Пространство геометрических векторов

3.1. Геометрические векторы. Линейные операции над ними

Вектором мы будем называть направленный отрезок[1]. Обозначение: $\overline{a}$ или $\overline{AB}$, где A и B — начало и конец вектора. *Длина* (*модуль*) вектора обозначается $|\overline{a}|, |\overline{AB}|$. Вектор нулевой длины обозначается $\overline{0}$ и называется *нулевым вектором*.

Векторы, направления которых параллельны, называются *коллинеарными*. Обозначение: $\overline{a}||\overline{b}$. Коллинеарные векторы могут быть *сонаправленными* или *противоположно направленными* ($\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ или $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$).

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *равными* ($\overline{a} = \overline{b}$), если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$. Отсюда следует, что векторы не "привязаны" ни к какой точке и свободно "перемещаются" параллельно самим себе. Векторы называются *противоположными* ($\overline{a} = -\overline{b}$), если $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*.

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов является вектор, для нахождения которого можно пользоваться двумя правилами: правилом параллелограмма и правилом треугольника[2] .

Правило параллелограмма: *суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, приложенных к одной точке, называется вектор, совпадающий с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$. (Сумма приложена к той же точке, что и слагаемые.)

Правило треугольника: если начало вектора $\overline{b}$ совмещается с концом вектора $\overline{a}$, то *суммой* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор, направленный из начала вектора $\overline{a}$ в конец вектора $\overline{b}$.

---

[1] Такое определение не совсем корректно и влечет некоторые противоречия. Тем не менее в целях упрощения мы вынуждены ограничиться таким "определением". Во избежание упомянутых выше противоречий достаточно четко представлять себе, что вектор — это геометрический объект, заданный только *длиной* и *направлением*.

[2] Из геометрических соображений легко понять, что эти правила эквивалентны. Заметим тем не менее, что правило треугольника более удобно при суммировании более чем двух векторов.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, равный сумме вектора $\overline{a}$ и вектора, противоположного $\overline{b}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ на действительное число λ называется вектор $\overline{b} = \lambda\overline{a}$ такой, что: 1) $|\overline{b}| = |\lambda||\overline{a}|$, 2) $\overline{b} \upuparrows \overline{a}$, если $\lambda > 0$, и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}$, если $\lambda < 0$.

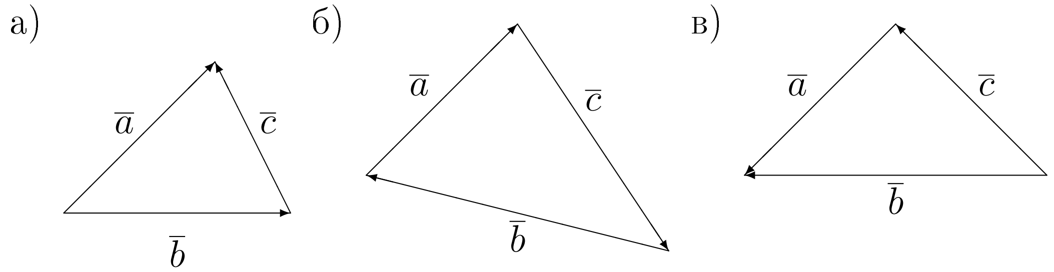
Из этого определения следует, что

$$\overline{a}||\overline{b} \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}\ (\overline{a} = \lambda\overline{b} \text{ или } \overline{b} = \lambda\overline{a}). \tag{3.1}$$

Вектор $\overline{a}_0$ называется *ортом* вектора $\overline{a}$, если $|\overline{a_0}| = 1$ и $\overline{a_0} \upuparrows \overline{a}$. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным* вектором или просто *ортом*.

3.1. Задачи

1. Выразите вектор $\overline{c}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



2. Какому условию удовлетворяют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

а) если $|\overline{a}+\overline{b}| = |\overline{a}-\overline{b}|$; б) $|\overline{a}+\overline{b}| > |\overline{a}-\overline{b}|$; в) $|\overline{a}+\overline{b}| < |\overline{a}-\overline{b}|$?

3. В параллелограмме $ABCD$ даны векторы $\overline{AB} = \overline{a}$ и $\overline{AD} = \overline{b}$, M — точка пересечения диагоналей. Найдите векторы $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, $\overline{MC}$, $\overline{MD}$.

4. Даны векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $|\overline{a}| = 3, |\overline{b}| = 4$, $(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = 120^\circ$. Постройте вектор $\overline{c} = 2\overline{a} - 1,5\overline{b}$. Найдите его длину.

5. Докажите, что сумма векторов, соединяющих точку пересечения медиан треугольника с его вершинами, равна нулевому вектору.

6. В треугольнике OAB единичные векторы направлений $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ равны соответственно $\overline{m}$ и $\overline{n}$, $\overline{OM}$ — медиана. Сделайте чертеж и выразите векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{OM}$ через $\overline{m}$ и $\overline{n}$:

а) если $|\overline{OA}| = 2, |\overline{OB}| = 6$; б) $|\overline{OA}| = 6, |\overline{OB}| = 4$.

7. Даны три компланарных единичных вектора $\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$, $(\widehat{\overline{m},\overline{n}}) = \alpha$, $(\widehat{\overline{n},\overline{p}}) = \beta$. Постройте вектор $\overline{u} = a\overline{m} + b\overline{n} + c\overline{p}$:

а) если $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$, $a = 2, b = 1, c = 3$;

б) $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$, $a = 3, b = 1, c = -2$.

