I. Конспекты лекций

1. Поверхности второго порядка

Поверхностью (точнее, алгебраической поверхностью) *второго порядка* называется множество всех точек пространства, координаты которых, в какой – либо аффинной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+$$
$$+2a_{20}y+2a_{30}z+a_{00}=0,$$

(1)

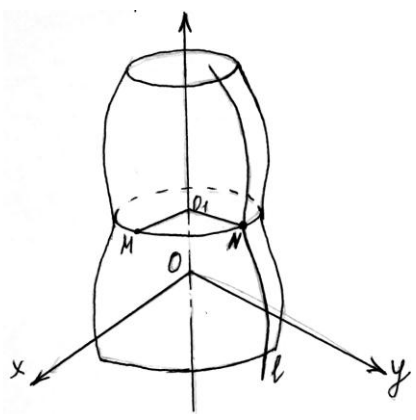
где $a_{ij}=a_{ji}$ – действительные числа, $0\le i,j\le 3$, $a_{11}^2+a_{22}^2+a_{33}^2+a_{12}^2+a_{13}^2+a_{23}^2\ne 0$.

Простейшие поверхности в пространстве – это плоскости. Они являются геометрическими образами уравнений первой степени от трех переменных. Другой достаточно простой тип поверхностей составляют поверхности вращения.

2. Поверхности вращения

Поверхность, которая с каждой своей точкой содержит окружность, полученную вращением этой точки вокруг некоторой прямой *l*, называется *поверхностью вращения*. Прямая *l* называется осью вращения. Окружность, по которой пересекается поверхность вращения с плоскостью, перпендикулярной оси вращения, называется параллелью.

Кривая, по которой пересекается поверхность вращения с плоскостью, проходящей через ось вращения, называется меридианом.



$$l:\begin{cases}F_1(x,y,z)=0\\F_2(x,y,z)=0\end{cases}\qquad(2)$$

Ось вращения - $0z$

Разрешим уравнение (2) относительно

$$0z: \begin{cases} x = \varphi(z) \\ y = \psi(z) \end{cases} \qquad (3)$$

Рис. 1.

Для любых *M(X; Y; Z), N(x;y;z)* $\in l \Rightarrow |0_1 M| = |0_1 N|$.

Т.к. $|0_1 M| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|0_1 N| = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = \varphi^2(z) + \psi^2(z) \qquad (4)$$

(4) – уравнение поверхности вращения вокруг оси *Oz* .

Поверхности вращения II порядка получаются вращением линии II-го порядка вокруг их осей симметрии.

3. Сфера

В декартовых прямоугольных координатах *сфера*, имеющая центр в точке *C(a;b;c)* и радиус *r*, определяется уравнением (5):

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2. \qquad (5)$$

Сфера радиуса *r*, центр которой находится в начале координат, имеет уравнение (6):

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (6)$$

4. Цилиндры

При вращении прямой вокруг оси вращения, параллельной этой прямой, образуется поверхность, которую называют *кривым цилиндром* (рис.2.). Эта поверхность является частным случаем цилиндрической поверхности, получающейся при движении прямой в пространстве, которая остается параллельной своему исходному положению (рис.3). Если на движущейся прямой фиксировать точку, то она опишет кривую, которую называют направляющей цилиндрической поверхности. Можно также сказать, что цилиндрическая поверхность представляет собой множество точек на прямых, параллельных фиксированной прямой. Эти параллельные прямые называют *образующими цилиндрической поверхности*.

В качестве направляющей цилиндра можно взять любую кривую, образованную пересечением цилиндрической поверхности с плоскостью, не параллельной образующим.

Цилиндрической поверхностью II порядка, или *цилиндром II порядка*, называется поверхность, прямолинейные образующие, которые будут параллельны некоторому вектору, а направляющей линией будет линия II порядка.

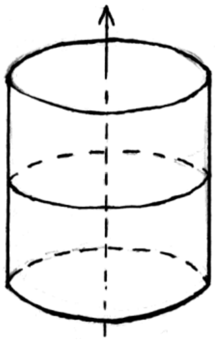


Рис. 2.

