alpha x_3-\alpha x_2);$$

$$\alpha(\mathbf{x}\varphi)=\alpha(x_1-2,\, x_2+x_3,\, x_3-x_2)=(\alpha x_1+\alpha 2,\, \alpha x_2+\alpha x_3,\, \alpha x_3-\alpha x_2),$$

$$(\alpha\mathbf{x})\varphi\neq\alpha(\mathbf{x}\varphi).$$

ЗАДАЧА 2.

Найти матрицу преобразования, переводящего векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ соответственно в векторы $\mathbf{в}_1$, $\mathbf{в}_2$, $\mathbf{в}_3$ в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов: $\mathbf{a}_1=(1,3,2)$, $\mathbf{a}_2=(2,3,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,-2,0)$, $\mathbf{в}_1=(1,4,1)$, $\mathbf{в}_2=(1,2,-1)$, $\mathbf{в}_3=(1,-2,-1)$.

Решение:

Известно, что строки координат векторов $\mathbf{a}_i$ $i=1,2,3$ и $\mathbf{в}_i$ $i=1,2,3$ связаны равенством:

$$[\mathbf{в}_i]=[\mathbf{a}_i]*C \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{в}_1\\ \mathbf{в}_2\\ \mathbf{в}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix}*C.$$

Тогда, имеем матричное уравнение B=AC, где A - матрица составленная из векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, B - матрица составленная из векторов $\mathbf{в}_1$, $\mathbf{в}_2$, $\mathbf{в}_3$. C - искомая матрица преобразования.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} * C.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2/7 & 3/7 \\ 0 & 1/7 & -2/7 \\ 1/2 & -5/14 & 3/14 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5/7 & -2/7 & -5/7 \\ -1/7 & 6/7 & 1/7 \\ 5/14 & 12/14 & 9/14 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5/7 & -2/7 & -5/7 \\ -1/7 & 6/7 & 1/7 \\ 5/14 & 12/14 & 9/14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица преобразования найдена правильно.

ЗАДАЧА 3

Найти матрицу линейного преобразования $\varphi\psi$ в базисе $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$, если преобразование φ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ имеет матрицу A_φ, а преобразование ψ в базисе $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$ имеет матрицу B_p, если:

$$\mathbf{a}_1=(1,-1),\ \mathbf{a}_2=(0,4),\ \mathbf{в}_1=(1,2),\ \mathbf{в}_2=(1,-1),\ A_\varphi=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ B_p=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Известно, что матрица произведения двух линейных преобразований в базисе $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$ равна произведению матриц данных линейных преобразований в том же базисе $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$, поэтому $B_{\varphi p}=B_\varphi B_p$,

где B_φ – матрица преобразования φ в базе $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$. Следовательно, для решения задачи предварительно найдем матрицу преобразования φ в базе $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$. Тогда, $B_\varphi=TA_pT^{-1}$, $B=TA$, $T=BA^{-1}$, где матрицы A и B – матрицы составленные из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ и $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$ соответственно, T – матрица перехода от базиса $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ к базису $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2$.

$$T = B * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/4 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь

$$B_\varphi = T * A_\varphi * T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4/3 & -4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 & 7/12 \\ 8/3 & -5/3 \end{pmatrix},$$

и матрицу линейного преобразования $\varphi\psi$, найдем так:

$$B_{\varphi p}=B_\varphi B_p = \begin{pmatrix} 8/3 & 7/12 \\ 8/3 & -5/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/12 & 7/12 \\ 13/3 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 4.

Линейное преобразование φ пространства R^3 имеет в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ матрицу A. Показать, что система векторов $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2, \mathbf{в}_3$ образует базис и найти матрицу преобразования φ в этом базисе, если:

$$\mathbf{в}_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{в}_2=-\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{в}_3=2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3,\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Так как, определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

составленный из координат векторов $в_1$, $в_2$, $в_3$ в базисе e_1, e_2, e_3 отличен от нуля ($\Delta=1$), то система векторов $в_i$, $i=1,2,3$ образует базис пространства R^3. Для нахождения матрицы преобразования φ в этом базисе, нужно выразить векторы $в_1\varphi$, $в_2\varphi$, $в_3\varphi$ через $в_1$, $в_2$, $в_3$ или воспользоваться формулой $B=T^{-1}AT$, где T – матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису $в_1$, $в_2$, $в_3$, а B – искомая матрица преобразования. Из условия задачи имеем:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а потому } T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $B=T^{-1}AT=$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 16 & -13 \\ -11 & 21 & -17 \\ -7 & 13 & -11 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 5.

Пусть V пространство всех квадратных матриц второго порядка с действительными элементами. Показать, что преобразование φ, состоящее в умножении всех матриц из V справа на матрицу A, будет линейным. Найти матрицу этого преобразования в базисе:

$$e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ если: } A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Покажем, что преобразование φ будет линейным, для этого проверим выполнимость условий. 1) $(\alpha x)\varphi=\alpha(x\varphi)$.

$$\left(\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right)\varphi = \alpha\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\varphi\right);$$

$$\left(\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right)\varphi = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}\varphi = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\alpha a_{12} & -\alpha a_{11}+2\alpha a_{12} \\ \alpha a_{21}+\alpha a_{22} & -\alpha a_{21}+2\alpha a_{22} \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & -a_{11}+2a_{12} \\ a_{21}+a_{22} & -a_{21}+2a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\varphi\right).$$

2) $(x+y)\varphi=x\varphi+y\varphi$.

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}\right)\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\varphi + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}\varphi;$$

$$\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}\right)\varphi = \begin{pmatrix} a_{11}+в_{11} & a_{12}+в_{12} \\ a_{21}+в_{21} & a_{22}+в_{22} \end{pmatrix}\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+в_{11} & a_{12}+в_{12} \\ a_{21}+в_{21} & a_{22}+в_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+в_{11}+a_{12}+в_{12} & -a_{11}-в_{11}+2a_{12}+2в_{12} \\ a_{21}+в_{21}+a_{22}+в_{22} & -a_{21}-в_{21}+2a_{22}+2в_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\varphi + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} \\ в_{21} & в_{22} \end{pmatrix}\varphi.$$

Все условия выполнены. Следовательно, преобразование φ линейно. Найдем матрицу этого преобразования в данном базисе. Сначала, найдем образы базисных элементов, при линейном преобразовании φ:

$$e_1\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2.$$

$$e_2\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2.$$

$$e_3\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e_3 - e_4.$$

$$e_4\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = e_3 + 2e_4.$$

Заметим, что $[e_1\varphi]=[1;-1;0;0]$, $[e_2\varphi]=[1;2;0;0]$,

$[e_3\varphi]=[0;0;1;-1]$, $[e_4\varphi]=[0;0;1;2]$.