3.2. Пространство геометрических векторов

Множество геометрических векторов в совокупности с введенными в предыдущем разделе линейными операциями над ними будем называть *пространством геометрических векторов.*

Заметим, что на самом деле существует несколько пространств геометрических векторов, поскольку мы можем рассматривать векторы только на плоскости, или в трехмерном пространстве, а можем и вовсе на прямой. Договоримся только, что если мы рассматриваем пространство векторов на плоскости, то в него входят **все** векторы плоскости, и т. д. Будем обозначать эти пространства векторов, включающие векторы, лежащие на прямой, на плоскости или в пространстве, соответственно V_1, V_2 и V_3.

Заметим, что результат применения линейных операций над векторами не выводит нас за пределы рассматриваемого пространства геометрических векторов. В частности, пусть $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ — векторы из V_n ($n = 1, 2$ или 3). Тогда сумма этих векторов, умноженных на некоторые числа

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k,$$

называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ и тоже принадлежит V_n. Вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ называются *коэффициентами линейной комбинации.*

Линейная комбинация, все коэффициенты которой равны нулю, называется *тривиальной.* Будем называть набор векторов *системой векторов.* Понятно, что тривиальная линейная комбинация любой системы векторов всегда равна нулевому вектору. А может ли нетривиальная линейная комбинация быть нулевой? Это уже зависит от заданной системы векторов.

Набор векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ называется *линейно зависимым*, если найдется нулевая нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы, т. е. существуют такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, не все одновременно равные нулю, что

$$\lambda_1\overline{a}_1 + \cdots + \lambda_k\overline{a}_k = \overline{0}. \tag{3.2}$$

В противном случае говорят, что векторы $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ *линейно независимы.* Таким образом, для линейно независимых векторов $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k$ равенство (3.2) возможно только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Пусть дана система векторов $\{a\} = \{\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k\}$. *Базисом системы* *векторов* $\{a\}$ называется максимальная (по числу векторов) линейно независимая подсистема векторов из $\{a\}$.

Пример 1. Когда система из одного вектора $\{\overline{a}\}$ будет линейно зависимой?

Решение. Для одного вектора $\overline{a}$ соотношение (3.2) перепишется так:

$$\lambda\overline{a} = \overline{0}, \tag{3.3}$$

при этом линейная комбинация должна быть нетривиальная, т.е. $\lambda \neq 0$. Но при ненулевом λ соотношение (3.3) выполняется тогда и только тогда, когда $\overline{a}$ — нулевой вектор.

Ответ: $\overline{a}$ линейно зависим $\iff$ $\overline{a} = \overline{0}$. ■

Пример 2. Когда система векторов $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ линейно зависима?

Решение. Запишем нулевую линейную комбинацию для этой системы:

$$\lambda\overline{a} + \mu\overline{b} = \overline{0}, \tag{3.4}$$

и, поскольку линейная комбинация нетривиальная, это означает, что $\lambda \neq 0$ или $\mu \neq 0$. Пусть для определенности $\lambda \neq 0$. Тогда из (3.4) можно выразить $\overline{a}$:

$$\overline{a} = -\frac{\mu}{\lambda}\overline{b}.$$

Это последнее соотношение эквивалентно коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (см. (3.1)). Также понятно, что из коллинеарности пары векторов следует их линейная зависимость.

Ответ: система векторов $\{\overline{a}, \overline{b}\}$ линейно зависима $\iff$ $\overline{a}||\overline{b}$. ■

Максимальная (по включению) линейно независимая система векторов из V_n ($n = 1, 2$ или 3) называется *базисом* пространства V_n. Слова "максимальная по включению" в данном случае означают, что при добавлении к такой системе любого вектора из V_n теряется свойство линейной независимости. Таким образом, если $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ — базис пространства V_n, то:

1) векторы $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ образуют линейно независимую систему;

2) $\forall\overline{e} \in V_n$ система $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n, \overline{e}\}$ линейно зависима.

В каждом пространстве геометрических векторов существует множество различных базисов, но они все состоят из одного и того же числа векторов. Число векторов в базисе пространства называется *размерностью* этого пространства.

Пример 3. Базисом пространства V_1 является любой ненулевой вектор из этого пространства, поскольку любые два вектора из V_1 будут коллинеарны и, следовательно, линейно зависимы (см. пример 2). ■

Следующие две теоремы определяют базисы в пространствах V_2 и V_3.

Теорема *Любая пара неколлинеарных векторов плоскости* V_2 *образует базис плоскости.*

Теорема *Любая тройка некомпланарных векторов пространства* V_3 *образует базис* V_3.

Таким образом, V_n может читаться как “пространство геометрических векторов размерности n”.

Пусть $\{e\} = \{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ — базис пространства V_n, $\overline{x}$ — произвольный вектор из V_n. Тогда вектор $\overline{x}$ может быть *разложен по базису* $\{e\}$, т. е. может быть представлен, причем единственным образом, в виде линейной комбинации векторов из $\{e\}$.

Действительно, по определению базиса система векторов $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$, $\overline{x}$ является линейно зависимой, следовательно, по определению линейной зависимости существует нулевая нетривиальная линейная комбинация векторов этой системы:

$$\lambda_1\overline{e}_1 + \dots + \lambda_n\overline{e}_n + \lambda\overline{x} = \overline{0},$$

причем не все коэффициенты равны нулю. Заметим, что, хотя некоторые из коэффициентов могут быть нулевые, $\lambda \neq 0$. Действительно, если $\lambda = 0$, то $\lambda_1\overline{e}_1 + \dots + \lambda_n\overline{e}_n = \overline{0}$, а это равенство для линейно независимой системы векторов $\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n$ возможно только при всех нулевых коэффициентах, а наша линейная комбинация не является тривиальной. Поскольку $\lambda \neq 0$,

$$\overline{x} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\overline{e}_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda}\overline{e}_n \doteq x_1\overline{e}_1 + \dots + x_n\overline{e}_n.$$

Числа $x_1, \dots, x_n$ называются *координатами* вектора $\overline{x}$ в базисе $\{e\}$.

