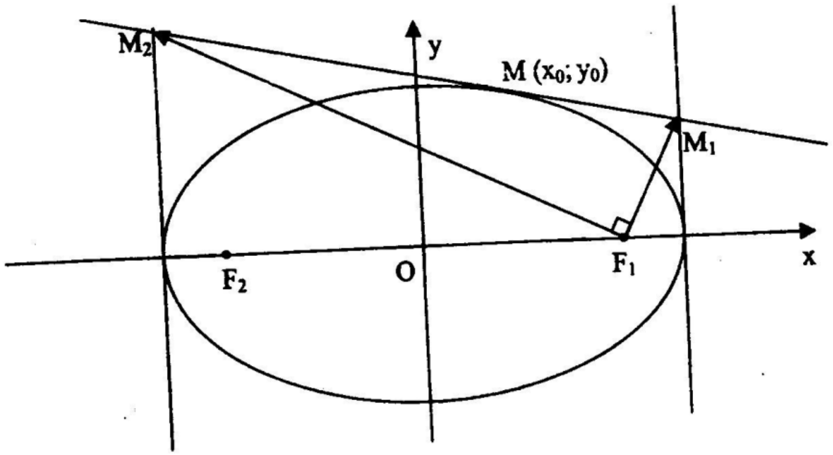
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА
(Методические указания)



Якутск 1997

Методические указания предназначены для самостоятельного изучения темы «Кривые второго порядка». Здесь рассматриваются кривые второго порядка, определяемые каноническим уравнением, а также кривые второго порядка, определяемые общим уравнением.

Предназначены для студентов, школьников старших классов, изучающих аналитическую геометрию.

Составитель

И. В. Бубякин, канд. физ.- мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии МФ ЯГУ

Рецензент

Е. С. Никитина, канд. физ.- мат. наук, зав. кафедрой алгебры и геометрии МФ ЯГУ

Утверждено

методическим советом университета

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Кривой второго порядка называется совокупность точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения могут принимать любые действительные значения, при этом хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{12}, a_{22} должен быть отличен от нуля.

Чтобы записать уравнение линий, надо прежде всего выбрать некоторую декартову систему координат. При изменении этой системы изменится и уравнение линий. Для кривой второго порядка при переходе от одной декартовой системы координат к другой, уравнение сохраняет свой вид, однако коэффициенты его меняются. Существует такая система координат, в которых уравнения кривых записываются наиболее просто. Такие системы координат называются **каноническими**, а уравнения кривых, записанных в этих системах - **каноническими**.

§ 1. Эллипс и его каноническое уравнение

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть постоянная величина, которая больше расстояния между фокусами.

Выберем декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы F_1 и F_2, а начало совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Предположим, что $M(x,y)$- произвольная точка эллипса, а $F_1(c;0)$ и $F_2(-c;0)$ - его фокусы. Из определения эллипса следует, что сумма расстояний MF_1 и MF_2 постоянна. Обозначим эту сумму через 2a. Тогда

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Это уравнение приводится [1,4] к виду

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, \qquad (1)$$

где

$$a^2 - в^2 = c^2. \qquad (2)$$

Уравнение (1) называется **каноническим уравнением эллипса**. Величины **а** и **в** (**а** > **в**) определяют соответственно длины большой и малой полуосей, т. е. половину длин отрезков, отсекаемых эллипсом на осях координат. Другими словами, величины **а** и **в** определяют

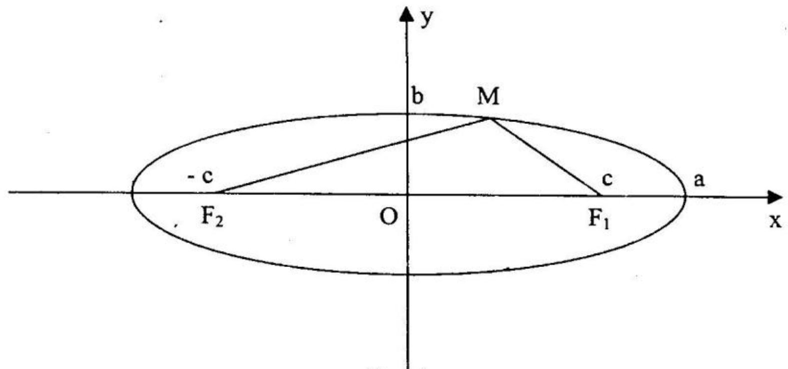


Рис.1.