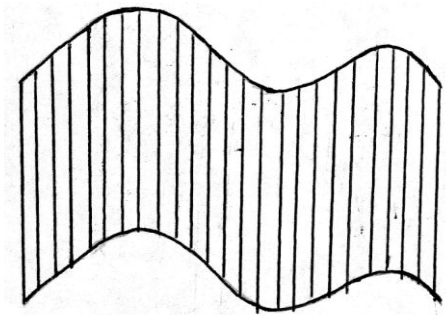


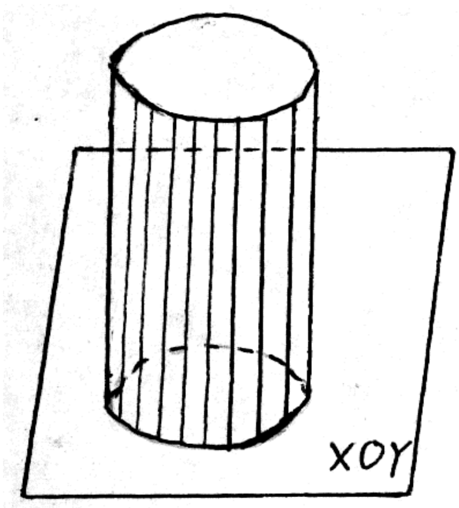
Рис. 3.

Выбирая в качестве прямолинейных образующих прямые параллельные оси *0z,* а в качестве направляющих кривые II порядка на плоскости *Oxy* можно получить следующие цилиндрические поверхности:

Рассмотрим частные случаи.

1. Эллиптический цилиндр задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (7)$$

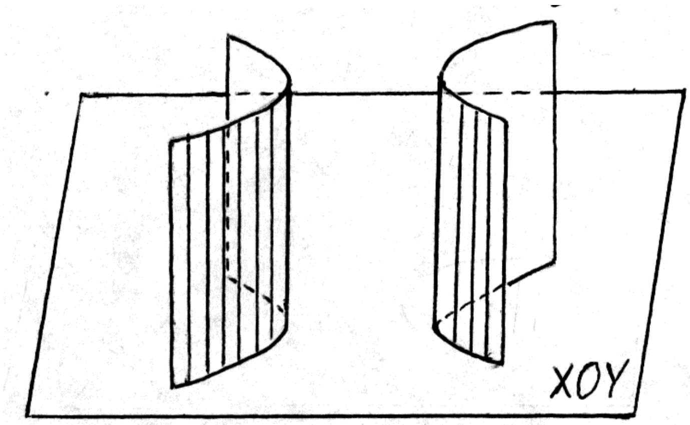


В качестве направляющей может быть выбран эллипс, лежащий в плоскости *0xy*, заданный системой уравнений: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$,

В частности, при *a=b* получим прямой круговой цилиндр (рис. 4.) .

Рис. 4.

2. Гиперболический цилиндр задается уравнением:

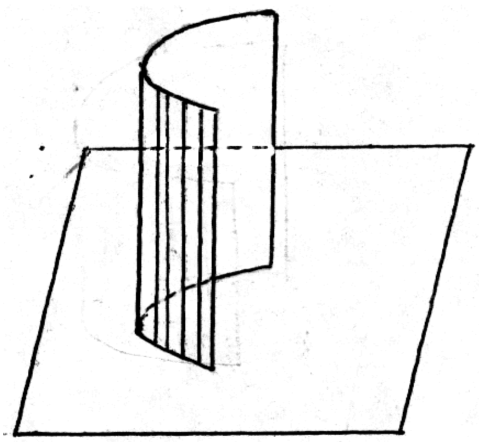


$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

В качестве направляющей может быть выбрана гипербола, заданная системой уравнений: $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ (рис.5).

Рис. 5.

3. Параболический цилиндр задается уравнением:



$$y^2=2px$$

(9)

В качестве направляющей может быть выбрана парабола, заданная системой уравнений: $\begin{cases}y^2=2px\\ z=0\end{cases}$ (рис. 6).

