§ 1. Краткие сведения из теории

1. Общее уравнение плоскости

Пусть в пространстве задана декартова система координат $Oxyz$. Тогда уравнение любой плоскости α будет иметь вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C одновременно не равны нулю. Данное уравнение называется общим уравнением плоскости [4 – 6].

Определение: Любой ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости α, называется нормальным вектором этой плоскости.

Коэффициенты A, B, C в уравнении (1) имеют следующий геометрический смысл: вектор $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ перпендикулярен плоскости α. Поэтому данный вектор $\vec{n}$ называют нормальным вектором плоскости, определяемой уравнением (1).

Пример 1. Векторы $\vec{n}_1 = \{3;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{n}_2 = \{-6;\ 2;\ -4\}$, определяемые уравнениями:

$3x-y+2z+1=0$ и $-6x+2y-4z-2=0$,

являются нормальными векторами одной и той же плоскости α (см. рис. 1), причем $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$.

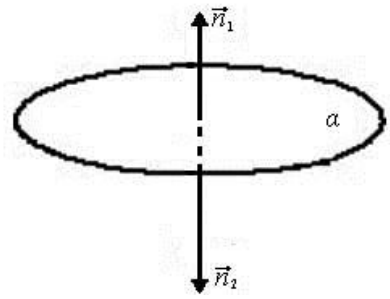
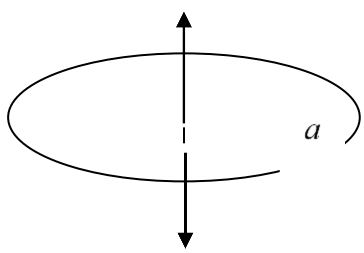


Рис. 1



2. Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение вида:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{2}$$

называется уравнением плоскости в отрезках [4 – 6], где *a, b, c* – это величины отрезков отсекаемых плоскостью α соответственно на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* декартовой системы координат (см. рис. 2).

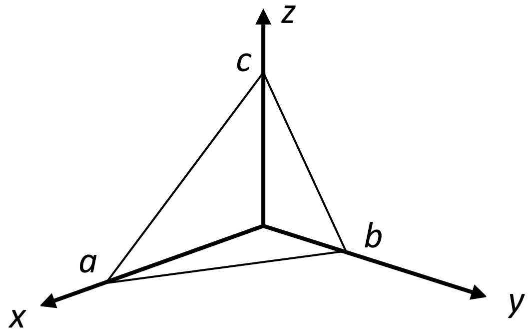


Рис. 2

Пример 2. Пусть плоскость α отсекает на осях *Ox*, *Oy*, *Oz* системы координат соответственно отрезки величиной *a*=5; $b=-3$; *c*=2. Тогда уравнением плоскости в отрезках будет $\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1$.

Заметим, что уравнение $\frac{x}{5}-\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$ является уравнением плоскости α, но не является уравнением плоскости в отрезках (см. общий вид уравнения в отрезках (2)).

3. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, с заданным нормальным вектором

Если для плоскости α заданы – нормальный вектор $\vec{n}=\{A;\ \ B;\ \ C\}$ и точка $M_0(x_0;\ \ y_0;\ \ z_0)$, через которую эта плоскость проходит, то уравнение плоскости α имеет вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0, \tag{3}$$

Для определения уравнения плоскости, в данном случае, можно прибегнуть еще и к следующему приему: так как координаты $\vec{n} = \{A; \quad B; \quad C\}$ являются коэффициентами общего уравнения плоскости (1), то оно запишется в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ где } D \text{ – неизвестно.}$$