Пример 4. Определить, образуют ли векторы $\overline{e}_1(1,3,4)$, $\overline{e}_2(3,5,2)$ и $\overline{e}_3(1,0,2)$ базис пространства V_3.

Решение. Размерность V_3 равна трем, так что базис V_3 должен состоять также из трех векторов. Для того чтобы векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образовывали базис, необходимо и достаточно, чтобы они были линейно независимыми. Запишем их нулевую линейную комбинацию

$$\lambda_1\overline{e}_1 + \lambda_2\overline{e}_2 + \lambda_3\overline{e}_3 = \overline{0}.$$

Теперь вместо всех векторов подставим столбцы их координат:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 3\lambda_1 \\ 4\lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ 0 \\ 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0; \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 &= 0; \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

Таким образом, система векторов будет линейно независима тогда и только тогда, когда полученная система линейных уравнений будет иметь только нулевое (*тривиальное*) решение. Ясно, что у этой системы всегда существует нулевое решение, поэтому нас интересует, единственно ли ее решение? Если решение единственно, то система будет определенной (см. с. 35) и ее матрица будет невырожденной. Найдем определитель матрицы системы линейных уравнений:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12 - 10 = -22 \neq 0.$$

Итак, система линейных уравнений определенная, т. е. имеет единственное решение и (поскольку она заведомо имеет нулевое решение), таким образом, не имеет ненулевых решений, следовательно, только тривиальная линейная комбинация векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ будет нулевой, значит, эта система векторов линейно независима и образует базис. ■

Пример 5. Найти координаты вектора $\overline{x} = (2, -3, 1)$ в базисе $\overline{e}_1 = (1, 1, 1)$, $\overline{e}_2 = (1, 1, 0)$, $\overline{e}_3 = (1, 0, 0)$.

Решение. Нам нужно найти такие числа x_1, x_2, x_3, что $\overline{x} = x_1\overline{e}_1 + x_2\overline{e}_2 + x_3\overline{e}_3$. Записав это равенство в координатной форме (как в предыдущем примере), получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 2; \\ x_1 + x_2 &= -3; \\ x_1 &= 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решать методом Крамера; то, что ее определитель не равен нулю, только подтверждает тот факт, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образуют базис. Решая систему, получим $x_1 = 1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 5$, или $\overline{x} = \overline{e}_1 - 4\overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$. ■

3.2. Задачи

1. При каком значении λ из линейной независимости системы векторов $\{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ вытекает линейная независимость системы $\{\lambda\overline{a}_1 + \overline{a}_2, \overline{a}_1 + \lambda\overline{a}_2\}$?

2. Найдите все значения λ, при которых вектор $\overline{b}$ линейно выражается через векторы $\overline{a}_1$, $\overline{a}_2$, $\overline{a}_3$:

а) если $\overline{a}_1 = (2,3,5)$, $\overline{a}_2 = (3,7,8)$, $\overline{a}_3 = (1,-6,1)$, $\overline{b} = (7,-2,\lambda)$;

б) $\overline{a}_1 = (4,4,3)$, $\overline{a}_2 = (7,2,1)$, $\overline{a}_3 = (4,1,6)$, $\overline{b} = (5,9,\lambda)$.

3. Найдите все базисы системы векторов $\overline{a}_1 = (3,2,3)$, $\overline{a}_2 = (2,3,4)$, $\overline{a}_3 = (3,2,1)$, $\overline{a}_4 = (4,1,-2)$.

4. Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$ образуют базис. Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе:

а) $\overline{e}_1 = (1,1,1)$, $\overline{e}_2 = (1,1,0)$, $\overline{e}_3 = (1,0,0)$, $\overline{x} = (3,2,1)$;

б) $\overline{e}_1 = (1,1,1)$, $\overline{e}_2 = (1,1,2)$, $\overline{e}_3 = (1,2,3)$, $\overline{x} = (6,9,14)$;

в) $\overline{e}_1 = (2,1,-3)$, $\overline{e}_2 = (3,2,-5)$, $\overline{e}_3 = (1,-1,1)$, $\overline{x} = (6,2,-7)$;

г) $\overline{e}_1 = (1,2,1)$, $\overline{e}_2 = (2,3,3)$, $\overline{e}_3 = (3,7,1)$, $\overline{x} = (3,1,4)$.

5. Покажите, что тройка векторов, содержащая два коллинеарных вектора, линейно зависима.

6. Покажите, что для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ и любых чисел α, β, γ система векторов $\alpha\overline{a} - \beta\overline{b}$, $\gamma\overline{b} - \alpha\overline{c}$, $\beta\overline{c} - \gamma\overline{a}$ линейно зависима.

7. Две системы векторов называются *эквивалентными*, если каждый вектор одной системы есть линейная комбинация векторов другой системы и наоборот. Покажите, что если три вектора связаны соотношением $\alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c} = \overline{0}$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, то системы векторов $\{\overline{a}, \overline{b}\}$, $\{\overline{a}, \overline{c}\}$, $\{\overline{b}, \overline{c}\}$, $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ эквивалентны.

8. Когда система векторов имеет единственный базис?