Тогда,

$$\begin{pmatrix} e_1\varphi \\ e_2\varphi \\ e_3\varphi \\ e_4\varphi \end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$ где C – матрица преобразования, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица преобразования имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 6.

Дано пространство V всех квадратных матриц второго порядка с действительными элементами. Показать что сопоставление произвольной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a & в \\ c & d \end{pmatrix}$$

этого пространства матрицы A_φ, есть линейное преобразование данного пространства и найти матрицу этого преобразования в выбранном вами базисе, если:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} a-2в+3c & в+c \\ a-2c+2d & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Проверим условия линейности:

1) $(\alpha X)\varphi=\alpha(X\varphi)$.

$$\left(\alpha\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)\varphi = \alpha\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\varphi\right);$$

$$\left(\alpha\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)\varphi = \begin{pmatrix}\alpha a&\alpha b\\ \alpha c&\alpha d\end{pmatrix}\varphi = \begin{pmatrix}\alpha a-2\alpha b+3\alpha c & \alpha b+\alpha c\\ \alpha a-2\alpha c+2\alpha d & 0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}a-2b+3c & b+c\\ a-2c+2d & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \alpha\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\varphi\right).$$

2) $(X+Y)\varphi=X\varphi+Y\varphi$.

$$\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\right)\varphi = \begin{pmatrix}a+a'&b+b'\\c+c'&d+d'\end{pmatrix}\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix}(a+a')-2(b+b')+3(c+c') & (b+b')+(c+c')\\ (a+a')-2(c+c')+2(d+d') & 0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}a-2b+3c & b+c\\ a-2c+2d & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a'-2b'+3c' & b'+c'\\ a'-2c'+2d' & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\varphi + \begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}\varphi.$$

Все условия выполнены. Следовательно, преобразование φ линейно. Теперь, найдем матрицу данного линейного пресбразования. В качестве базы возьмем матрицы:

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Тогда строка координат матрицы A в этой базе имеет вид [a;в;c;d]. Найдем образы базисных элементов:

$$e_1\varphi=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_2\varphi=\begin{pmatrix}-2&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3\varphi=\begin{pmatrix}3&1\\-2&0\end{pmatrix},\quad e_4\varphi=\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}.$$

Матрицу линейного преобразования C найдем решив матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix}e_1\varphi\\e_2\varphi\\e_3\varphi\\e_4\varphi\end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\e_4\end{pmatrix}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-2&1&0&0\\3&1&-2&0\\0&0&2&0\end{pmatrix} = C * \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица преобразования имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix}1&0&1&0\\-2&1&0&0\\3&1&-2&0\\0&0&2&0\end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 7.

Дано пространство V_3 многочленов от одного неизвестного степени <2. Показать, что сопоставление каждому многочлену $f(x)$ из V_3 его остатка при делении на данный многочлен $g(x)$ есть линейное преобразование пространства V_3. Найти матрицу этого преобразования в базисе x^2, $1+x$, $1-x$, если $g(x)=x^2-4$.

Решение:

Очевидно, что сопоставление каждому многочлену $f(x)$ из V_3 его остатка при делении на данный многочлен $g(x)$ есть линейное преобразование пространства V_3. Найдем матрицу этого преобразования в данном базисе. Пусть x^2, x, 1 - базис пространства V_3, тогда образы базисных векторов равны: $x^2\varphi=4$, $x\varphi=x$, $1\varphi=1$.

$$\begin{pmatrix} x^2\varphi \\ x\varphi \\ 1\varphi \end{pmatrix} = A*\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = A*\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица A (матрица преобразования в выбранном нами базисе) выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу перехода от одной базы к другой:

$$\begin{pmatrix} x^2 \\ 1+x \\ 1-x \end{pmatrix} = T*\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу данного преобразования найдем из равенства $B=TAT^{-1}$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 8.

Показать, что сопоставление каждому многочлену $f(x)$ пространства многочленов от одного неизвестного степени <3 с действительными коэффициентами многочлена $(ax+в)\cdot f'(x)$, где $f'(x)$-производная многочлена $f(x)$, есть линейное преобразование. Найти матрицу этого преобразования в выбранном вами базисе ядро этого преобразования, если $a=1$, $в=-8$.

Решение:

Покажем, что данное преобразование линейно. Проверим условия:

1) $(f(x)+g(x))\varphi = f(x)\varphi+g(x)\varphi$.

2) $(\alpha f(x))\varphi = \alpha(f(x)\varphi)$.

1) $(f(x)+g(x))\varphi = (ax+в)(f(x)+g(x))' = (ax+в)(f'(x)+g'(x)) =$

$(ax+в)f'(x) + (ax+в)g'(x) = f(x)\varphi+g(x)\varphi$.

2) $(\alpha f(x))\varphi = (ax+в)(\alpha f(x))' = \alpha(ax+в)f'(x) = \alpha(f(x)\varphi)$.

Следовательно, указанное преобразование линейно. Найдем матрицу этого преобразования в базе 1, x, x^2, x^3. Так как $f(x)=ax^3+вx^2+cx+d$, то:

$1'=0=0*1+0*x+0*x^2+0*x^3$, $(x^2)'=2x=0*1+2*x+0*x^2+0*x^3$.

$x' = 1 = 1*1+0*x+0*x^2+0*x^3$, $\quad (x^3)' = 3x^2 = 0*1+0*x+3*x^2+0*x^3$.

$$1\varphi=(x-8)*1'=0, \quad x^2\varphi=(x-8)*(x^2)'=2x^2-16x,$$

$$x\varphi=(x-8)*x'=x-8, \quad x^3\varphi=(x-8)*(x^3)'=3x^3-24x^2.$$

Тогда, строки координат имеют вид:

$$[1\varphi]=[0;\ 0;\ 0;\ 0], \quad [x^2\varphi]=[0;\ -16;\ 2;\ 0],$$

$$[x\varphi]=[-8;\ 1;\ 0;\ 0], \quad [x^3\varphi]=[0;\ 0;\ -24;\ 3],$$

и матрица преобразования выглядит так:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем ядро этого преобразования. По определению, ядром преобразования φ является множество всех векторов, которые преобразованием φ отображаются в нулевой вектор, т.е. $[x]A=[0]$. Последнее равенство означает, что координаты вектора

$$x = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4),$$

удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0, \\ -8x_1+1x_2+0x_3+0x_4=0, \\ 0x_1-16x_2+2x_3+0x_4=0, \\ 0x_1+0x_2-24x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

Таким образом, ядро данного преобразования совпадает с линейным подпространством решений однородной системы линейных уравнений. Ранг матрицы, составленной из коэффициентов этой системы, равен 3, значит, размерность ядра равна 4-3=1. Базисом ядра является любая фундаментальная система решений указанной системы, например:

$$(1/512;\ 1/64;\ 1/8;\ 1).$$

Поэтому, ядром преобразования φ служит одномерное подпространство, порожденное вектором $(1/512;\ 1/64;\ 1/8;\ 1)$.

