ТЕМА: Кривые второго порядка, заданные каноническими уравнениями.

Эта глава будет посвящена изучению линий второго порядка, то есть линий, уравнения которых будут второй степени относительно переменных *x* и *y.*

§ 1. Окружность

Определение: Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Пусть С (а, в) – центр, r – расстояние от центра до любой точки окружности, М (x,y) – любая точка окружности, тогда

$$|\,CM\,| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r \qquad или \qquad (x-a)^2+(y-b)^2 = r^2.$$

Если $M_1(x_1;\ y_1)$ - лежит вне окружности, то

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2 > r^2$$

Если $M_2(x_2;\ y_2)$ - лежит внутри окружности, то

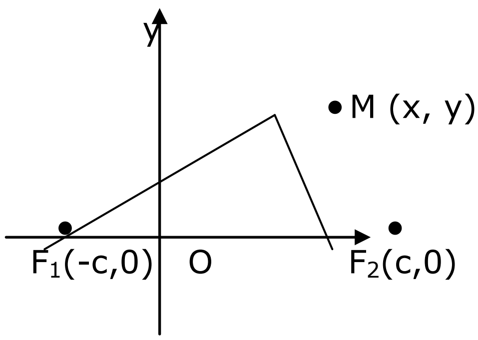
$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2 < r^2$$

Если центр лежит в начале системы координат, то

$$x^2+y^2=r^2$$

§ 2. Эллипс

Определение: Эллипсом называется геометрическое место точек, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.



Пусть на плоскости даны две точки F_1 и F_2. Пусть M – произвольная точка эллипса, F_1 и F_2 - его фокусы, $|MF_1|$ и $|MF_2|$– фокальные радиусы точки M. Обозначим $F_1F_2 = 2c$, а сумму фокальных радиусов $-2a$. Тогда по определению: $|MF_1| + |MF_2| = 2a$.

Введем прямоугольную систему координат: середина F_1F_2 – начало отсчета, ось Ох – прямая F_1F_2. В этой системе координат $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ и $M(x,y)$.

$$MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ .$$

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \ .$$

С помощью алгебраических преобразований приводим к виду:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Мы доказали, что координаты любой точки М(x,y) эллипса удовлетворяют данному уравнению.

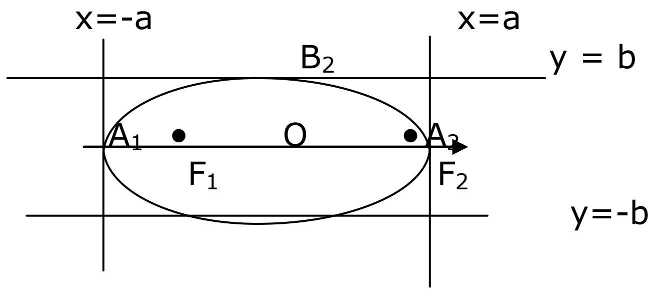
Докажем обратное, то есть если координаты x и y удовлетворяют уравнению (1), то точка М с координатами x и y удовлетворяет соотношению $|MF_1| + |MF_2| = 2a$, то есть лежит на эллипсе.

Пусть координаты точки М удовлетворяют уравнению (1). Тогда $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \left|\frac{cx + a^2}{a}\right| = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$

и аналогично $MF_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$. Так как $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $|x| \le a$ и, учитывая, что $0 < c < a$, имеем $a + \frac{a}{c}x > 0,\ a - \frac{a}{c}x > 0$. Следовательно, $|MF_1| + |MF_2| = a + \frac{c}{a}x + a - \frac{a}{c}x = 2a$. Что и требовалось доказать.

Уравнение (1) называется каноническим уравнением эллипса.

§ 3. Исследование формы эллипса.



Если M (x, y) лежит на эллипсе, то точки $M^{/}$ (-x, y), $M^{//}$ (x, -y) и $M^{///}$ (-x, -y) тоже лежат на эллипсе, то есть оси Ox и Oy – оси симметрии, O – центр симметрии эллипса.

Из уравнения (1) следует $|x| \le a,\ |y| \le b$, это геометрически означает, что эллипс расположен внутри прямоугольника со сторонами x = a, x = -a, y = b, y = -b.