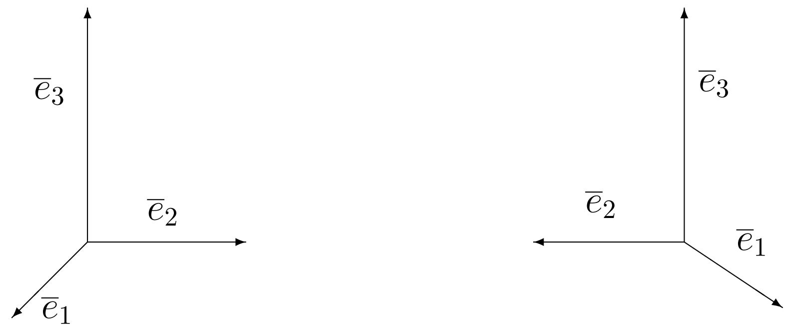
3.3. Декартов базис и система координат

В пространстве V_3 геометрических векторов рассмотрим различные базисы $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ такие, что

$$\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \text{ попарно перпендикулярны и } |\overline{e}_1| = |\overline{e}_2| = |\overline{e}_3| = 1. \tag{3.5}$$

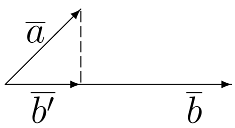
Такие базисы называются *ортонормированными*. Некоторые из них “похожи” на другие, т. е. совмещаются при подходящих поворотах. Если брать только “непохожие” базисы, то останется только два, будем говорить, *класса ориентации*[3]. Представители этих классов показаны на следующем рисунке.

[3] Более точное определение дано на с. 63.



правый *левый*

Правый ортонормированный базис в V_3 (удовлетворяющий свойству (3.5)) называется *декартовым прямоугольным базисом.* Обозначают такой базис $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$. Совокупность точки O (начала координат) и базиса $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ называется *прямоугольной декартовой системой координат.*



Проекцией $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется длина вектора $\overline{b}'$, взятая со знаком "плюс", если $\overline{b} \uparrow\uparrow \overline{b}'$, и со знаком "минус", если $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{b}'$.

Координаты вектора $\overline{a}$ в декартовом прямоугольном базисе являются проекциями $\overline{a}$ на координатные оси:

$\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$;

$x = \text{пр}_{\overline{i}}\overline{a}; y = \text{пр}_{\overline{j}}\overline{a}; z = \text{пр}_{\overline{k}}\overline{a}$.

Если α, β, γ — углы, которые вектор $\overline{a}$ составляет с векторами $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, то:

$x = |\overline{a}| \cos\alpha; y = |\overline{a}| \cos\beta; z = |\overline{a}| \cos\gamma$.

$\overline{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{1}{|\overline{a}|}(x, y, z)$.

Величины $\cos\alpha, \cos\beta$ и $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* вектора $\overline{a}$ и связаны соотношением: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Длина вектора находится по формуле $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Вектор $\overline{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ называется радиусом-вектором точки $M(x, y, z)$.

Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — две точки в прямоугольной декартовой системе координат, то вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$[4].

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — две точки в прямоугольной декартовой системе координат, а точка M делит отрезок AB в отношении $\dfrac{|AM|}{|MB|} = \lambda$. Координаты точки M находятся по следующим формулам

[4]Т. е. координаты вектора находятся по правилу "из конца отнять начало".

деления отрезка в данном отношении:

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\ y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\ z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Если точка M — середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогла $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$, $z_M = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Замечание. Если точка M находится вне отрезка AB (так называемое *внешнее деление*, то значение λ берется отрицательным.

Пусть $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ — векторы в прямоугольной декартовой системе координат. Тогда:

$$\overline{a} = \overline{b} \Longleftrightarrow x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2;$$

$$\overline{a} \| \overline{b} \Longleftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2};$$

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{c} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$

$$\overline{b} = \lambda \overline{a} \Longleftrightarrow \overline{b} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1).$$

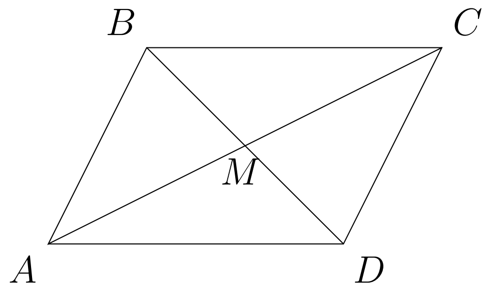
Пример 6. $\overline{a} = (3, 2, z); |\overline{a}| = 5; (\widehat{\overline{a}, Oz})$ — острый угол. Определить z.

Решение

$$|\overline{a}| = \sqrt{9 + 4 + z^2} = 5;$$

$$z^2 = 25 - 9 - 4; z^2 = 12; z = \sqrt{12}. \blacksquare$$

Пример 7. Даны смежные вершины параллелограмма $A(2, -3)$, $B(4, 2)$ и точка пересечения его диагоналей $M(7, 0)$. Найти координаты двух других вершин.



Решение. Найдем координаты вершины C. Так как $\dfrac{AC}{CM} = \dfrac{2}{1} = 2$ и точка C находится вне отрезка AM, то точка C делит отрезок AM в отношении $\lambda = -2$. Применим формулу деления отрезка в данном отношении:

$$x_C = \frac{x_A - 2x_M}{1-2} = \frac{2 - 2\cdot 7}{-1} = 12,\ \ y_C = \frac{y_A - 2y_M}{1-2} = \frac{-2 - 2\cdot 0}{-1} = 3.$$

Аналогично найдем координаты точки D:

$$x_D = \frac{x_B - 2x_M}{1-2} = \frac{4 - 2\cdot 7}{-1} = 10, \ y_D = \frac{y_B - 2y_M}{1-2} = \frac{2 - 2\cdot 0}{-1} = -2.$$

Проверим правильность решения, найдя координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ (при правильном решении они должны совпадать). $\overline{AB} = (4-2, 2-(-3)) = (2,5)$; $\overline{DC} = (12-10, 3-(-2) = (2,5) = \overline{AB}$. Проверка подтверждает правильность найденного решения. ■

3.3. Задачи

1. Укажите геометрический смысл проекций единичного вектора.