ЗАДАЧА 9.

Показать, что преобразование пространства многочленов степени <3 с действительными коэффициентами, ставящее в соответствие многочлену $f(x)$ многочлен $f(x+c)+kf(x)$, есть линейное преобразование указанного пространства. Найти матрицу этого преобразования в выбранном вами базисе, если: $c=-2, k=5$.

Решение:

Покажем, что данное преобразование линейно. Проверим условия:

1) $(f(x)+g(x))\varphi = f(x)\varphi+g(x)\varphi$,

2) $(\alpha f(x))\varphi = \alpha(f(x)\varphi)$.

1) $(f(x)+g(x))\varphi = (f(x+c)+g(x+c)) + k(f(x)+g(x)) =$

$(f(x+c) + kf(x)) + (g(x+c) + kg(x)) = f(x)\varphi+g(x)\varphi$.

2) $(\alpha f(x))\varphi = \alpha f(x+c)+k\alpha f(x) = \alpha(f(x+c)+kf(x)) = \alpha(f(x)\varphi)$.

Следовательно φ линейно. Найдем матрицу преобразования. В качестве базы возьмем многочлены x^3, x^2, x, 1. Тогда строка координат образа элемента $f(x)$, при преобразовании φ, удовлетворяет равенству: $[f(x-2)+5f(x)]=[f(x)]*C$, где C - матрица преобразования.

$$f(x)=ax^3+вx^2+dx+e,$$

$$f(x+c)=f(x-2)=a(x-2)^3+в(x-2)^2+d(x-2)+e=a(x^3-6x^2+12x-8)+в(x^2-4x+4)+d(x-2)+e.$$

$$kf(x)=5f(x)=5ax^3+5вx^2+5dx+5e.$$

$$f(x+c)+kf(x)=f(x-2)+5f(x)=6ax^3+(-6a+6в)x^2+(12a-4в+6d)x-(8a-4в+2d-6e).$$

Многочлен $f(x)$ в выбранной нами базе имеет строку координат:

$$[a;\ в;\ d;\ e],$$

тогда $[a;\ в;\ d;\ e]*C=[6a;\ -6a+6в;\ 12a-4в+6d;\ -8a+4в-2d+6e]$. Из последнего равенства, нетрудно заметить, что матрица указанного преобразования имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 & -8 \\ 0 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 10.

Линейное преобразование действительного линейного пространства задано матрицей А. Найти (если она существует) базу этого пространства состоящую из собственных векторов указанного линейного преобразования, записать в этой базе матрицу и ядро преобразования, если:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Так как собственными значениями линейного преобразования

пространства R^2 будут служить действительные корни его характеристического многочлена $|A-\lambda E|=0$, поэтому найдем определитель матрицы $A-\lambda E$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda.$$

Таким образом, собственными значениями преобразования φ являются: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=4$. Теперь найдем соответствующие этим значениям собственные векторы. а) Собственными векторами, соответствующими собственному значению

$\lambda=0$, будут те и только те ненулевые векторы $\mathbf{x}=(x_1;\ x_2)$, которые удовлетворяют условию $(A-0*E)[\mathbf{x}]=0$, где E - единичная матрица. Отсюда для координат вектора $\mathbf{x}$ имеем матричное уравнение:

$$[x_1;\ x_2]\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=[0,\ 0],$$

или однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1-3x_2=0, \\ -x_1+3x_2=0. \end{cases}$$

Фундаментальная система решений данной системы состоит из одного вектора $\mathbf{a}=(3;\ 1)$. Значит, собственным вектором для $\lambda=0$ будет вектор $\mathbf{a}$.

б) Аналогично пункту а) получаем, что собственным вектором для $\lambda=4$ будет вектор $\mathbf{в}=(-1;\ 1)$.

Следовательно, база пространства, состоящая из собственных векторов указанного линейного преобразования имеет вид:

$$(3;\ 1),\ (-1;\ 1).$$

Матрица преобразования в этой базе имеет диагональный вид, и по диагонали стоят собственные значения, т.е.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как линейное преобразование действительного линейного пространства, заданное матрицей А, невырожденное, то ядро преобразования состоит из одного вектора с координатами (0; 0).

ЗАДАЧА 11.

Доказать, что множество векторов пространства, отображающихся линейным преобразованием в один и тот же вектор, является линейным многообразием. Найти базис направляющего подпространства и вектор сдвига указанного многообразия, если линейное преобразование в некотором базисе имеет матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Пусть **в** - произвольный вектор из области значений , **у** - какой-нибудь прообраз вектора **в** (**у**φ=**в**).

$$[\mathbf{в}]=[в_1, \ \dots \ , в_n],$$
$$[\mathbf{y}]=[y_1, \ \dots \ , y_n].$$

$$[\mathbf{y}]A=[\mathbf{в}],$$

$$\begin{cases} y_1 a_{11}+ \ \dots \ +y_n a_{n1}=в_1, \\ y_1 a_{12}+ \ \dots \ +y_n a_{n2}=в_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ y_1 a_{1n}+ \ \dots \ +y_n a_{nn}=в_n. \end{cases}$$

Множество всех прообразов вектора в из области значений есть множество решений этой системы. Возьмем однородную систему [y]A=[0], соответствующую данной системе. Множество решений однородной системы совпадает с ядром линейного преобразования φ. Так как общее решение неоднородной системы можно получить прибавлением к общему решению однородной системы любого частного решения неоднородной системы, то приходим к выводу, что множество решений данной неоднородной системы (т.е. совокупность всех прообразов вектора **в** при линейном преобразовании φ) является линейным многообразием. Направляющим подпространством служит множество решений однородной системы (т.е. ядро линейного преобразования). В качестве вектора сдвига можно взять любой прообраз вектора **в**, т.е. любое частное решение неоднородной системы. Найдем базис направляющего подпространства и вектор сдвига указанного многообразия.

$$[x_1, \ x_2, \ x_3]A=[0, \ 0, \ 0].$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 4x_1+ \ x_2+2x_3=0, \\ x_1+2x_2+3x_3=0. \end{cases}$$

Общее решение однородной системы может быть записано в виде:

$$(-1/7x_3, \ -10/7x_3, \ x_3),$$

а поэтому фундаментальной системой ее решения является:

$$(-1/7, \ -10/7, \ 1).$$

Таким образом, базис направляющего пространства состоит из этого вектора. Искомым вектором сдвига является любое решение системы:

$$[\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3]A=[a, \ в, \ c].$$

$$\begin{cases} \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=a, \\ 4\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=в, \\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=c; \end{cases}$$

данная система совместна только при условии: a=c, поэтому общим решением системы будет вектор:

$$((2в-a-1)/7;\ (4a-в-10)/7;\ 1).$$

Таким образом, имеем общий вид векторов сдвига, зависящих от а и в. Придавая а и в конкретные значения, будем получать векторы сдвига разных многообразий.