Точки пересечения эллипса с осями называются вершинами эллипса: A_1(-a,0), A_2(a,0), B_1(0,-b), B_2(0,b)

A_1A_2 = 2a – большая ось, B_1B_2 = 2b – меньшая ось.

Любая прямая пересекает эллипс не более, чем в двух точках. В случае a = b уравнение примет вид $x^2 + y^2 = a^2$ (окружность с центром в т. O). Окружность – частный случай эллипса, когда F_1 и F_2 совпадают с центром.

Если a < b, то большей полуосью будет b, меньшей a, фокусы расположены по оси Oy.

Определение: Отношение половины расстояния между фокусами эллипса к большей полуоси эллипса называется эксцентриситетом и обозначается: $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где c < a, то есть 0 < ε < 1

$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$, если ε = 0, то есть окружность, если $\varepsilon \to 1$, то $\frac{b}{a} \to 0$, то есть ε характеризует «вытянутость» эллипса.

Замечание:

$$|MF_1| = r_1 = a + \frac{a}{c}x = a + \varepsilon x, \quad |MF_2| = r_2 = a - \frac{a}{c}x = a - \varepsilon x.$$

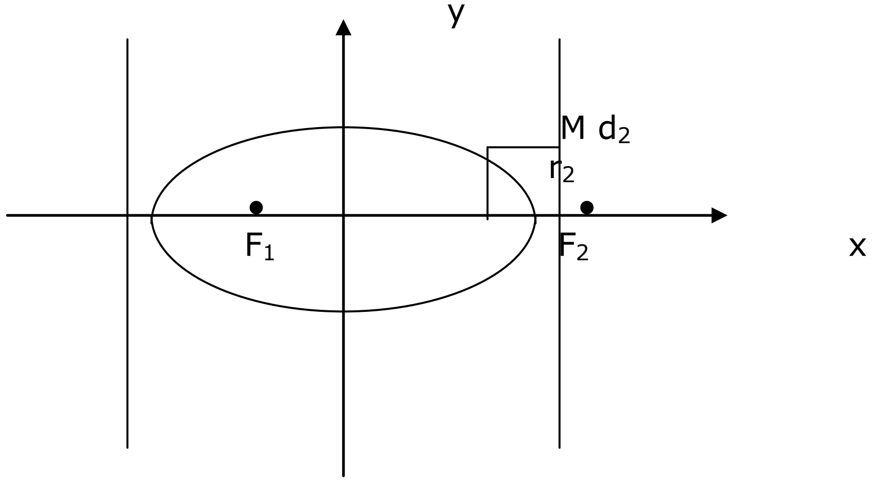
§ 4. Директрисы эллипса.

Определение: Две прямые, перпендикулярные оси эллипса, на которой расположены его фокусы, и отстоящие от центра эллипса на расстояние $\frac{a}{\varepsilon}$, где a – большая полуось, ε - его эксцентриситет, называются директрисами эллипса, соответствующими данному фокусу.

Окружность, где ε = 0, не имеет директрис.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a \succ b), \ x = \frac{a}{\varepsilon}, \ x = -\frac{a}{\varepsilon}$ -- уравнения директрис.

Так как для эллипса $0 \prec \varepsilon \prec 1, \ то \ \frac{a}{\varepsilon} \succ a$, то есть точки пересечения директрис с осью Ох отстоят от центра дальше вершины эллипса.



<u>Теорема:</u> Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса эллипса к расстоянию от той же точки до директрисы, соответствующей рассматриваемому фокусу, было равно эксцентриситету эллипса.

Доказательство:

Необходимость. Рассмотрим $F_2(c,0)$, $x = \frac{a}{\varepsilon}$- директриса.

Расстояние до фокуса $r_2 = a - \varepsilon x$, расстояние до директрисы

$$d = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|, \quad d_2 = \left| \frac{x\varepsilon - a}{\varepsilon} \right| = \frac{|\varepsilon x - a|}{\varepsilon} = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon} = \frac{r_2}{\varepsilon} \ \ или \ \ \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

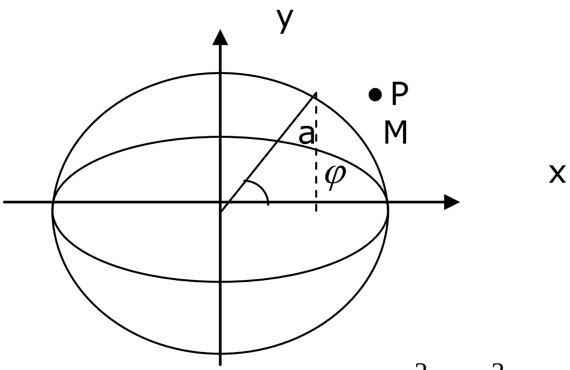
Достаточность. Пусть М (x, y) – такая точка, что $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$, где r_2 - расстояние от М до фокуса F_2, d_2 – расстояние от М до соответствующей директрисы.