Рис. 6.

4. Мнимый эллиптический цилиндр задается уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

(10)

5. Конусы

Множество точек называется *конусом* с вершиной в точке *O*, если вместе со всякой своей точкой *M*, отличной от точки *O*, оно содержит прямую *OM*. Все содержащиеся в конусе прямые называются его *образующими*.

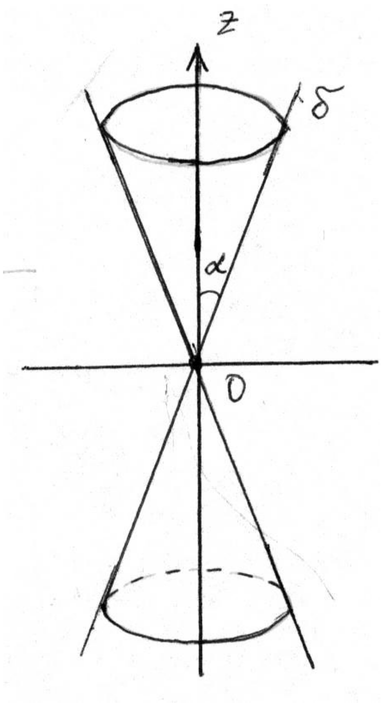
Из определения конуса следует, что он задан, если указаны его вершина и какое-нибудь множество, имеющее во всякой образующей хотя бы одну общую точку и не содержащее точек, не принадлежащих конусу (это множество называется *направляющей конуса*).

Теорема. Всякое однородное уравнение $F(x,y,z)=0$ задает в декартовых координатах конус с вершиной в начале координат.

Конусом II порядка называется поверхность II порядка точки которой удовлетворяют уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{11}$$

Прямой круговой конус можно получить как поверхность вращения



прямой $\begin{cases} x=\dfrac{a}{c}z \\ y=0 \end{cases}$ вокруг оси *Oz*.

Применяя теорему об уравнении поверхности вращения, получаем:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}z^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

(12)

(12) – уравнение прямого кругового конуса.

Рис. 7.

Сечения конуса

Рассмотрим сечения конуса плоскостью. Пусть конус задан уравнением (11). Сечениями являются: эллипс, парабола, гипербола, пара пересекающихся прямых, пара совпадающих прямых.

1) Эллипс (рис.8):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ z=h, \quad h\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}. \\ z=h, \quad h\neq 0 \end{cases}$$

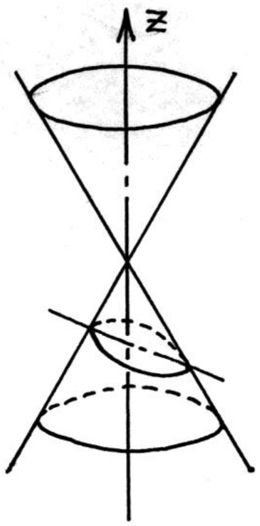


Рис. 8.

2) Гипербола (рис. 9):

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0 \\ y=h, \quad h\neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{b^2}. \\ y=h, \quad h\neq 0 \end{cases}$$

3) Парабола (рис. 10). Секущая плоскость должна быть параллельна образующей:

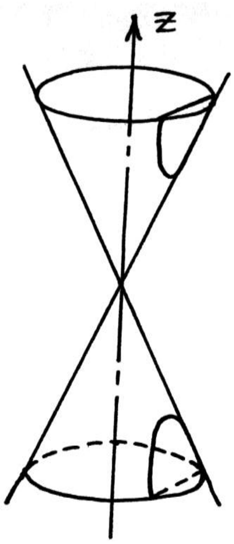


Рис. 9.

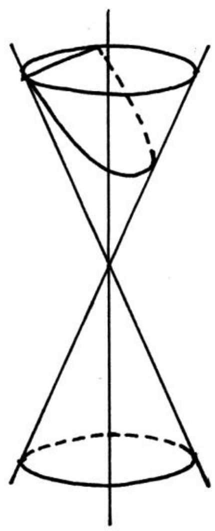


Рис. 10.