Укажем общий вид линейных многообразий:

$$M=L+x_0=\{(-1/7;-10/7;1)t+((2в-a-1)/7;(4a-в-10)/7;1) \mid \text{где } t \text{ из } R\}$$

где M - искомое многообразие, L - направляющее подпространство, x_0 - вектор сдвига.

ЛАБОРАТОРНЫЕ ЗАДАНИЯ

I. Выяснить, какие из следующих преобразований φ, заданных путем указания координат вектора $x\varphi$, как функций координат вектора x являются линейными, и в случае линейности, найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и $x\varphi$:

1. $x\varphi=(x_1,-2x_2,3x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,(x_2+x_3)^2,-x_3)$, $x\varphi=(1+x_1,x_2,x_3)$;
2. $x\varphi=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3-x_1)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2-x_1,x_3)$, $x\varphi=(x_1-x_2,x_1+x_1,x_3-1)$;
3. $x\varphi=(x_1-1,x_2-2,x_3-3)$, $x\varphi=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$;
4. $x\varphi=(x_1+1,x_1,x_1)$, $x\varphi=(x_1,x_2-x_3,x_3-x_1)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2,x_3-x_1)$;
5. $x\varphi=(x_1-x_2,x_2-x_3+x_1,2x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_1+1,x_3)$, $x\varphi=(x_1,x_2^2-x_3,x_3)$;
6. $x\varphi=(x_1+2x_2,x+2x_3,2x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2,3x_3)$, $x\varphi=(x_1+x_2-3,x_2,x_2)$;
7. $x\varphi=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3+1)$, $x\varphi=(x_1+2x_2,x_1-3x_3,x_1)$, $x\varphi=(x_1+2,x_2+3,x_3)$;
8. $x\varphi=(2x_1-x_2,x_2-x_3,x_1)$, $x\varphi=(x_1+1,x_2-1,x_3)$, $x\varphi=(1,1,1)$;
9. $x\varphi=(1+x_1,1+x_1,1+x_1)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$, $x\varphi=(x_1,2x_2,3x_3)$;
10. $x\varphi=(x_1-x_2-x_3,x_2-x_3,x_3)$, $x\varphi=(1,2,3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2,x_3)$;
11. $x\varphi=(x_1,x_2+x_3,x_2,x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_3,x_2)$, $x\varphi=(1,2,1)$;
12. $x\varphi=(x_1+x_2,x_3,x_2+x_1)$, $x\varphi=(1,0,1)$, $x\varphi=(x_1\,(x_2+x_3)^2,x_3)$;
13. $x\varphi=(1,0,0)$, $x\varphi=(x_1+x_2-x_3,x_1+x_2-x_3,x_1)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2,x_3-x)$;
14. $x\varphi=(1,0,2)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2,x_3+x_2+x_1)$, $x\varphi=(x_1+x_2,x_2+x_3-x_1,x_1+2x_2)$;
15. $x\varphi=(x_1,x_1,x_1)$, $x\varphi=(x_1-x_2,x_1+x_3,x_3)$, $x\varphi=(x_1^2-1,x_1,x_3)$;
16. $x\varphi=(x_1,x_1+x_2,x_1+x_2+x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2^2,x_3)$, $x\varphi=(x_1+1,x_2+1,x_3)$;
17. $x\varphi=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,-2x_2,x_2,x_3)$, $x\varphi=(x_1+1,x_2+2,x_3+3)$;
18. $x\varphi=(x_1^2,x_3,x_2)$, $x\varphi=(1,2,2)$, $x\varphi=(x_1+2x_2-3x_3,2x_2-3x_3-3x_3)$;
19. $x\varphi=(x_1,x_1+x_2,x_1+x_2+x_3)$, $x\varphi=(x_1,x_2,x_3)$, $x\varphi=(1,2,x_3)$;
20. $x\varphi=(x_1+x_2+x_3,x_2+x_3,x_3)$, $x\varphi=(x_1^2,x_2,x_3+x_2)$, $x\varphi=(2,3,1)$;
21. $x\varphi=(x_1+x_2-x_3,x_2+x_3+x_1,x_1)$, $x\varphi=(1,1,3)$, $x\varphi=(x_1,x_2,x_3)$;
22. $x\varphi=(x_1+2x_2,x_1+3x_3,x_3-3x_1)$, $x\varphi=(2,2,2)$, $x\varphi=((x_1+x_2)^2,x_3,x_1)$;
23. $x\varphi=(x_1+x_2-x_3,x_1+2x_2+3x_3,x_3)$, $x\varphi=(0,0,0)$, $x\varphi=(x_1^2,-x_2,x_3-x_1)$;
24. $x\varphi=(x_1-x_2,x_2-x_3+x_1,x_1+x_2)$, $x\varphi=(1,3,5)$, $x\varphi=(x_1,(x_2+x_3),x_3)$;
25. $x\varphi=(x_1+x_2,x_3-x_1,x_3)$, $x\varphi=(x_1,x_1,1)$, $x\varphi=(x_1^2,-x_2^2,-x_3^2)$.