Докажем, что М лежит на эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad d_2 = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|, \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad r^2 = \varepsilon^2 d^2$ или

$$\left(x-c \right)^2+y^2=\varepsilon^2\left(x-\frac{a}{\varepsilon}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

§ 5. Параметрическое уравнение эллипса.



Пусть дан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Рассмотрим окружность $X^2+Y^2=d^2$, которая переходит в эллипс в результате сжатия $x=X,\ y=\frac{b}{a}Y,$ $\quad x=a\cos\varphi,\ y=\frac{b}{a}Y=\frac{b}{a}a\sin\varphi \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \end{cases}$ - параметрическое

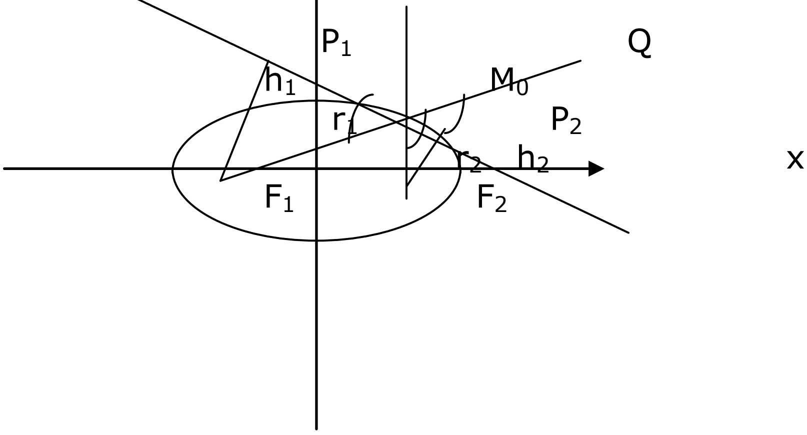
уравнение эллипса,

где $\varphi=(Ox,OP)$ - эксцентрический угол.

§ 6. Оптическое свойство эллипса.

<u>**Теорема:**</u> Касательная к эллипсу в произвольной его точке M_0 является биссектрисой внешнего угла M_0 треугольника $F_1F_2M_0$.

Доказательство:



Рассмотрим эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Уравнение касательной в M_0 (x_0,y_0): $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-1=0$, h_1 и h_2 – расстояния от F_1, F_2 соответственно до касательной.

$$h_1:h_2=\left|-\frac{cx_0}{a^2}-1\right|:\left|\frac{cx_0}{a^2}-1\right|=\left|1+\frac{\varepsilon x_0}{a}\right|:\left|1-\frac{\varepsilon x_0}{a}\right|=|\,a+\varepsilon x_0\,|:|\,a-\varepsilon x_0\,|=r_1:r_2$$

$\Delta\ F_1P_1M_0 \sim \Delta\ F_2P_2M_0$ – так как треугольники прямоугольные и $\frac{F_1P_1}{F_2P_2}=\frac{F_1M_0}{F_2M_0}$ $\to$ $\angle\ F_1M_0P_1 = \angle\ F_2M_0P_2$. $\angle F_1M_0P_1 = \angle F_2M_0Q$ отсюда вытекает способ построения касательной к эллипсу в произвольной точке.

§7. Гипербола

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Составим уравнение гиперболы.

Рис. 7.1.

Пусть F_1 и F_2 – фокусы гиперболы и e – единичный отрезок. Обозначим длину $|F_1F_2|$ через 2c, а разность расстояний любой точки гиперболы до фокусов – через 2a. Из определения следует, что c>a. Прямую, проходящую через фокусы F_1, F_2, примем за ось Ox, а за ось Oy – перпендикуляр к Ox, проходящий через середину отрезка F_1F_2. Точки E_1 и E_2 на осях координат выберем так, что $|OE_1|=|OE_2|$=e. Тогда фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$.