Замечание: Вырожденные сечения получаются в том случае, когда плоскость проходит через вершину конуса.

Мнимый конус II порядка.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (13)$$

6. Распадающиеся поверхности второго порядка

$$F(x,y,z)\equiv(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (14)$$

Распадается на 2 плоскости.

1. Плоскости пересекаются. Линия пересечения – ось *0z*.

$$Ax-By=0, Ax+By=0$$
$$F(x,y,z)=A^2x^2-B^2y^2=0 \qquad (15)$$

2. Плоскости параллельны между собой.

$$z^2-a^2=0$$

(16)

3. Плоскости совпадают

$$z^2=0$$

(17)

4. Плоскости мнимые пересекаются

$$A^2x^2+B^2y^2=0$$

(18)

5. Плоскости мнимые и параллельные

$$z^2+a^2=0$$

(19)

7. Эллипсоиды

Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (20)$$

Уравнение (20) называется *каноническим уравнением эллипсоида*. Величины *a*, *b*, *c* суть полуоси эллипсоида (рис. 11). Если все они различны, эллипсоид называется *трехосным*.

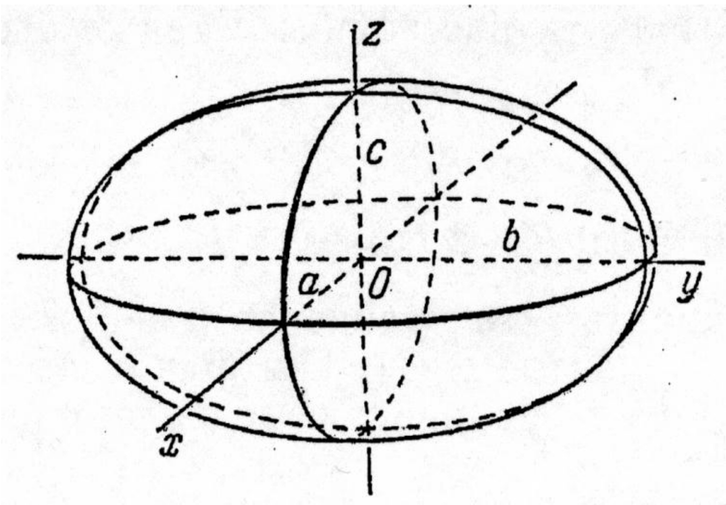


Рис. 11.

При совпадении каких-либо двух полуосей эллипсоид является поверхностью вращения. Если, например, $a=b$, то осью вращения будет Oz. При $a=b>c$ – сжатым. В случае, когда $a=b=c$, эллипсоид представляет собой сферу.

Свойства эллипсоида:

1^0. эллипсоид симметричен относительно начала координат (центра эллипса), осей координат, плоскостей координат.

2^0. эллипсоид – ограниченная поверхность и лежит внутри параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$, $2c$.

$$x = a\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right) \qquad x^2 \le a^2, \quad |x| \le a, \quad |y| \le b, \quad |z| \le c.$$

3^0. сечение трехосного эллипсоида плоскостями, параллельными к координатным плоскостям – эллипсы.

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1-\dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \qquad (||xOy) \qquad \begin{cases} h \le c \\ \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \end{cases}$$

Следовательно, сечение представляет собой эллипс с полуосями

$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ $\begin{cases} z=h=c \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$

4^0. $A_1(-a;0;0)$, $A_2(a;0;0)$, $B_1(0;-b;0)$, $B_2(0;b;0)$, $C_1(0;0;-c)$, $C_2(0;0;c)$ – вершины эллипсоида.

8. Гиперболоиды

Гиперболоидами называются поверхности, которые в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяются уравнениями:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (21)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (22)$$

Гиперболоид, определяемый уравнением (21), называется *однополостным* (рис.12); гиперболоид определяемый уравнением (22) – *двуполостным* (рис.13); уравнения (21) и (22) называются каноническими уравнениями соответствующих гиперболоидов. Величины *а, в, с* называются полуосями гиперболоида. Гиперболоиды, определяемые уравнениями (21) и (22), при *а=в* являются поверхностями вращения.