II. Найти матрицу преобразования, переводящего векторы a_1,a_2,a_3 соответственно в векторы $в_1,в_2,в_3$ в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

1) $\mathbf{a}_1=(1,1,2)$, $\mathbf{a}_2=(3,0,4)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,2,1)$, $\mathbf{b}_2=(2,2,2)$, $\mathbf{b}_3=(1,0,0)$;
2) $\mathbf{a}_1=(3,1,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,0,2)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(2,1,2)$, $\mathbf{b}_2=(1,0,2)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)$;
3) $\mathbf{a}_1=(2,1,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,0,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(3,2,4)$, $\mathbf{b}_2=(4,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(1,2,0)$;
4) $\mathbf{a}_1=(3,1,5)$, $\mathbf{a}_2=(3,0,-4)$, $\mathbf{a}_3=(-1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(5,2,3)$, $\mathbf{b}_2=(1,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(1,3,0)$;
5) $\mathbf{a}_1=(3,4,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,2,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_1=(3,4,5)$, $\mathbf{b}_2=(2,3,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)$;
6) $\mathbf{a}_1=(5,5,-1)$, $\mathbf{a}_2=(2,3,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_1=(3,3,5)$, $\mathbf{b}_2=(1,2,4)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)$;
7) $\mathbf{a}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{a}_2=(3,4,0)$, $\mathbf{a}_3=(3,5,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,2)$, $\mathbf{b}_2=(3,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,3)$;
8) $\mathbf{a}_1=(0,1,1)$, $\mathbf{a}_2=(0,2,3)$, $\mathbf{a}_3=(1,5,6)$, $\mathbf{b}_1=(2,2,2)$, $\mathbf{b}_2=(3,3,3)$, $\mathbf{b}_3=(1,0,0)$;
9) $\mathbf{a}_1=(0,3,4)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,5,4)$, $\mathbf{b}_1=(1,2,1)$, $\mathbf{b}_2=(2,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(2,0,0)$;
10) $\mathbf{a}_1=(0,5,6)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,5,2)$, $\mathbf{b}_1=(2,2,2)$, $\mathbf{b}_2=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_3=(1,0,0)$;
11) $\mathbf{a}_1=(0,2,3)$, $\mathbf{a}_2=(0,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,3,5)$, $\mathbf{b}_1=(1,0,2)$, $\mathbf{b}_2=(4,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(2,3,1)$;
12) $\mathbf{a}_1=(2,0,3)$, $\mathbf{a}_2=(3,1,5)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(2,1,0)$, $\mathbf{b}_2=(1,0,3)$, $\mathbf{b}_3=(2,0,1)$;
13) $\mathbf{a}_1=(3,0,4)$, $\mathbf{a}_2=(5,1,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{b}_2=(0,3,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)$;
14) $\mathbf{a}_1=(7,0,6)$, $\mathbf{a}_2=(1,0,1)$, $\mathbf{a}_3=(2,1,5)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(2,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)$;
15) $\mathbf{a}_1=(1,0,2)$, $\mathbf{a}_2=(3,1,6)$, $\mathbf{a}_3=(1,0,1)$, $\mathbf{b}_1=(2,3,2)$, $\mathbf{b}_2=(2,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)$;
16) $\mathbf{a}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{a}_2=(5,3,1)$, $\mathbf{a}_3=(2,3,0)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(2,2,2)$, $\mathbf{b}_3=(3,3,3)$;
17) $\mathbf{a}_1=(1,2,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,3,1)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_1=(2,2,2)$, $\mathbf{b}_2=(1,0,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)$;
18) $\mathbf{a}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{a}_2=(2,3,0)$, $\mathbf{a}_3=(3,3,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(2,3,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,3)$;
19) $\mathbf{a}_1=(2,3,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(3,3,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,2,0)$, $\mathbf{b}_2=(0,3,3)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,1)$;

20) $\mathbf{a}_1=(1,1,0)$, $\mathbf{a}_2=(3,4,0)$, $\mathbf{a}_3=(5,5,1)$, $\mathbf{b}_1=(2,3,0)$, $\mathbf{b}_2=(1,0,2)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,4)$;
21) $\mathbf{a}_1=(3,1,0)$, $\mathbf{a}_2=(4,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(0,2,1)$, $\mathbf{b}_1=(3,3,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,2,0)$, $\mathbf{b}_3=(1,0,0)$;
22) $\mathbf{a}_1=(2,1,0)$, $\mathbf{a}_2=(3,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(2,2,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,0,2)$, $\mathbf{b}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,3)$;
23) $\mathbf{a}_1=(2,5,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,3,0)$, $\mathbf{a}_3=(6,6,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{b}_2=(2,2,0)$, $\mathbf{b}_3=(1,0,2)$;
24) $\mathbf{a}_1=(3,7,0)$, $\mathbf{a}_2=(1,2,0)$, $\mathbf{a}_3=(2,2,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,2)$;
25) $\mathbf{a}_1=(3,2,0)$, $\mathbf{a}_2=(2,1,0)$, $\mathbf{a}_3=(1,1,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,1,2)$, $\mathbf{b}_2=(1,2,0)$, $\mathbf{b}_3=(0,0,3)$.

III. Найти матрицу линейного преобразования $\varphi+2\psi$ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, если преобразование φ в базисе $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ имеет матрицу A, а преобразование ψ в базисе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ имеет матрицу B, если:

1) $\mathbf{a}_1=(1,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,4)$, $\mathbf{b}_1=(2,4)$, $\mathbf{b}_2=(2,3)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$;

2) $\mathbf{a}_1=(2,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,1)$, $\mathbf{b}_1=(2,5)$, $\mathbf{b}_2=(3,4)$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$;

3) $\mathbf{a}_1=(3,5)$, $\mathbf{a}_2=(1,2)$, $\mathbf{b}_1=(2,1)$, $\mathbf{b}_2=(1,0)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$;

4) $\mathbf{a}_1=(6,5)$, $\mathbf{a}_2=(1,1)$, $\mathbf{b}_1=(1,3)$, $\mathbf{b}_2=(1,-1)$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\2&1\end{pmatrix}$;

5) $\mathbf{a}_1=(4,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,1)$, $\mathbf{b}_1=(2,3)$, $\mathbf{b}_2=(3,-1)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$;

6) $\mathbf{a}_1=(2,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,2)$, $\mathbf{B}_1=(2,4)$, $\mathbf{B}_2=(3,2)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$;

7) $\mathbf{a}_1=(3,2)$, $\mathbf{a}_2=(2,1)$, $\mathbf{B}_1=(3,3)$, $\mathbf{B}_2=(1,0)$, $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$;

8) $\mathbf{a}_1=(3,4)$, $\mathbf{a}_2=(1,1)$, $\mathbf{B}_1=(3,-3)$, $\mathbf{B}_2=(1,2)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$;

9) $\mathbf{a}_1=(1,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,2)$, $\mathbf{B}_1=(2,4)$, $\mathbf{B}_2=(2,2)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$;

10) $\mathbf{a}_1=(3,1)$, $\mathbf{a}_2=(2,1)$, $\mathbf{B}_1=(1,2)$, $\mathbf{B}_2=(3,3)$, $A=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$;