2. Докажите, что точки $A(3,-1,2)$, $B(1,2,-1)$, $C(-1,1,-3)$, $D(3,-5,3)$ — вершины трапеции $ABCD$.

3. Найдите вектор $\overline{b}$, если $|\overline{b}| = 75$, $\overline{c} = 16\overline{i} - 15\overline{j} + 12\overline{k}$ и $\overline{b} \uparrow\downarrow \overline{c}$.

4. Даны точки $A(1,2,3)$ и $B(3,-4,6)$. Постройте вектор $\overline{AB}$, его проекции на оси координат. Определите длину и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$.

5. На плоскости даны точки: $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$, $D(-2,3)$. Докажите, что $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ — базис. Разложите вектор $\overline{CD}$ по этому базису.

6. Вектор $\overline{r}$ составляет с осями координат равные острые углы, $|\overline{r}| = 2\sqrt{3}$. Определите координаты вектора $\overline{r}$.

7. Зная одну из вершин $\triangle ABC$: $A(2,-5,3)$ и векторы, совпадающие с двумя его сторонами $\overline{AB} = (4,1,2)$ и $\overline{BC} = (3,-2,5)$, найдите остальные вершины и сторону $\overline{CA}$.

8. Даны векторы $\overline{p} = (3,2,1)$, $\overline{q} = (-1,1,-2)$, $\overline{r} = (2,1,-3)$. Найдите разложение вектора $\overline{s} = (11,2,5)$ по базису $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$.

9. Основанием правильного тетраэдра $SABC$ служит треугольник ABC со стороной 1. SO — высота пирамиды. Найдите координаты векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OS}$, если за оси прямоугольной декартовой системы координат принять прямые OA, OK, OS. OK лежит в плоскости ABC, и точки K и C лежат по одну сторону от прямой OA[5].

10. В треугольнике с вершинами $A(3,2,1)$, $B(-1,0,2)$, $C(1,4,2)$ найдите длину медианы AM.

11. Отрезок AB разделен на 3 равные части точками M_1 и M_2 начиная от точки A. Найти координаты точек деления.

12. Докажите, что координаты точки пересечения медиан M треугольника Δ_{ABC} могут быть найдены по формулам $x_M = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$, $z_M = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}$.

[5] Таким образом, векторы $\overline{OA}$, $\overline{OK}$ и $\overline{OS}$ образуют правую тройку. См. с. 63.

Произведения векторов

4.1. Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на косинус угла между ними. Обозначается через $(\overline{a}, \overline{b})$ или $\overline{a}\overline{b}$:

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = |\overline{a}| \text{пр}_{\overline{a}} \overline{b} = |\overline{b}| \text{пр}_{\overline{b}} \overline{a}.$$

Свойства скалярного произведения

1) $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$;
2) $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$;
3) $(\lambda\overline{a})\overline{b} = \lambda(\overline{a}\overline{b})$;
4) $\overline{a}^2 = \overline{a}\overline{a} = |\overline{a}|^2$;
5) $\cos(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{a}||\overline{b}|}$;
6) $\text{пр}_{\overline{b}}\overline{a} = \dfrac{\overline{a}\overline{b}}{|\overline{b}|}$ (геометрический смысл);
7) $\overline{a}\overline{b} = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{ccc} \overline{a} & \perp & \overline{b}, \\ |\overline{a}| & = & 0, \\ |\overline{b}| & = & 0; \end{array}\right.$
8) работа силы $\overline{\mathcal{F}}$, действующей на материальную точку при перемещении ее из начала в конец вектора $\overline{s}$, вычисляется по формуле: $A = \overline{\mathcal{F}}\overline{s}$ (физический смысл).

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются *ортогональными*, если $\overline{a}\overline{b} = 0$. Понятие ортогональности векторов эквивалентно понятию перпендикулярности их направлений, если считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому вектору[1]. Обозначать эту ситуацию мы будем через $\overline{a} \perp \overline{b}$. Если векторы $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ заданы своими координатами в прямоугольном декартовом базисе[2], то их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\overline{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

в частности,

$$\overline{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2; \ |\overline{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2};$$

[1]Это вполне разумное допущение, и мы так и будем считать впредь. То, что нулевой вектор не имеет направления, следует понимать так, что он **направлен во все стороны одновременно**. Отсюда, в частности, вытекает то, что нулевой вектор параллелен любому вектору, и в то же время он перпендикулярен любому вектору, в том числе самому себе.

[2]**Эта же формула верна в любом другом ортонормированном базисе.**

$$\cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример 1. Даны вершины треугольника ABC: $A(1, -1, 2)$, $B(0, 3, -2)$ и $C(1, 2, 0)$. Найти угол при вершине C, проекцию $\overline{AB}$ на $\overline{AC}$, длину высоты BD, опущенной из вершины B.