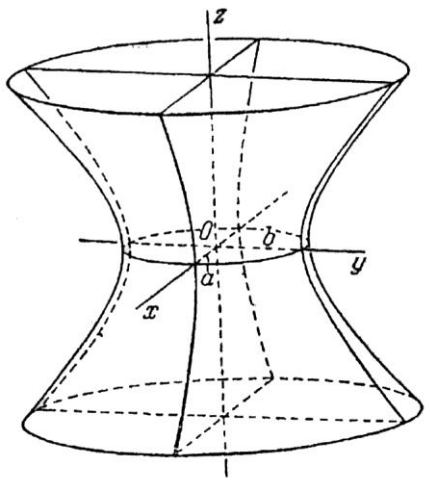


Рис. 12.

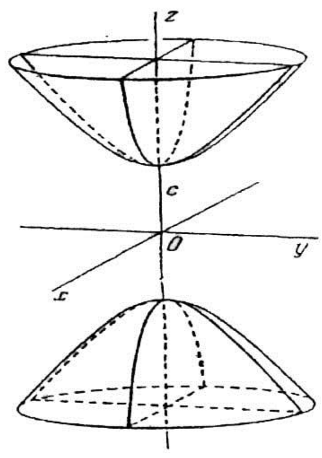


Рис. 13.

Однополостный гиперболоид

Свойства однополостного гиперболоида:

1⁰. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей, осей координат, 0 – центр симметрии.

2⁰. Однополостный гиперболоид – неограниченная фигура

3⁰. Сечения:

а) плоскостью *xOy* - эллипс: $\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$,

(23)

плоскостями || *xOy* - эллипсы:

$$\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{h^2}{c^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{a^2\left(1 + \dfrac{h^2}{c^2}\right)} + \dfrac{y^2}{b^2\left(1 + \dfrac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \end{cases}$$

(24)

б) плоскость *xOz* – гипербола: $\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ (25)

плоскостями || *xOz*:

при $|h| \rangle b$ - гипербола: $\begin{cases} y = h,\ |h| \rangle b \\ \dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{h^2}{b^2} - 1\right)} - \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{h^2}{b^2} - 1\right)} = 1; \end{cases}$

(26)

при $|h| = b$ - пара пересекающихся прямых: $\begin{cases} y = h, |\mathrm{h}| = b \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases}$; (27)

при $|h| \langle b$ - гипербола: $$\begin{cases} y = h, \ |h| \langle b \\ \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)} - \dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{h^2}{b^2}\right)} = 1; \end{cases}$$

(28)

Замечание: Сказанное в пункте *б)* имеет место и для плоскости *yOz*.

Прямая, целиком принадлежащая поверхности, называется *прямолинейной образующей поверхности*.

Поверхность образованная движением прямой называется *линейчатой поверхностью* (регулюс).

Теорема: Однополостной гиперболоид является линейчатой поверхностью, которая состоит из двух семейств прямолинейных образующих.

Теорема: Две прямые из разных семейств пересекаются, а прямые принадлежащие одной серии – скрещиваются.

На рис. 14 изображены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.

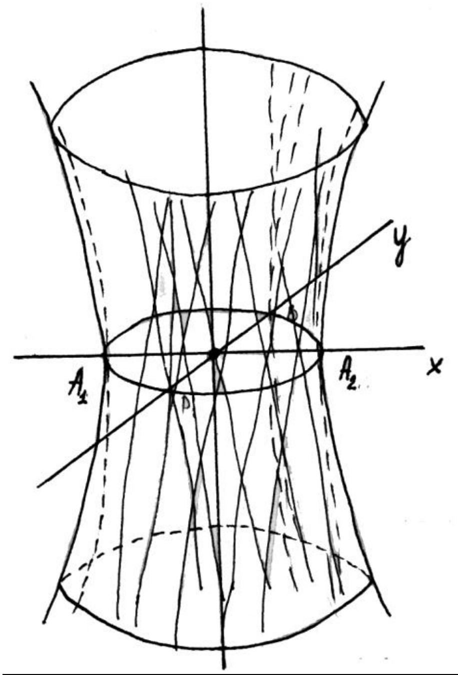


Рис. 14.