11) $\mathbf{a}_1=(1,5)$, $\mathbf{a}_2=(1,6)$, $\mathbf{B}_1=(1,2)$, $\mathbf{B}_2=(1,4)$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$;

12) $\mathbf{a}_1=(1,4)$, $\mathbf{a}_2=(1,5)$, $\mathbf{B}_1=(3,2)$, $\mathbf{B}_2=(1,1)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&3\end{pmatrix}$;

13) $\mathbf{a}_1=(1,2)$, $\mathbf{a}_2=(2,3)$, $\mathbf{B}_1=(2,2)$, $\mathbf{B}_2=(2,3)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&3\end{pmatrix}$;

14) $\mathbf{a}_1=(1,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,5)$, $\mathbf{B}_1=(3,3)$, $\mathbf{B}_2=(2,1)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$;

15) $\mathbf{a}_1=(1,3)$, $\mathbf{a}_2=(2,5)$, $\mathbf{B}_1=(1,0)$, $\mathbf{B}_2=(0,4)$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$;

16) $\mathbf{a}_1=(2,3)$, $\mathbf{a}_2=(1,2)$, $\mathbf{B}_1=(2,2)$, $\mathbf{B}_2=(1,0)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$;

17) $\mathbf{a}_1=(1,2)$, $\mathbf{a}_2=(0,1)$, $\mathbf{B}_1=(1,2)$, $\mathbf{B}_2=(2,3)$, $A=\begin{pmatrix}0&2\\2&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$;

18) $\mathbf{a}_1=(1,3)$, $\mathbf{a}_2=(0,1)$, $\mathbf{B}_1=(2,3)$, $\mathbf{B}_2=(1,0)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$;

19) $\mathbf{a}_1=(2,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,0)$, $\mathbf{B}_1=(3,4)$, $\mathbf{B}_2=(5,1)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;

20) $\mathbf{a}_1=(3,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,0)$, $\mathbf{B}_1=(2,4)$, $\mathbf{B}_2=(2,2)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$;

21) $\mathbf{a}_1=(4,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,0)$, $\mathbf{B}_1=(1,1)$, $\mathbf{B}_2=(1,3)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$;

22) $\mathbf{a}_1=(2,1)$, $\mathbf{a}_2=(1,0)$, $\mathbf{B}_1=(2,3)$, $\mathbf{B}_2=(1,4)$, $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$;

23) $\mathbf{a}_1=(2,5)$, $\mathbf{a}_2=(1,4)$, $\mathbf{B}_1=(0,1)$, $\mathbf{B}_2=(1,2)$, $A=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$;

24) $\mathbf{a}_1=(1,2),\ \mathbf{a}_2=(0,1),\ \mathbf{в}_1=(1,3),\ \mathbf{в}_2=(2,3),\ A=\begin{pmatrix}0&4\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix};$

25) $\mathbf{a}_1=(2,5),\ \mathbf{a}_2=(1,3),\ \mathbf{в}_1=(2,2),\ \mathbf{в}_2=(1,3),\ A=\begin{pmatrix}0&0\\1&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}.$

IV. Линейное преобразование φ пространства R^4 имеет в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 матрицу A. Показать, что система векторов $\mathbf{в}_1, \mathbf{в}_2, \mathbf{в}_3, \mathbf{в}_4$ образует базис и найти матрицу преобразования φ в этом базисе, если:

1) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=2e_1+e_2+e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_2&=2e_1+e_2+e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=3e_3+4e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix};$

2) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+e_2+e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+2e_2+2e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_1+e_2,\\ \mathbf{в}_4&=2e_1+e_2,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&2\\0&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix};$

3) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+2e_2+e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2-e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+2e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3+e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix};$

4) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+e_2+e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_2&=3e_1+4e_2+e_3,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=2e_3+3e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix};$

5) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=3e_1+2e_2+e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2-3e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+2e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3+e_4.\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix};$

6) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=4e_1+3e_2+e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2-e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=2e_3+3e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix};$

7) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=4e_1+3e_2+e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2+2e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_3&=3e_3+4e_4,\\ \mathbf{в}_4&=3e_3+4e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix};$

8) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=5e_1+6e_2+e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2+3e_4+4e_4,\\ \mathbf{в}_3&=2e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3+e_4.\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$

9) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=5e_1+4_2+e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2-3e_3+4e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix};$

10) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+e_2-e_3,\\ \mathbf{в}_2&=2e_1+e_2-e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3+e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix};$

11) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+3e_2-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+2e_2-e_3,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+2e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3+e_4.\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&2\\0&0&2&0\end{pmatrix};$

12) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+3e_2-e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=2e_1+5e_2+e_3,\\ \mathbf{в}_3&=e_3,\\ \mathbf{в}_4&=e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\2&2&2&2\\1&1&1&1\\2&2&2&2\end{pmatrix};$

13) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+4e_2-e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+3e_2+e_3,\\ \mathbf{в}_3&=e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&0&1\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{pmatrix};$

14) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=2e_1+3e_2-e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+e_2-e_3,\\ \mathbf{в}_3&=e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3+e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix};$

15) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+5e_2+3e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+6e_2+e_3-e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_3.\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&3\\0&0&4&0\end{pmatrix};$

16) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+4e_2-e_3-4e_4,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+5e_2+e_3-2e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_4+e_3,\\ \mathbf{в}_4&=e_4.\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix};$

17) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+e_2,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+2e_2,\\ \mathbf{в}_3&=e_2+e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_1+e_3+2e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix};$

18) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+4e_2,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+3e_2,\\ \mathbf{в}_3&=e_1-e_2+e_3+2e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_1+2e_2+e_3+e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix};$

19) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_1+e_2,\\ \mathbf{в}_2&=e_1+2e_3,\\ \mathbf{в}_3&=e_1+e_2+e_3+2e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_1+e_2+e_3+3e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix};$

20) $\begin{aligned}\mathbf{в}_1&=e_2+e_4,\\ \mathbf{в}_2&=2e_2+3e_4,\\ \mathbf{в}_3&=e_1+e_2+3e_3+e_4,\\ \mathbf{в}_4&=e_1+2e_2+2e_3+e_4,\end{aligned}\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\2&2&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix};$

21) $b_1=e_1+e_4,\quad b_2=2e_1+3e_4,\quad b_3=e_1+e_2+2e_3,\quad b_4=e_1+e_2+3e_3+e_4,\quad A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix};$

22) $b_1=e_1+e_2,\quad b_2=e_2,\quad b_3=e_1+e_3+2e_4,\quad b_4=e_2+e_3+3e_4,\quad A=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&0&0&0\\0&2&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix};$