Решение

$$\cos C = \frac{\overline{CB} \cdot \overline{CA}}{|\overline{CB}||\overline{CA}|};$$

$$\overline{CB} = (-1, 1, -2);\ \overline{CA} = (0, -3, 2);\ \overline{CB} \cdot \overline{CA} = 0 - 3 - 4 = -7;$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6};\ |\overline{CA}| = \sqrt{0 + 9 + 4} = \sqrt{13}.$$

$$\cos C = \frac{-7}{\sqrt{6 \cdot 13}} = -\frac{7}{\sqrt{78}} \Rightarrow C \text{ — тупой угол.}$$

$$\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AC}|};\quad \overline{AB} = (-1, 4, -4);\ \overline{AC} = (0, 3, -2).$$

$$\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{(-1, 4, -1)(0, 3, -2)}{\sqrt{0 + 9 + 4}} = \frac{12 + 2}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}}.$$

$$BD = \sqrt{AB^2 - \left(\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB}\right)^2} = \sqrt{(1 + 16 + 16) - \frac{196}{13}} =$$

$$= \sqrt{\frac{429 - 196}{13}} = \sqrt{\frac{233}{13}}.$$

Ответ. $C = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{78}}$, $\text{пр}_{\overline{AC}}\overline{AB} = \frac{14}{\sqrt{13}}$, $BD = \sqrt{\frac{233}{13}}$. ■

4.1. Задачи

1. В каком случае скалярное произведение векторов равно проекции одного вектора на направление другого?

2. Проверьте, верны ли равенства, если $a = |\overline{a}|$, $b = |\overline{b}|$:

$$\text{а) } a\overline{a} = a^2;\quad \text{б) } \overline{a}^2 a = a^3;\quad \text{в) } (\overline{a}\,\overline{a})\overline{b} = \overline{a}^2\overline{b};$$

$$\text{г) } a^2\overline{a} = a^3;\quad \text{д) } (\overline{a}\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2.$$

3. Дан вектор $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$, где $\overline{m}$ и $\overline{n}$ — единичные векторы, угол между которыми $120°$. Найдите $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{n}})$, $\cos(\widehat{\overline{a},\overline{m}})$.

4. При каком значении параметра α векторы $\overline{a} = \alpha\overline{i} - 3\overline{j} + 2\overline{k}$ и $\overline{b} = \overline{i} + 2\overline{j} - \alpha\overline{k}$ ортогональны?

5. На осях Ox, Oy, Oz отложены отрезки, равные 4, и на них построен куб. Пусть M — центр верхней грани, N — центр правой боковой грани. Определите векторы $\overline{OM}$ и $\overline{ON}$ и угол между ними.

6. Найдите проекцию вектора $\overline{a} = (4, -3, 2)$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

7. Вычислите работу, производимую силой $\overline{\mathcal{F}} = (3, -2, -5)$, если точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $A(2, -3, 5)$ в положение $B(3, -2, -1)$.

8. Даны векторы $\overline{a} = (3, -1, 5)$ и $\overline{b} = (1, 2, -3)$. Найдите вектор $\overline{m}$, если $\overline{m} \perp Oz$, $\overline{m}\,\overline{a} = 9$, $\overline{m}\,\overline{b} = -4$.

9. В плоскости xOy найдите вектор $\overline{p}$, ортогональный вектору $\overline{a} = (5, -3, 4)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

10. Найдите угол между биссектрисами углов xOy и yOz.

11. Единичные векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$. Вычислите $\overline{a}\overline{b} + \overline{b}\overline{c} + \overline{c}\,\overline{a}$.

12. Докажите, что вектор $\overline{p} = (\overline{a}\overline{c})\overline{b} - (\overline{a}\overline{b})\overline{c}$ ортогонален вектору $\overline{a}$.

13. При каком условии вектор $(\overline{a} + \overline{b})$ ортогонален вектору $(\overline{a} - \overline{b})$?

14. Упростите:
$(3\overline{i} - 2\overline{j})\overline{j} + (\overline{j} - 2\overline{k})\overline{j} - (\overline{i} - 2\overline{j})^2$.

15. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

а) $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 1$, $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{\pi}{3}$;

б) $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}| = 2$, $(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

16. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{p}$ и $\overline{q}$, если векторы $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$ и $\overline{b} = 5\overline{p} - 4\overline{q}$: а) перпендикулярны; б) параллельны?

4.2. Векторное произведение

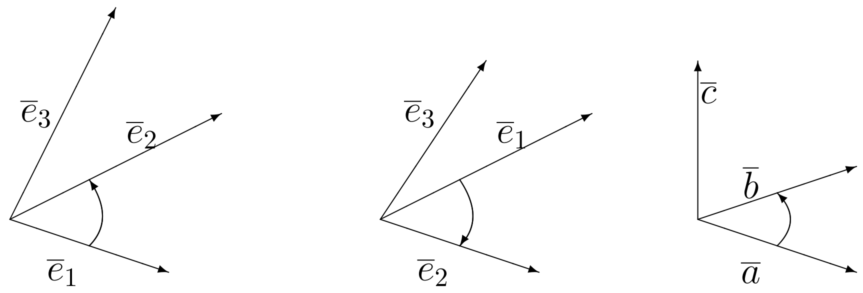
Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ называется *правой*, если для наблюдателя, находящегося в конце вектора $\overline{e}_3$, кратчайший поворот от $\overline{e}_1$ к $\overline{e}_2$ происходит против часовой стрелки. В противном случае тройка называется *левой*[3]. *Векторным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (обозначается $[\overline{a}, \overline{b}]$ или $\overline{a} \times \overline{b}$) называется вектор $\overline{c}$, определяемый следующими условиями:

1) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

2) $|\overline{c}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin(\widehat{\overline{a}, \overline{b}})$;

3) если $\overline{a} \nparallel \overline{b}$, то векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку.

[3]Заметим, что это определение согласуется с рисунком на с. 57.



а) правая тройка; б) левая тройка; в) $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Заметим, что векторное произведение, в отличие от скалярного, задается только в трехмерном пространстве геометрических векторов V_3.