Подставив координаты точки M_0 в уравнение, найдем

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

Пример 3. Пусть плоскость проходит через точку $M_0(1; \quad 0; \quad 2)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n} = \{2; \quad -3; \quad 1\}$. Найдем уравнение этой плоскости. В виду (3) уравнение плоскости запишется так: $2(x-1) - 3(y-0) + 1(z-2) = 0$,

$$2x - 3y + z - 4 = 0.$$

Или на основании уравнения (1) уравнение плоскости примет вид:

$$2x - 3y + z + D = 0.$$

Так как точка $M_0(1; \quad 0; \quad 2)$ лежит на плоскости, то ее координаты должны удовлетворять данному уравнению. Подставив их значения в последнее уравнение, найдем $D = -4$. И окончательно получим уравнение

$$2x - 3y + z - 4 = 0.$$

Ответ: $2x - 3y + z - 4 = 0$**.**

4. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; \quad y_0; \quad z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{a} = \{l_1; \quad m_1; \quad n_1\}$ и $\vec{b} = \{l_2; \quad m_2; \quad n_2\}$, то уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

(4)

Определение уравнения плоскости, проходящей через точку

$M_0(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$, параллельной двум неколлинеарным векторам $\vec{a}=\{l_1;\quad m_1;\quad n_1\}$ и $\vec{b}=\{l_2;\quad m_2;\quad n_2\}$ можно свести к пункту 3, взяв в качестве нормального вектора $\vec{n}$ векторное произведение

$$\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}\,]=\left\{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix};\quad -\begin{vmatrix} l_1 & n_1 \\ l_2 & n_2 \end{vmatrix};\quad \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right\}. \qquad (5)$$

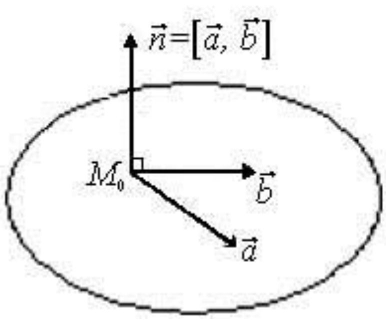


Рис. 3

Пример 4. Найдем уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\quad 0;\quad 1)$ параллельно векторам $\vec{a}=\{2;\quad 1;\quad -1\}$ и $\vec{b}=\{1;\quad -1;\quad 3\}$. Нормальным вектором плоскости будет служить векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{n}=[\vec{a},\quad \vec{b}]=\{2;\quad -7;\quad -3\}$. Тогда общее уравнение плоскости будет иметь вид:

$$2x-7y-3z+D=0.$$

Подставив координаты точки M_0 в данное уравнение, найдем D=1 и получим искомое уравнение

$$2x-7y-3z+1=0.$$

Ответ: $2x-7y-3z+1=0$.

Многие задачи на нахождение уравнения плоскости, рассматриваемые в курсе аналитической геометрии, легко сводятся к одному из случаев, рассмотренных в пунктах 3 и 4.

Пример 5. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(2;\quad -3;\quad 1)$, перпендикулярно плоскостям

$$\alpha_1:\quad x+y-z+1=0 \quad \text{и} \quad \alpha_2:\quad 2x-y+z-1=0.$$

Нормальные векторы плоскостей: $\vec{n}_1=\{1;\quad 1;\quad -1\}$ и $\vec{n}_2=\{2;\quad -1;\quad 1\}$

параллельны плоскости α (см. рис. 4). Подставим координаты точки M_0 и векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ в уравнение (4)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

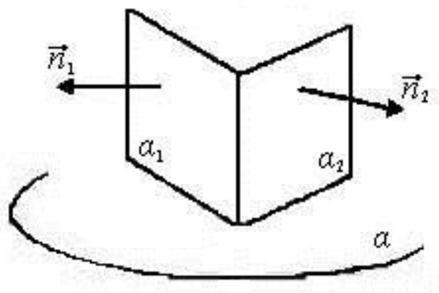


Рис. 4

Раскрывая этот определитель, получим искомое уравнение плоскости

$$y + z + 2 = 0.$$

Ответ: $y + z + 2 = 0.$

Пример 6. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через три заданные точки *A*(1; –2; 3), *B*(2; –4; 1), *C*(0; 1; 2), не лежащие на одной прямой.

Векторы $\overrightarrow{AB} = \{1; \ -2; \ -2\}$ и $\overrightarrow{AC} = \{-1; \ 3; \ -1\}$ принадлежат плоскости α (см. рис. 5).