23) $b_1=e_1+e_4,\quad b_2=2e_1+e_4,\quad b_3=e+e+3e_3+e_4,\quad b_4=e+e+2e_3+e_4,\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&4\\0&0&0&0\end{pmatrix};$

24) $b_1=e_1+e_3,\quad b_2=e_1+e_2-e_3+2e_4,\quad b_3=2e_1+e_3,\quad b_4=e_1+e_2+e_4,\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&0\\4&3&2&1\\1&1&1&1\end{pmatrix};$

25) $b_1=e_2+4e_4,\quad b_2=e_1+e_2+e_3,\quad b_3=e_2+3e_4,\quad b_4=2e_1+e_2+3e_3,\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$

V. Пусть V пространство всех квадратных матриц второго порядка с действительными элементами. Показать, что преобразование φ, состоящее в умножении всех матриц из V справа на матрицу A, будет линейным. Найти матрицу этого преобразования в базисе

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},$$ если:

1) $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&2\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&2\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&3\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$; 7) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&1\end{pmatrix}$; 9) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$; 12) $A=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}$; 13) $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$; 14) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&5\end{pmatrix}$; 15) $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}$;

16) $A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$; 17) $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$; 18) $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&0\end{pmatrix}$; 19) $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&5\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}5&1\\0&5\end{pmatrix}$;

21) $A=\begin{pmatrix}5&5\\0&5\end{pmatrix}$; 22) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$; 23) $A=\begin{pmatrix}3&3\\3&3\end{pmatrix}$; 24) $A=\begin{pmatrix}2&4\\5&6\end{pmatrix}$; 25) $A=\begin{pmatrix}1&1\\5&5\end{pmatrix}$.

VI. Дано пространство V всех квадратных матриц второго порядка с действительными элементами. Показать что сопоставление произвольной матрице

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

этого пространства матрицы A_φ, есть линейное преобразование данного пространства и найти матрицу этого преобразования в выбранном вами базисе, если:

1) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a+b+c&a+b\\b+c+d&c+d\end{pmatrix}$; 2) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a-b&c-d\\b-c&d-a\end{pmatrix}$; 3) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a+b&d+a\\b+c&d+b\end{pmatrix}$;

4) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a+b+c+d&a+c\\a-b+c-d&b+d\end{pmatrix}$; 5) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a+2b&a-b\\c+2d&a+b+c+d\end{pmatrix}$; 6) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a+3b\ c&a-d\\a-b-d&d+3d\end{pmatrix}$;

7) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a+b+2c&a-2b+d\\c-3d&a+2c-d\end{pmatrix}$; 8) $A_\varphi=\begin{pmatrix}a-b+c&a-d\\a+2b-c&3d-a\end{pmatrix}$; 9) $A_\varphi-\begin{pmatrix}a+2b\cdot c&d+a\\a-3db+c&d+\text{[illegible]}\end{pmatrix}$:

10) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+3d & в+2c \\ a-2в & в-2c \end{pmatrix}$; 11) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в-c & a+d \\ a+в-2c & 2c-d \end{pmatrix}$; 12) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в+c & a+2в \\ a+в-2d & a-2в \end{pmatrix}$;

13) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в+d & 4a+в \\ a-в-4d & 2a+d \end{pmatrix}$; 14) $A_\phi=\begin{pmatrix} 4a-в & 4c-d \\ 4в-c & 4d-a \end{pmatrix}$; 15) $A_\phi=\begin{pmatrix} 2a+в & 3a-5в \\ a+в+c & a-d \end{pmatrix}$;

16) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в+c+d & a+2в \\ a-в+d & 4c-d \end{pmatrix}$; 17) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в-c & a-2в+d \\ a+2в+c & 2a-d \end{pmatrix}$; 18) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+2в+c & 2a-d \\ a-3в-c & 2a+d \end{pmatrix}$;

19) $A_\phi=\begin{pmatrix} 2a-в+c & a+2a \\ 3a+4d & a \end{pmatrix}$; 20) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в & c-d \\ 3a & 0 \end{pmatrix}$; 21) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в+c+d & 3a \\ a-в-2c-d & 2a+d \end{pmatrix}$;

22) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в+3c-d & 0 \\ a-в+c-d & 0 \end{pmatrix}$; 23) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+3d & 3a \\ в-c & -5в \end{pmatrix}$; 24) $A_\phi=\begin{pmatrix} a+в & 0 \\ 3c-d & 0 \end{pmatrix}$;

25) $A_\phi=\begin{pmatrix} a-3d & 0 \\ a+c & 0 \end{pmatrix}$.

VII. Дано пространство V_3 многочленов от одного неизвестного степени <2. Показать, что сопоставление каждому многочлену $f(x)$ из V_3 его остатка при делении на данный многочлен $g(x)$ есть линейное преобразование пространства V_3. Найти матрицу этого преобразования в базисе x^2, $1+x$, $1-x$, если:

1) $g(x)=x^2-1$; 2) $g(x)=x^2+1$; 3) $g(x)=x^2-2$; 4) $g(x)=x^2+2$;

5) $g(x)=x+3$; 6) $g(x)=x-3$; 7) $g(x)=x+1$; 8) $g(x)=x-1$;

9) $g(x)=x+2$; 10) $g(x)=x-2$; 11) $g(x)=x+4$; 12) $g(x)=x-4$;

13) $g(x)=x+5$; 14) $g(x)=x-5$; 15) $g(x)=x+6$; 16) $g(x)=x-6$;

17) $g(x)=x+7$; 18) $g(x)=x-7$; 19) $g(x)=x+8$; 20) $g(x)=x-8$;

21) $g(x)=-x+1$; 22) $g(x)=-x-1$; 23) $g(x)=-x+2$; 24) $g(x)=3-x$;

25) $g(x)=5-x$.

VIII. Показать, что сопоставление каждому многочлену $f(x)$ пространства многочленов от одного неизвестного степени <3 с действительными коэффициентами многочлена $(ax+в)\cdot f'(x)$, где $f'(x)$ – производная многочлена $f(x)$, есть линейное преобразование. Найти матрицу этого преобразования в выбранном вами базисе ядро этого преобразования, если:

1) a=1, в=1; 2) a=1, в=2; 3) a=1, в=3; 4) a=1, в=4; 5) a=1, в=5;

6) a=2, в=-1; 7) a=2, в=-2; 8) a=2, в=-3; 9) a=2, в=-4; 10) a=2, в=-5;

11) a=3, в=1; 12) a=3, в=2; 13) a=3, в=3; 14) a=3, в=4; 15) a=3, в=5;

16) a=2, в=1; 17) a=2, в=2; 18) a=1, в=3; 19) a=2, в=4; 20) a=2, в=5;

21) a=2, в=-1; 22) a=1, в=-2; 23) a=1, в=-3; 24) a=1, в=-4; 25) a=1, в=-5.