Свойства векторного произведения

1) $\overline{a} \| \overline{b} \Longleftrightarrow \overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ (критерий коллинеарности векторов);

2) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$;

3) $\lambda \overline{a} \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$;

4) $(\overline{a} + \overline{b}) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$;

5) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, вычисляется по формуле $S = |\overline{a} \times \overline{b}|$ (геометрический смысл).

Если векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ заданы координатами $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в прямоугольном декартовом базисе, то

$$\overline{a} \times \overline{b} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

или (в символической записи[4])

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \overline{k}.$$

Механический смысл векторного произведения состоит в следующем: если $\overline{F}$ — вектор силы, а $\overline{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы, имеющий свое начало в точке A , $m_A(\overline{F})$ —момент силы $\overline{F}$ относительно точки A, то

$$m_A(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}.$$

Пример 2. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, где $|\overline{m}| = 3$, $|\overline{n}| = 1$; $(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = \dfrac{2\pi}{3}$.

Решение. $S = |\overline{a} \times \overline{b}|$; $\overline{a} \times \overline{b} = (2\overline{m} + \overline{n}) \times (\overline{m} - 2\overline{n}) =$

$$= 2\overline{m} \times \overline{m} - 4\overline{m} \times \overline{n} + \overline{n} \times \overline{m} - 2\overline{n} \times \overline{n} = 4\overline{n} \times \overline{m} + \overline{n} \times \overline{m} = 5\overline{n} \times \overline{m}.$$

[4] См. пример 4 со с. 31.

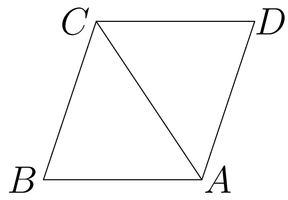
$$S = |5\overline{n} \times \overline{m}| = 5|\overline{n}||\overline{m}| \sin\frac{2\pi}{3} = 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{15\sqrt{3}}{2}}. \blacksquare$$

Пример 3. Найти площадь треугольника ABC: $A(1,2,3)$; $B(3,2,1)$; $C(1,-1,0)$.

Решение. Если достроить треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$, то $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}|\overline{BA} \times \overline{BC}|$;

$\overline{BA} = (-2,0,2)$, $\overline{BC} = (-2,-3,-1)$;

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 6\overline{i} - 6\overline{j} + 6\overline{k};$$



$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{36+36+36} = \underline{3\sqrt{3}}$. $\blacksquare$

4.2. Задачи

1. Можно ли сделать вывод, что $\overline{a} = \overline{c}$, если $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \times \overline{b}$?

2. При каком условии ненулевые векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}$ образуют базис трехмерного пространства?

3. Докажите равенство

$$\operatorname{tg}(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{|\overline{a} \times \overline{b}|}{\overline{a}\overline{b}}.$$

4. Каким координатным плоскостям параллельны векторы $\overline{a} \times \overline{i}$, $\overline{a} \times \overline{j}$, $\overline{a} \times \overline{k}$?

5. Даны вершины треугольника ABC: $A(1,-1,2)$, $B(5,-6,2)$, $C(1,3,-1)$. Вычислите длину высоты, опущенной из вершины B.

6. Сила $\overline{\mathcal{P}} = (2,2,9)$ приложена к точке $A(4,2,-3)$. Определите величину и направляющие косинусы момента силы относительно точки $C(2,4,0)$.

7. С помощью векторного произведения найдите вектор $\overline{m}$, зная, что он ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и $\overline{m} \cdot \overline{c} = 10$. $\overline{a} = (2,-3,1)$, $\overline{b} = (1,-2,3)$, $\overline{c} = (1,2,-7)$.

8. Зная две стороны треугольника ABC: $\overline{AB} = 3\overline{p} - 4\overline{q}$ и $\overline{BC} = \overline{p} + 5\overline{q}$, вычислите длину его высоты CD, если:

а) $|\overline{p}| = |\overline{q}| = 1$, $(\widehat{\overline{p},\overline{q}}) = \dfrac{\pi}{2}$;

б) $|\overline{p}| = 2$, $|\overline{q}| = 3$, $(\widehat{\overline{p},\overline{q}}) = \dfrac{\pi}{3}$.

9. Вектор $\overline{m}$ перпендикулярен векторам $\overline{a} = (4,-2,-3)$ и $\overline{b} = (0,1,3)$ и образует с осью Oy тупой угол. $|\overline{m}| = 26$. Найдите координаты вектора $\overline{m}$.

10. Найдите вектор $\overline{m}$, если $\overline{m}\overline{j} = 3$, $\overline{m} \times \overline{j} = -2\overline{k}$.

11. Дано: $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{c} \times \overline{d}$, $\overline{a} \times \overline{c} = \overline{b} \times \overline{d}$. Докажите, что $(\overline{a} - \overline{d})$ и $(\overline{b} - \overline{c})$ — коллинеарны.

12. Найдите $|\overline{a} \times \overline{b}|$, если $|\overline{a}| = 10$, $|\overline{b}| = 2$ и $\overline{a}\overline{b} = 12$.

13. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен $\dfrac{\pi}{4}$; $|\overline{a}| = |\overline{b}| = 5$. Найдите площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}$ и $3\overline{a} + 2\overline{b}$.

14. Определите и постройте вектор $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$, если $\overline{a} = 2\overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{b} = 3\overline{j} + 2\overline{k}$.

15. Докажите, что:

а) $(\overline{a} \times \overline{b})^2 \leq \overline{a}^2\overline{b}^2$;

б) $\forall\ \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in V_3$ ($\overline{a} \times \overline{d}$, $\overline{b} \times \overline{d}$, $\overline{c} \times \overline{d}$ — компланарны);

в) $(\overline{a} \times \overline{b})^2 + (\overline{a}\overline{b})^2 = \overline{a}^2\overline{b}^2$.