Двуполостный гиперболоид

Свойства двуполостного гиперболоида:

1⁰. Поверхность симметрична относительно координатных плоскостей, осей xOy, yOz, xOz, Ox, Oy, Oz и начала координат – центра двуполостного гиперболоида.

2⁰. Двуполостной гиперболоид – неограниченная фигура.

3⁰. Сечения:

а) X0У $\begin{cases} z = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$ гипербола

|| X0У $\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \end{cases}$ $\begin{cases} z = h \\ \frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} - \frac{y^2}{b^2\left(1 + \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1 \end{cases}$

б) X0Z $\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} y = h \\ \frac{x^2}{a^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} - \frac{z^2}{c^2\left(1 + \frac{h^2}{b^2}\right)} = 1 \end{cases}$

в) Y0Z $\begin{cases} x = 0 \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \end{cases}$ не пересекает Y0Z

|| Y0Z $\begin{cases} x = h \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 + \frac{h^2}{a^2} \end{cases}$ должно >1

$h \geq a$ $\begin{cases} h = \pm a \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \end{cases}$

$A_1(-a;0;0)$, $A_2(a;0;0)$

$x = \pm a$ - касательная плоскость поверхности; A_1, A_2 – вершины двуполостного гиперболоида.

$$\begin{cases} |h| < \pm a \\ \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1 + \dfrac{h^2}{a^2} \end{cases} <0$$

Отсюда следует, что внутри полосы *x=-a* и *x=a* нет точек двуполостного гиперболоида или поверхность разделяется на две полосы.

9. Параболоиды

Параболоидами называются поверхности, которые в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнениями:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (12)$$

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad (13)$$

где *p* и *q* – положительные числа, называемые параметрами параболоида. Параболоид, определяемый уравнением (12), называется *эллиптическим* (рис.5); параболоид, определяемый уравнением (13) – *гиперболическим* (рис.6). Уравнения (12) и (13) называют *каноническими уравнениями* соответствующих параболоидов. В случае, когда p=q, параболоид, определяемый уравнением (12), является поверхностью вращения (вокруг O_z).

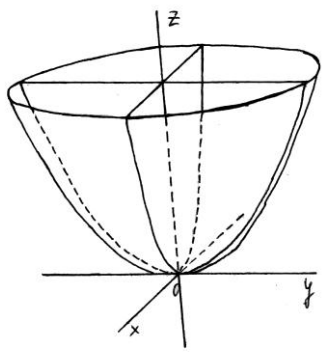


Рис. 5.

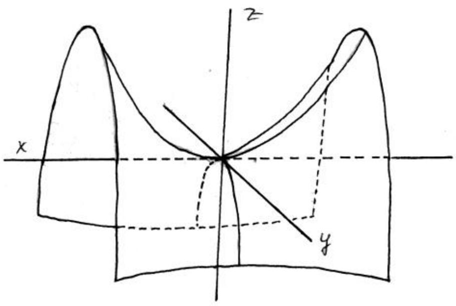


Рис. 6.

1). Эллиптический параболоид

Свойства эллиптического параболоида:

1. Эллиптический параболоид симметричен относительно плоскостей 0xz, 0yz и относительно оси 0z. Эллиптический параболоид не симметричен относительно плоскости 0xy, осей 0x, 0y и начала координат.
2. Эллиптический параболоид – неограниченная фигура
3. Сечения:

а) X0Y $\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 0 \end{cases}$

при необходимости можно поменять направление осей, чтобы коэффициент *X, Y* были положительными (>0). Плоскость *X0Y* пересекает поверхность в начале координат или эта плоскость является касательной плоскостью.

|| X0Y $\begin{cases} z = h > 0 \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h \end{cases}$ $\begin{cases} z = h > 0 \\ \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \end{cases}$

Если $h = 0 \Rightarrow$, $h < 0$ не пересекает эллиптический параболоид.