Пусть M(x; y) – любая точка гиперболы. По определению $||MF_1|-|MF_2||=2a$. Переходя к координатам, получим равенство

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a.$$

(1)

Приведем это уравнение к более простому виду следующим образом. Из (1) следует, что

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

После возведения обеих частей равенства в квадрат и некоторого упрощения получим

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Освобождаясь в этом уравнении от радикала, приведем уравнение (1) к виду

$$x^2\left(c^2-a^2\right)-a^2y^2=a^2\left(c^2-a^2\right).$$

(1*)

Так как c>a, то $c^2-a^2>0$. Введем обозначение

$$c^2-a^2=b^2.$$

(2)

Уравнение (1*) примет вид

$$x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

(3)

Уравнение (3) называется каноническим уравнением гиперболы.

Покажем, что линия, определяемая уравнением (3), есть гипербола, то есть, что всякая точка $M_1(x_1;\ y_1)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (3), есть точка гиперболы.

Рассмотрим две точки $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(4)

По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$|F_1M_1|=\sqrt{(x_1+c)^2+y_1^2},$$

$$|F_2M_1|=\sqrt{(x_1-c)^2+y_1^2}.$$

Так как координаты точки $M_1(x_1;\ y_1)$ удовлетворяют уравнению (3), получим

$$|F_1M_1|=\sqrt{x_1^2\frac{c^2}{a^2}+2cx_1+a^2},$$

$$|F_2M_1|=\sqrt{x_1^2\frac{c^2}{a^2}-2cx_1+a^2}.$$

Откуда

$$|F_1M_1| = \pm\left(x_1\frac{c}{a} + a\right),$$

$$|F_2M_1| = \pm\left(x_1\frac{c}{a} - a\right).$$

Из формулы (4) и уравнения (3) следует, что c>a и |x|≥A. Для того, чтобы правые части последних равенств были положительные, необходимо из двух знаков в случае x≥a выбрать знак "+", а в случае x≤-a выбрать знак "-" . Тогда для точек с абсциссой x≥a

$$|F_1M_1| - |F_2M_1| = 2a,$$

(5)

для точек с абсциссой x≤-a

$$|F_1M_1| - |F_2M_1| = -2a.$$

(6)

Из равенств (5) и (6) следует, что точка M_1 есть точка гиперболы.

Итак, всякая точка, координаты которой удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

есть точка гиперболы, и обратно. Поэтому это уравнение называется уравнением гиперболы.

§8. Исследование формы гиперболы

Так как уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ содержит только квадрат переменных x и y, то одновременно с координатами каждой точки M(x; y) ему будут удовлетворять координаты точек M_1(x; -y), M_2(-x; y), M_3(-x; -y). Следовательно, гипербола располагается симметрично относительно осей координат и относительно начала координат.

Найдем точки пересечения гиперболы с осями координат. Гипербола пересекает ось Ox в двух точках A_1(-a; 0) и A_2(a; 0), которые называются вершинами гиперболы, а ось Oy гипербола не пересекает.

Из двух осей симметрии гиперболы та, которая пересекает гиперболу в двух действительных точках, называется действительной осью. На действительной оси расположены фокусы гиперболы. Вторая ось называется мнимой осью.

Разрешив уравнение (3) относительно y, имеем

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Отсюда видно, что y принимает действительные значения тогда, когда $|x| \geq a$. Следовательно, в полосе плоскости, заключенной между прямыми x=a и x=-a, точек гиперболы нет. Часть гиперболы, для которой x≥a, называется правой ветвью, для которой x≤-a, называется левой ветвью.

Из уравнения (3) для x≥a, y>0 имеем

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\ .$$

Построим прямую

$$Y=\frac{b}{a}X$$ (см. рис.)

(7)

Рис. 8.1.