16. Упростите:

а) $(\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{a} - \overline{b}) + 3\overline{a} \times (\overline{a} + 2\overline{b}) + (2\overline{a} + 3\overline{b}) \times \overline{a}$;

б) $(\overline{a} + 2\overline{b} - 3\overline{c}) \times (\overline{a} - \overline{b}) + (\overline{a} + \overline{c}) \times (\overline{b} + \overline{c}) + (3\overline{a} + \overline{b}) \times (\overline{b} - \overline{c})$.

17. Вычислите площадь параллелограмма, диагонали которого определяют векторы $\overline{d}_1 = 3\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{d}_2 = \overline{m} - 5\overline{n}$, если $|\overline{m}| = |\overline{n}| = 1$, $(\widehat{\overline{m}, \overline{n}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

4.3. Смешанное произведение

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\overline{a} \times \overline{b}$ на вектор $\overline{c}$. Обозначение: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{a} \times \overline{b})\overline{c}$. Так же как и векторное, смешанное произведение определяется только в V_3.

Свойства смешанного произведения

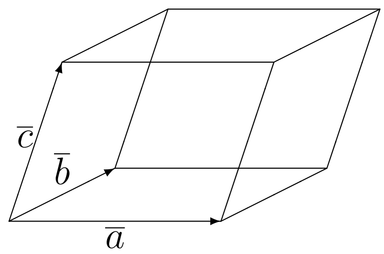
1) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b} = -\overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{c}\overline{b}\overline{a}$;

2) $(\lambda\overline{a})\overline{b}\overline{c} = \lambda(\overline{a}\overline{b}\overline{c})$;

3) $(\overline{a_1} + \overline{a_2})\overline{b}\overline{c} = \overline{a_1}\overline{b}\overline{c} + \overline{a_2}\overline{b}\overline{c}$;

4) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$.

Геометрический смысл смешанного произведения



Модуль смешанного произведения $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$, а знак отвечает за ориентацию тройки $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$: $\overline{a}\overline{b}\overline{c} > 0$, если тройка правая, и $\overline{a}\overline{b}\overline{c} < 0$ в противном случае[5].

Если векторы заданы своими координатами в декартовом прямоугольном базисе: $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то их смешанное произведение вычисляется по формуле

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 4. Проверить, лежат ли точки $A(2, -3, 4)$, $B(2, 3, -4)$, $C(-2, 3, 4)$, $D(2, 3, 4)$ в одной плоскости, найти объем тетраэдра $ABCD$.

Решение. Найдем векторы: $\overline{AB}(0, 6, -8)$; $\overline{AC}(-4, 6, 0)$; $\overline{AD}(0, 6, 0)$. Вычислим их смешанное произведение

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -8 \\ -4 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-32) = 192.$$

Поскольку смешанное произведение отлично от нуля, векторы некомпланарны и, следовательно, точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости.

Так как объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объема соответствующего параллелепипеда, имеем

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}| = \frac{1}{6} \cdot 192 = 32. \blacksquare$$

4.3. Задачи

1. В каком случае параллелепипед, построенный на трех векторах, имеет наибольший объем?

2. Какой геометрический смысл имеет выражение $\dfrac{|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|}{|\overline{a} \times \overline{b}|}$ для пирамиды, построенной на некомпланарных векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$?

3. Вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол между которыми равен $\frac{\pi}{6}$, $|\overline{a}| = 6$, $|\overline{b}| = |\overline{c}| = 3$. Вычислите $|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$.

[5] А если $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, то по свойству 4) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, т. е. линейно зависимы, и, следовательно, вопрос об ориентации этой тройки не ставится.

4. Докажите тождество: $(\overline{a}+\overline{b})(\overline{b}+\overline{c})(\overline{c}+\overline{a}) = 2\overline{a}\overline{b}\overline{c}$.

5. Докажите аналитически и геометрически, что для любых векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ векторы $(\overline{a}-\overline{b})$, $(\overline{b}-\overline{c})$, $(\overline{c}-\overline{a})$ — компланарны.

6. Даны вершины пирамиды $OABC$. Вычислите объем, площадь грани ABC, высоту пирамиды, опущенную на эту грань, если:

а) $A(5,2,0), B(2,5,0), C(1,2,4)$;

б) $A(3,5,6), B(3,6,5), C(0,2,4)$.

7. Докажите, что векторы $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$, $\overline{c} = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$ компланарны. Разложите вектор $\overline{c}$ в базисе $\overline{a}, \overline{b}$.

8. Найдите объем тетраэдра, расположенного в первом октанте, построенного на векторах $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$, если эти векторы направлены по биссектрисам координатных углов и длина каждого из них равна двум.

9. Докажите, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}, \overline{b}, \overline{a}\times\overline{b}$, равен $|\overline{a}\times\overline{b}|^2$.

10. Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найдите вершину D, если она лежит на оси Oy.

11. Докажите:

а) $(\overline{a}+\overline{b})\overline{a}(\overline{c}+\overline{b}) = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}$;

б) $|\overline{a}\overline{b}\overline{c}| \leq |\overline{a}|\,|\overline{b}|\,|\overline{c}|$;

в) если $\overline{a}\times\overline{b} + \overline{b}\times\overline{c} + \overline{c}\times\overline{a} = \overline{0}$, то $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — компланарны.

12. Докажите, что для любых чисел α и β выполняется равенство

$$\overline{a}\overline{b}(\overline{c} + \alpha\overline{a} + \beta\overline{b}) = \overline{a}\overline{b}\overline{c}.$$