вершины эллипса, т. е. точки пересечения эллипса с его осями симметрии. Легко заметить, что оси канонической системы координат совпадают с осями симметрии, а ее начало - с центром симметрии эллипса.

Теперь рассмотрим решение ряда задач.

<u>Задача 1.</u> Сторона ромба равна 5 и высота 4, 8. Через две

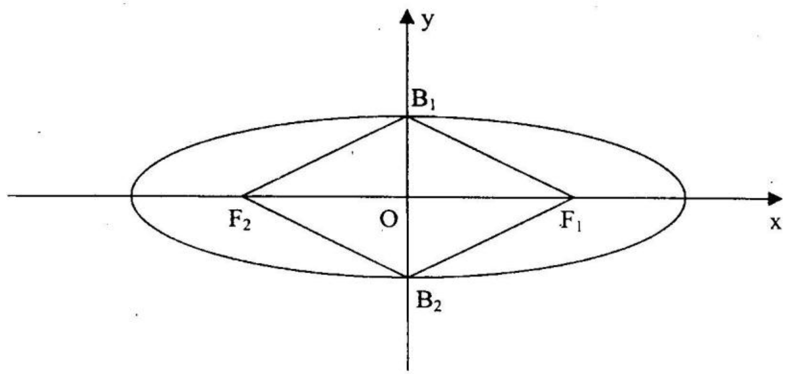


Рис. 2.

противоположные его стороны проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Составить каноническое уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси декартовой системы координат

Решение. Каноническое уравнение эллипса мы будем искать в виде (1).Найдем вначале параметры в и с эллипса. Из прямоугольного треугольника B_1OF_1 по теореме Пифагора получим

$$в^2 + c^2 = 25. \qquad (3)$$

Площадь S прямоугольного треугольника B_1OF_1 и площадь S* ромба соответственно вычисляются следующим образом

$$S = 1/2 \text{ вс} \qquad (4)$$

и

$$S^* = 5\ 4{,}8 = 24. \qquad (5)$$

Далее заметим, что площадь S треугольника составляет четвертую часть площади S* ромба. Тогда из (4) и (5) получим

$$1/2 \text{ вс} = 6.$$

Следовательно,

$$\text{вс} = 12. \qquad (6)$$

Итак, для определения параметров в и с эллипса мы имеем систему двух уравнений (3) и (6). Умножая уравнение (6) на 2 получим

$$2 \text{ в с} = 24. \qquad (7)$$

Суммируя уравнение (3) и (7), получим

$$(\text{в} + \text{с})^2 = 49.$$

Отсюда, учитывая ,что в и с есть положительные величины, имеем

$$\text{в} + \text{с} = 7\ . \qquad (8)$$

Теперь система уравнение (3), (6) эквивалентна системе уравнений

$$2 \text{ в с} = 24,$$

$$\text{в} + \text{с} = 7\ . \qquad (9)$$

Из второго уравнения можно выразить параметр с через параметр в ,т.е.

$$\text{с} = 7 - \text{в}\ . \qquad (10)$$

Подставляя (10) в первое уравнение системы (9), получим квадратное уравнение

$$в^2 - 7в + 12 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня

$$в_1 = 4 \text{ и } в_2 = 3.$$

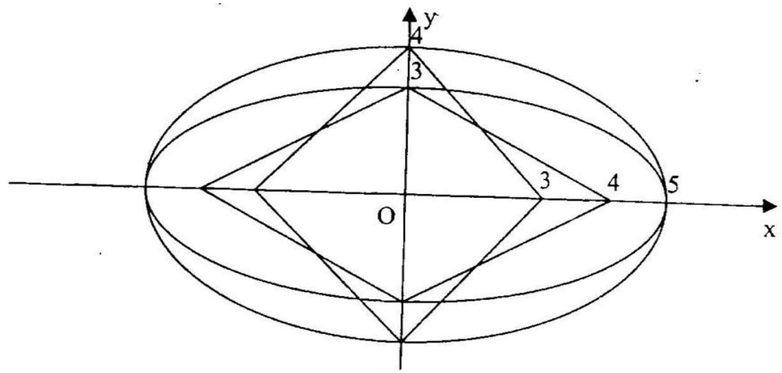


Рис.3.