Сравним ординату y точки M гиперболы с ординатой Y соответствующей точки L этой прямой при X=x. Очевидно, при x>a $x^2>x^2-a^2$, или

$$x>\sqrt{x^2-a^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{b}{a}x>\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

или Y>y. Рассмотрим, как изменяется разность Y-y с изменением абсциссы x:

$$Y-y=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right).$$

Умножая и деля на сопряженное выражение $x+\sqrt{x^2-a^2}$, получим

$$Y-y=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\ .$$

Из этого равенства видно, что по мере увеличения абсциссы x знаменатель возрастает, а числитель остается постоянным. Следовательно, отрезок ML=Y-y неограниченно уменьшается при неограниченном увеличении x и

$$\lim_{x\to\infty}\left[Y-y\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=0\,.$$

Таким образом, точка M гиперболы по мере удаления от начала координат приближается к прямой (7), но прямая (7) не имеет с гиперболой общих точек. Эта прямая называется асимптотой гиперболы. В силу указанной ранее симметрии гипербола имеет ещё одну асимптоту

$$Y = -\frac{b}{a}X \ .$$

(8)

Приведенное выше исследование уравнения (3) позволяет установить форму гиперболы и её расположение относительно системы координат (см. рис.   ).

Рис. 8.2.

Замечание. Уравнение вида

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{или} \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

(9)

есть уравнение гиперболы с действительной осью Оу и мнимой осью Ох.

Определение. Отношение расстояния между фокусами к расстоянию между вершинами называется эксцентриситетом гиперболы и обозначается буквой ε.

Для гиперболы, определенной уравнением (3), ε=c/a, а для гиперболы (9) - ε=c/b.

Замечание. М - произвольная точка гиперболы. Отрезки F_1M и F_2M называются фокальными радиусами точки М. Формулы для вычисления фокальных радиусов имеют вид

$$\left.\begin{matrix} r_1 = a + \varepsilon x \\ r_2 = -a + \varepsilon x \end{matrix}\right\} \text{ для точек правой ветви,}$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 = -a - \varepsilon x \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{matrix}\right\} \text{ для точек левой ветви}$$

гиперболы.

Определение. Две гиперболы, определяемые уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

при одних и тех же значениях a и b, называются сопряженными. Гипербола, у которой a=b, называется равносторонней.

§9. Парабола

Определение. Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до данной точки, называемой фокусом, равно расстоянию до данной прямой, называемой директрисой.

Составим уравнение параболы относительно следующей системы координат: за ось Ох примем прямую, проходящую через фокус F и перпендикулярную к директрисеl;м за начало координат примем точку О – середину отрезка NF (см. рис.); за ось Оу – прямую, проходящую через точку О и параллельную директрисе. Точку E_1 выберем на луче (O,F).

Рис. 9.1.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через р, $|NF|=p$; тогда координаты точки F будут (р/2; 0). Если M(x; y) – любая точка параболы, то по определению $|FM|=|KM|$. Выражая длины отрезков через координаты точек, имеем:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и упростив, получим

$$y^2=2px\ . \qquad (10)$$

Докажем, что любая точка $M_1(x_1; y_1)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (10), то есть

$$y_1^2=2px_1,$$

(11)

принадлежит параболе.

Рассмотрим точку F(р/2; 0) и прямую x=-р/2. Тогда

$$|FM_1|=\sqrt{\left(x_1-\frac{p}{2}\right)^2+y_1^2}\ .$$

Подставляя значение y_1 из равенства (11), имеем

$$|FM_1|=\sqrt{\left(x_1+\frac{p}{2}\right)^2}\ .$$

Расстояние точки M_1 до прямой x=-р/2 будет $|KM_1|=x_1+p/2$. Следовательно, $|FM_1|=|KM_1|$. Таким образом, точка M_1 есть точка параболы.

Итак, уравнению $y^2=2px$ будут удовлетворять координаты точек параболы, и только они. Поэтому это уравнение есть уравнение параболы. Оно называется каноническим уравнением параболы.

§10. Исследование формы параболы

Так как уравнение $y^2 = 2px$ содержит переменную у только в квадрате, то одновременно с координатами каждой точки М(х; у) ему будут удовлетворять и координаты точки M_1(х; –у). Следовательно, парабола располагается симметрично относительно оси Ох. Ось симметрии называется осью параболы.

Парабола проходит через начало координат. Точка О пересечения параболы с осью симметрии называется вершиной параболы.

Из уравнения параболы $x = \frac{y^2}{2p} > 0$. Следовательно, все точки параболы, кроме вершины, лежат с той стороны от оси Оу, где находится фокус. Также из уравнения видно, что с возрастанием абсциссы х ордината у также возрастает