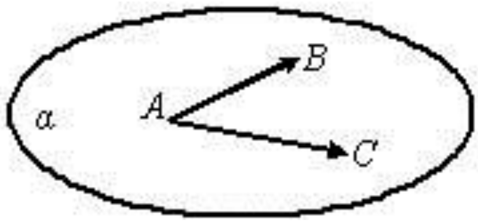


Рис. 5

Возьмем в качестве точки, лежащей на плоскости α, точку *C*. Подставив координаты векторов и координаты точки *C* в уравнение (4), получим уравнение плоскости:

$$8x+3y+z-5=0.$$

Ответ: $8x+3y+z-5=0$**.**

5. Условие перпендикулярности, параллельности и совпадения двух плоскостей заданных общими уравнениями

Если плоскости заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то условие перпендикулярности, параллельности и совпадения этих плоскостей определяются [4 – 7] соответственно соотношениями:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{7}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}. \tag{8}$$

6. Геометрический смысл неравенств

$$Ax + By + Cz + D \geq 0 \quad \text{и} \quad Ax + By + Cz + D \leq 0. \tag{9}$$

Пусть плоскость α задана общим уравнением (1) и начало нормального вектора $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$ лежит на данной плоскости (см. рис. 6).

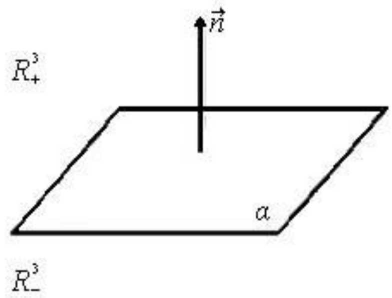


Рис. 6

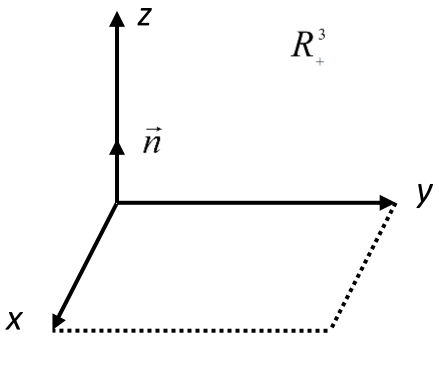
Плоскость α разбивает пространство на два полупространства. Полупространство, содержащее (не содержащее) нормальный вектор $\vec{n} = \{A;\ B;\ C\}$, называется положительным (отрицательным) полупространством R^3_+ (R^3_-), соответствующим уравнению (1).

Решением неравенства $Ax + By + Cz + D \geq 0$ ($Ax + By + Cz + D \leq 0$) является положительное (отрицательное) полупространство R^3_+ (R^3_-), соответствующее уравнению

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пример 7. Рассмотрим координатную плоскость *Oxy*, определяемую уравнением *z*=0. Положительным полупространством этой плоскости, соответствующим уравнению *z*=0, является полупространство, содержащее вектор $\vec{n} = \{0; \quad 0; \quad 1\}$.

Очевидно, что оно является решением неравенства $z \geq 0$ (см. рис.7). Эта же плоскость может задаваться уравнением $-z = 0$. Положительным полупространством R_+^3, которое соответствует последнему уравнению плоскости будет полупространство, содержащее вектор $\vec{n} = \{0; \quad 0; \quad -1\}$ (см. рис. 8), которое и будет решением неравенства $-z \geq 0$.



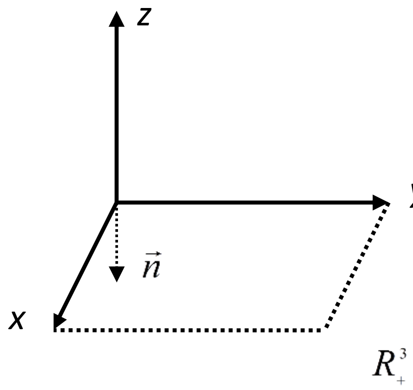


Рис. 7

Рис. 8

7. Нормальное уравнение плоскости

Если нормальный вектор $\vec{n} = \{A_0; \quad B_0; \quad C_0\}$, определяемый общим уравнением

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0,$$

(10)

является единичным, а свободный член уравнения D_0 – отрицательным или равным 0, то уравнение называется нормальным.