Из соотношения (10) находим соответствующее значение параметра **с** : $c_1 = 3$ и $c_2 = 4$. Наконец, используя соотношение (2), находим значение параметра **а**: a_1=5 и a_2=5.

Таким образом, задача имеет два решения. Искомые уравнения эллипсов записываются в виде

$$x^2 / 25 + y^2 / 16 = 1 \text{ и } x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1.$$

Задача 2. Эллипс проходит через точки M ($\sqrt{3}$; -2) и N (-2$\sqrt{3}$; 1).. Составить каноническое уравнение эллипса, приняв его оси симметрии за оси декартовой системы координат.

Решение. Искомое уравнение эллипса имеет вид (1). Поскольку точки M и N лежат на эллипсе,. то их координаты должны удовлетворять уравнению (1). Следовательно, получим

$$3 / a^2 + 4 / b^2 = 1,$$

$$12 / a^2 + 1 / b^2 = 1.$$

При решении этой системы уравнений удобно воспользоваться обозначениями

$$1 / a^2 = u\ ,\ 1 / b^2 = v.$$

Тогда данная система уравнений запишется в виде

$$3u + 4v = 1,$$

$$12u + v = 1.$$

Эта система представляет собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Решим ее, например, методом Гаусса - методом последовательного исключения переменных. Умножим второе уравнение на 4 и вычтем из первого уравнения. Тогда получим эквивалентную систему уравнений

$$12\,u + v = 1,$$

$$45\,u = 3.$$

Из второго уравнения легко находим, что

$$u = 1/15.$$

Подставляя найденное значение u в первое уравнение получим, что

$$v = 1/5.$$

В силу обозначений имеем

$$1 / a^2 = 1 / 15 \ \text{ и } \ 1 / b^2 = 1 / 5.$$

Отсюда

$$a = \sqrt{15} \ \text{ и } \ b = \sqrt{5}.$$

Итак, каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$x^2 / 15 + y^2 / 5 = 1.$$

Задача 3 Составить каноническое уравнение, зная, что сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами тоже равно 8.

Решение Из условия задачи непосредственно получаем, что с = 4. Кроме этого из условия задачи следует, что

$$a + в = 8\,. \qquad (11)$$

На основе равенства (2) имеем

$$a^2 - в^2 = 16. \qquad (12)$$

Итак, для определения параметров а и в эллипса получим систему уравнений (11) и (12). Используя формулу разности квадратов для левой части уравнения (12) и учитывая (11), получим эквивалентную систему линейных уравнений

$$a + в = 8,$$

$$a - в = 2.$$

Суммируя уравнения этой системы, получим

$$2a = 10.$$

Значит,

$$a = 5 \ \text{ и } \ в = 3.$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса запишется так

$$x^2 / 25 + y^2 / 9 = 1.$$

Задача 4 Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Найти линию, которую описывает некоторая точка данного отрезка при этом скольжении.

Решение Чтобы выяснить, какую линию описывает фиксированная точка, выберем декартову систему координат так, чтобы ее оси совпадали с данными прямыми. Пусть отрезок AB такой, что A лежит на оси абсцисс, а B - на оси ординат. Возьмем на этом отрезке произвольную точку M. Предположим, что длина отрезка ВМ равна а , а длина отрезка МА равна в . Обозначим угол наклона прямой АВ к оси абсцисс через α . Тогда из

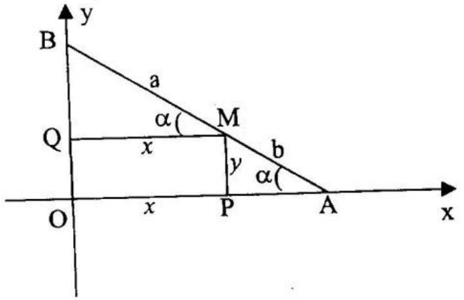


Рис.4

прямоугольных треугольников BQM и MPA нетрудно вычислить декартовы координаты точки М

$$x = a\cos\alpha,$$

$$y = b\sin\alpha.$$

Отсюда имеем

$$x / a= \cos\alpha,$$

$$y / b = \sin\alpha.$$

Возводя эти равенства в квадрат и суммируя, получим каноническое уравнение эллипса

$$x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1.$$

Итак, точка М описывает эллипс.