б) X0Z $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$ (14) парабола

|| X0Z $\begin{cases} y = h \\ \dfrac{x^2}{p} = 2z - \dfrac{h^2}{q} \end{cases}$ парабола

$\begin{cases} y = h \\ x^2 = 2p\left(z - \dfrac{h^2}{pq}\right) \end{cases}$ $\left(0; h; -\dfrac{h^2}{pq}\right)$.

в) Y0Z $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2qz \end{cases}$ (15) $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$ парабола

(14) и (15) называются главными параболами эллиптического параболоида.

|| Y0Z $\begin{cases} x = h \\ \dfrac{y^2}{q} = 2z - \dfrac{h^2}{p} \end{cases}$ $\left(h;0;-\dfrac{h^2}{pq}\right)$

Теорема: Эллиптический параболоид можно получить перемещая параболу (15) параллельно плоскости этой параболы, т.о. чтобы ее вершина на время находилась на параболе (14) и наоборот.

г) Гиперболический параболоид

Свойства гиперболического параболоида:

1. Гиперболический параболоид симметричен относительно плоскостей 0xz, 0yz и относительно оси 0z. Он не симметричен относительно плоскости 0xy, осей 0x, 0y и начала координат.
2. Гиперболический параболоид – неограниченная фигура.
3. Сечения:

а). X0Y $\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0 \end{cases}$

|| X0Y $\begin{cases} z = h \\ \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1 \end{cases}$ гипербола

б) X0Z $\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2pz \end{cases}$ (16)

|| X0Z $\begin{cases} y = h \\ \dfrac{x^2}{p} = 2z + \dfrac{h^2}{q} \end{cases}$ парабола.

в) Y0Z $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = -2pz \end{cases}$ (17)

(16), (17) – главные параболы

||Y0Z $\begin{cases} x = h \\ \dfrac{y^2}{q} = \dfrac{h^2}{p} - 2z \end{cases}$ парабола.

10. Прямолинейные образующие ПВП

Однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид суть линейчатые поверхности, т.е. они состоят из прямых; эти прямые называются прямолинейными образующими указанных поверхностей.

Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

имеет два семейства прямолинейных образующих, которые определяются уравнениями:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases}$$

где α и β – некоторые числа, не равные одновременно нулю.

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$$

также имеет два семейства прямолинейных образующих, которые определяются уравнениями:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha. \end{cases}$$

Теорема 3: Прямолинейные образующие гиперболического параболоида каждого семейства соответственно параллельны плоскостям.

$\sqrt{q}x - \sqrt{p}y = 0$

$\sqrt{q}x + \sqrt{p}y = 0$

Теорема: Кроме однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида никакие другие невырожденные поверхности не имеют прямолинейных образующих.

I.Распадающиеся поверхности

1) $A^2x^2 - B^2y^2 = 0$ пара пересекающихся плоскостей

2) $A^2x^2 + B^2y^2 = 0$ пара мнимых пересекающихся плоскостей

3) $z^2 - a^2 = 0$ пара параллельных плоскостей

4) $z^2 + a^2 = 0$ пара мнимых параллельных плоскостей

5) $z^2 = 0$ пара совпавших плоскостей

II. **Цилиндры**

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллиптический цилиндр

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ мнимый эллиптический цилиндр

3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболический цилиндр

4) $y^2 = 2px$ параболический цилиндр

III. Конусы

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ действительный конус второго порядка

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ мнимый конус второго порядка

I, II, III вырождающиеся поверхности

IV. Эллипсоиды

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ трехосный эллипсоид

а) эллипсоиды вращения, когда две оси совпадают б) $a = b = c$

$x^2 + y^2 + b^2 = a^2$ сфера, все оси совпадают

2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ мнимый эллипсоид

V. Гиперболоиды

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ однополостный гиперболоид

2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ двуполостный гиперболоид

VI. Параболоиды

1) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ эллиптический параболоид

2) $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ гиперболический параболоид

?