Для того чтобы найти нормальное уравнение плоскости, если известно общее уравнение (1), достаточно последнее разделить на длину нормального вектора

$$|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

(11)

взятого со знаком плюс, если свободный член *D* – отрицательный, и со знаком минус, если *D* – положительный.

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0.$$

(12)

Если *D*=0, то знак выбирается произвольно. Коэффициенты и свободный член нормального уравнения будут определены соотношениями

$$A_0 = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad B_0 = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \quad C_0 = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$D_0 = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(13)

Замечание. При D_0=0 существуют два нормальных уравнения, отличающихся друг от друга множителем равным –1.

Пример 8. Пусть плоскость α задана уравнением

$$2x + 2y + z + 3 = 0.$$

Существуют только два уравнения

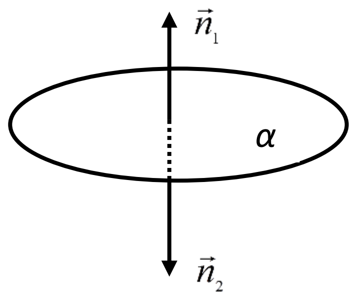


Рис. 9

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 1 = 0, \quad -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0,$$

коэффициенты которых являются координатами единичных нормальных векторов: $\vec{n}_1 = \left\{\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$ и $\vec{n}_2 = \left\{-\frac{2}{3};\ -\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3}\right\}$. Из определения нормального уравнения следует, что нормальным будет то уравнение, у которого свободный член *D* – отрицательный, то есть уравнение

$$-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - 1 = 0.$$

8. Расстояние от точки $M(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$ до плоскости α

Число

$$\sigma(M;\alpha) = A_0 x_0 + B_0 y_0 + C_0 z_0 + D_0,$$

получаемое в результате подстановки координат x_0, y_0, z_0 точки M в левую часть нормального уравнения плоскости (10), называется отклонением точки M от плоскости [1, 5]. Отклонение, в зависимости от того, по какую сторону плоскости находится точка M и нормальный вектор $\vec{n}$, может быть как положительным, так и отрицательным (см. пункт 6), а взятое по модулю, равняется расстоянию от точки $M(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$ до плоскости α.

Таким образом, расстояние от точки $M(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$ до плоскости α вычисляется по формуле

$$\rho(M;\alpha) = |\sigma| = |A_0 x_0 + B_0 y_0 + C_0 z_0 + D_0|$$

(14)

или в виду (12) так

$$\rho(M;\alpha) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

(15)

Замечание. Если плоскость не проходит через начало координат *O*, то подставив координаты точки *O*(0; 0; 0) в левую часть уравнения (10) и учитывая, что свободный член нормального уравнения отрицательный, получим, что отклонение от начала координат до плоскости

$\sigma = D_0 < 0$ и расстояние $\rho = -D_0$.

(16)

То есть, расстояние ρ от начала координат до плоскости будет равно свободному члену, взятому со знаком минус

$$\rho = -\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(17)

Из (16) следует, что начало координат лежит в отрицательном полупространстве. Это означает, что нормальный вектор $\vec{n}_0 = \{A_0; \quad B_0; \quad C_0\}$, определяемый нормальным уравнением (10), и точка *O*(0; 0; 0) всегда лежат по разные стороны плоскости α.

Замечание. Если α, β, γ – углы между вектором $\vec{n}_0$ и осями координат *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно, то из соотношений (13) следует:

$$\cos\alpha = A_0,\ \cos\beta = B_0,\ \cos\gamma = C_0.$$

Тогда учитывая (16), нормальное уравнение запишется в виде:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \rho = 0 \tag{18}$$

9. Пучок плоскостей.

Определение: Совокупность всех плоскостей проходящих через одну прямую называется пучком плоскостей, а прямая – осью пучка.