IX. Показать, что преобразование пространства многочленов степени <3 с действительными коэффициентами, ставящее в соответствие многочлену $f(x)$ многочлен $f(x+c)-кf(x)$, есть линейное преобразование указанного пространства. Найти матрицу этого преобразования в выбранном вами базисе, если:

1) c=1, к=1; 2) c=1, к=2; 3) c=1, к=3; 4) c=1, к=4; 5) c=1, к=5;

6) c=-1, к=1; 7) c=-1, к=2; 8) c=-1, к=3; 9) c=-1, к=4; 10) c=-1, к=5;

11) c=2, к=1; 12) c=2, к=2; 13) c=2, к=3; 14) c=2, к=4; 15) c=2, к=[illegible];

16)c=-1, к=-1; 17)c=-1. к=-2; 18)c=-1, к=-3; 19)c=-1, к=-4; 20)c=1, к=-5;

21)c=1, к=-1; 22)c=1, к=-2; 23)c=1, к=-3; 24)c=1, к=-4; 25)c=1, к=-5.

X. Линейное преобразование действительного линейного пространства задано матрицей А. Найти (если она существует) базу этого пространства, состоящую из собственных векторов указанного линейного преобразования, записать в этой базе матрицу и ядро преобразования, если:

1) $A=\begin{pmatrix}5 & 14\\ 6 & 13\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 4 & 13\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}13 & -12\\ -7 & 5\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 7\\ 4 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 6 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 6 & 4 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix}5 & 21\\ 4 & 13\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 12 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 21 & 13\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 12 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]}\\ 0 & 3 & 3 & \text{[illegible]}\\ 0 & 0 & 3 & \text{[illegible]}\\ 2 & 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]}\end{pmatrix}$;

11) $A=\begin{pmatrix}13 & -6\\ -14 & 5\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 12) $A=\begin{pmatrix}13 & 7\\ 12 & 5\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 2\\ 7 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & \text{[illegible]}\\ 6 & 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]}\end{pmatrix}$;

13) $A=\begin{pmatrix}2 & 14\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$; 14) $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 3\\ 7 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\\ 0 & 4 & \text{[illegible]} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \text{[illegible]}\\ 7 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\end{pmatrix}$;

15) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 7 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 10 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 16) $A=\begin{pmatrix}3 & 10\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\\ 0 & 4 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]}\\ 0 & 0 & \text{[illegible]} & \text{[illegible]}\\ 6 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

17) $A=\begin{pmatrix}2 & 10\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 5 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$; 18) $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\\ 0 & 4 & 2 & \text{[illegible]}\\ 0 & 0 & 1 & \text{[illegible]}\\ 6 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\end{pmatrix}$;

19) $A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 5 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; 20) $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 5\\ 6 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 6\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5 & 0\\ 5 & 0 & 0 & \text{[illegible]}\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\2&1&4\\3&0&5\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0&7\\0&1&4&0\\0&0&4&0\\4&0&0&1\end{pmatrix}$; 22) $A=\begin{pmatrix}3&1\\14&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\5&3&3\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&2&5&0\\0&0&4&0\\4&0&0&3\end{pmatrix}$;

) $A=\begin{pmatrix}3&5\\6&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0&2\\0&1&4&0\\0&0&4&0\\7&0&0&2\end{pmatrix}$; 24) $A=\begin{pmatrix}3&7\\2&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}4&0&3\\2&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&2&5&0\\0&0&4&0\\4&0&0&3\end{pmatrix}$;

) $A=\begin{pmatrix}3&2\\4&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\4&2&5\\6&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&0&0&7\\0&1&4&0\\0&0&4&0\\2&0&0&2\end{pmatrix}$.

XI. Доказать, что множество векторов пространства, отображающихся линейным преобразованием в один и тот же вектор, является линейным многообразием. Найти базис направляющего подпространства и вектор сдвига указанного многообразия, если линейное преобразование в некотором базисе имеет матрицу:

1) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$; 3) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$; 5) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&0\\3&3&0\end{pmatrix}$;

6) $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&1&1\\4&2&3\end{pmatrix}$; 7) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\2&2&1\end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&1&2\end{pmatrix}$; 9) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&-1\\3&1&-2\end{pmatrix}$;

1) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\2&2&2\end{pmatrix}$; 12) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\2&2&2\end{pmatrix}$; 13) $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; 14) $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\4&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; 15) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$;

1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$; 17) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&3\\3&3&4\end{pmatrix}$; 18) $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&2&-2\\3&3&-3\end{pmatrix}$; 19) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\2&1&1\end{pmatrix}$; 20) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&0\end{pmatrix}$.

2) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; 22) $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&3&5\\1&1&1\end{pmatrix}$; 23) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&1\\3&3&2\end{pmatrix}$; 24) $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&3&5\end{pmatrix}$; 25) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&4&1\end{pmatrix}$.

XII. Пусть V - пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix}a&в\\c&d\end{pmatrix}$$

с элементами из поля R. Найти собственные векторы и собственные значения отображения φ, ставящего в соответствие каждой матрице указанного вида транспонированную ей матрицу. Найти размерность собственных подпространств относительно этого преобразования.

XIII. Доказать, что любое линейное преобразование действительного пространства нечетной размерности оставляет на месте некоторую прямую, проходящую через начало координат.

XIV. Доказать, что если φ и ψ невырожденные линейные преобразования некоторого линейного пространства, то преобразования φψ и ψφ имеют одни и те же собственные значения.

XV. Доказать, что если характеристический многочлен невырожденного линейного преобразования действительного линейного пространства имеет комплексный (не действительный) корень, то в этом пространстве существует двумерное подпространство, инвариантное относительно указанного преобразования.

XVI. Показать, что собственные векторы линейного преобразования относящиеся к собственному значению 0, и только они, лежат в ядре этого преобразования.

XVII. Показать, что собственные векторы, относящиеся к ненулевым собственным значениям, лежат в области значений линейного преобразования.

XVIII. Если характеристические многочлены двух линейных преобразований совпадают, что можно сказать о самих линейных преобразованиях? Совпадают ли они?

XIX. Доказать, что линейное преобразование является невырожденным тогда и только тогда, когда оно не имеет нулевых собственных значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глухов М.М., Солодовников А.С. Задачник-практикум по высшей алгебре. М.: Просвещение, 1969.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
3. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука . 1978.