Пусть даны две пересекающиеся плоскости

$$a_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad a_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Плоскость a проходит через прямую пересечения плоскостей a_1 и a_2, тогда и только тогда, когда она задается уравнением

$$p(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+q(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{19}$$

где *p, q* одновременно не равны нулю. Уравнение (19) называется общим уравнением пучка плоскостей.

Замечание. Если $p \neq 0$, то поделив (19) на *p*, получим уравнение

$$(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \tag{20}$$

где $\lambda = \dfrac{q}{p}$.

Полученным уравнением удобно пользоваться, так как оно зависит только от одного параметра λ, но оно обладает и недостатком: уравнение определяет все плоскости пучка, кроме плоскости

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \text{ (случай когда } p=0).$$

Поэтому, если известно, что точно существует плоскость, принадлежащая пучку, удовлетворяющая условию задачи, и при использовании уравнения (20), мы придем к противоречию, то тогда нужно перейти к рассмотрению уравнения (19), либо просто заключить, что ответом будет плоскость

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Пример 9. В пучке $(x+y-z)+\lambda(x-y+z-1)=0$ найдем плоскость, параллельную вектору $\vec{a}=\{1;\quad 0;\quad -1\}$.

Очевидно, что такая плоскость существует. Уравнения пучка запишем в виде

$$(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(\lambda-1)z-\lambda=0.$$

Так как вектор $\vec{N}=\{1+\lambda;\quad 1-\lambda;\quad \lambda-1\}$ перпендикулярен $\vec{a}$, то

$$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 0+(\lambda-1)\cdot(-1)=0.$$

Отсюда следует 2=0.

Полученное противоречие показывает, что искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$x-y+z-1=0.$$

Ответ: $x-y+z-1=0$ **.**

10. Прямая – как пересечение двух плоскостей

Линия пересечения двух пересекающихся плоскостей α_1 и α_2, заданных соответственно уравнениями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

есть прямая, которая определяется системой уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

(21)

11. Параметрические уравнения прямой

Определение: Любой вектор, параллельный прямой, называется направляющим вектором этой прямой.

Положение прямой в пространстве однозначно определяется точкой $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, принадлежащей прямой, и направляющим вектором

$\vec{a} = \{l;\quad m;\quad n\}$ (см. рис. 10).

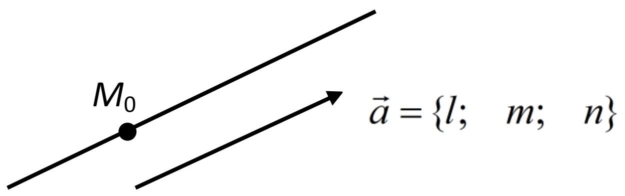


Рис. 10

Если известны точка M_0 и $\vec{a} = \{l;\quad m;\quad n\}$, то в этом случае прямую можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

(22)

12. Канонические уравнения прямой

Если исключить параметр t в уравнениях (22), то получим канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

(23)

13. Переход от одного способа задания прямой к другому

Чтобы перейти к параметрическим уравнениям (22), если прямая L задана как пересечение плоскостей α_1 и α_2, системой (21)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, \end{cases}$$

нужно:

1) найти какое-нибудь решение этой системы.

Так как плоскости пересекаются, то хотя бы один из определителей

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$ – не равен нулю.

Допустим, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда положив $z=z_0$ (обычно $z_0=0$), получим систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z_0 + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z_0 + D_2 = 0. \end{cases}$$, из которой найдем x_0 и y_0.

2) найти направляющий вектор прямой.

В качестве направляющего вектора прямой берется векторное произведение

$$[\vec{n}_1, \quad \vec{n}_2] = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

нормальных векторов $\vec{n}_1 = \{A_1; \quad B_1; \quad C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2; \quad B_2; \quad C_2\}$ плоскостей α_1 и α_2 (см. рис. 11).

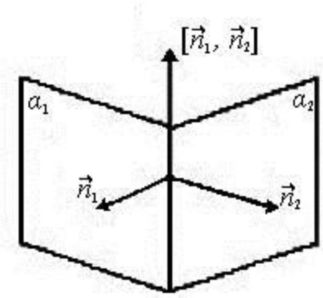


Рис. 11.

Таким образом, параметрические уравнения запишутся в виде:

$$x = x_0 + \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} t, \qquad y = y_0 + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} t, \qquad z = z_0 + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} t,$$

(24)

а канонические уравнения соответственно:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

(25)

Чтобы перейти от параметрических и канонических уравнений к системе (21), заметим, что система (25) равносильна системе

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}, \\ \dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \end{cases} .$$

(26)

состоящей из двух уравнений первой степени, каждое из которых есть уравнение плоскости.

Пример 10. Найдем параметрические уравнения прямой *L*:

$$\begin{cases} x+y-z-1=0, \\ x+y+z-1=0. \end{cases}$$

Положим $x=0$. Тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} y-z-1=0, \\ y+z-1=0, \end{cases}$$

решением которой является $y=1$, $z=0$. Следовательно, точка $M(0;\ \ 1;\ \ 0) \in L$. Тогда по формулам (24) параметрическими уравнениями будут:

$$x = 0 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t,\ \ y = 1 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t,\ \ z = 0 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} t,$$

или

$$x=2t;\ \ y=1-2t;\ \ z=0,$$

а каноническими:

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{0}.$$

Данные уравнения эквивалентны системе

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2}, \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{0} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x+2y-2=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Заметим, что полученная система отличается от первоначальной, хотя и является системой, определяющей эту же прямую.

14. Расстояние от точки до прямой

Расстояние ρ от точки $M_1(x_1;\quad y_1;\quad z_1)$ до прямой L, проходящей через точку $M(x_0;\quad y_0;\quad z_0)$ с направляющим вектором $\vec{a}=\{l;\quad m;\quad n\}$, вычисляется по формуле

$$\rho(M_1,L)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1},\quad \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}$$

(27)

или в координатной форме

$$\rho(M_1,L)=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

(28)

15. Расстояние между прямыми

Кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми

$$L_1:\quad \begin{cases} x=x_1+l_1t, \\ y=y_1+m_1t, \\ z=z_1+n_1t, \end{cases} \qquad L_2:\quad \begin{cases} x=x_2+l_2t \\ y=y_2+m_2t \\ z=z_2+n_2t \end{cases}$$

определяется формулой:

$$\rho(L_1,L_2)=\frac{\left|\left(\overrightarrow{M_1M_2},\quad \vec{a}_1,\quad \vec{a}_2\right)\right|}{\left|\left[\vec{a}_1,\quad \vec{a}_2\right]\right|}$$

(29)

где $M_1(x_1;\quad y_1;\quad z_1)\in L_1$, $M_2(x_2;\quad y_2;\quad z_2)\in L_2$, $\vec{a}_1=\{l_1;\quad m_1;\quad n_1\}$, $\vec{a}_2=\{l_2;\quad m_2;\quad n_2\}$ или в координатной форме

$$\rho(L_1,L_2)=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}$$

(30)

Замечание. Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то расстояние между ними находится, как расстояние от точки M_1 до прямой L_2 по формулам (27), (28).

Если же воспользоваться соотношениям (29), (30) возникает неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как в этом случае числитель в (29), (30) равен нулю, то часто делается ошибочное заключение о том, что расстояние между прямыми равно нулю.

16. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Если прямая L_1 с направляющим вектором $\vec{a}_1 = \{l_1; \quad m_1; \quad n_1\}$ проходит через точку $M_1(x_1; \quad y_1; \quad z_1)$ и L_2 с направляющим вектором $\vec{a}_2 = \{l_2; \quad m_2; \quad n_2\}$ проходит через точку $M_2(x_2; \quad y_2; \quad z_2)$, то необходимым и достаточным условием принадлежности прямых L_1, L_2 одной плоскости, является условие $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \quad \vec{a}_1, \quad \vec{a}_2\right) = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (31)$$