Эксцентриситетом ε эллипса называется величина, равная отношению межфокусного расстояния к длине его большой оси, т.е.

$$\varepsilon=F_1F_2/A_1A_2.$$

или

$$\varepsilon=c/a. \qquad (13)$$

Очевидно, что у эллипса эксцентриситет $\varepsilon < 1$. Учитывая равенство (2), нетрудно убедиться в том, что величина эксцентриситета определяет форму эллипса. Действительно, из (2) и (13) получим

$$b/a=\sqrt{1-\varepsilon^2}\ .$$

Отсюда видно, что при достаточно малом эксцентриситете параметры **а** и **в** почти равны, т.е. эллипс напоминает окружность. Если же ε близко к единице, то **в** весьма малая величина по сравнению с **а**, и стало быть, эллипс вытянут вдоль оси абсцисс.

Задача 5 Меридиан земного шара имеет форму эллипса , отношение осей которого равно 299 / 300. Определить эксцентриситет земного меридиана.

Решение. По условию задачи имеем

$$b / a = 299 / 300. \qquad (14)$$

Деля равенство (2) на величину a^2, получим

$$c^2 / a^2 = 1 - b^2 / a^2.$$

Отсюда находим

$$c / a = \sqrt{1 - b^2 / a^2}\ .$$

Подкоренное выражение разложим по формуле разности квадратов

$$c / a = \sqrt{(1-b/a)(1+b/a)}$$

Теперь в силу (14) и определения эксцентриситета получим

$$\varepsilon= \sqrt{599/90000}\ \approx \mathbf{0{,}08}.$$

Задача 6 Определить эксцентриситет эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большей осей.

Решение По условию задачи имеем

$$F_1F_2 = A_1B_1$$

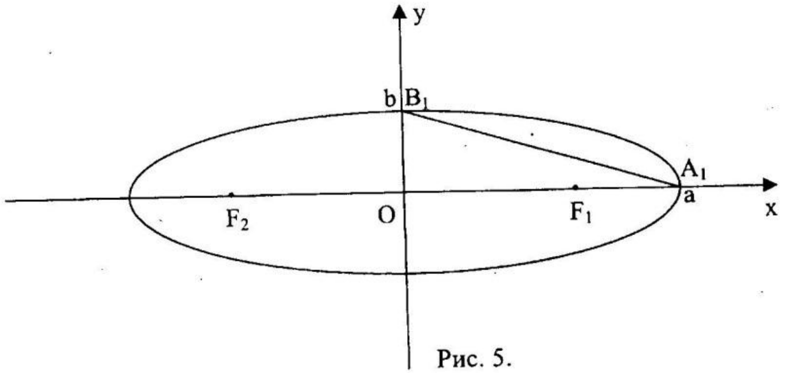


Рис. 5.

или

$$2c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

или

$$4c^2 = a^2 + b^2.$$

Принимая во внимание равенство

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

получим

$$a^2 - c^2 = 4c^2 - a.^2$$

Отсюда легко найти эксцентриситет

$$\varepsilon = c / a = \sqrt{10}/5.$$

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные на расстоянии a / ε от центра симметрии, называются **директрисами эллипса**.

Уравнения директрис имеют вид

$$x = a / \varepsilon \text{ и } x = - a / \varepsilon.$$

С помощью директрисы эллипса можно найти условие [3] принадлежности произвольной точки плоскости эллипсу. Тем самым мы получим другое определение эллипса.

Теорема Для того, чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса эллипса к расстоянию от той же точки до директрисы, расположенной с той же стороны от малой оси, что и данный фокус, было равно эксцентриситету эллипса т. е.

$$\rho(M, F_1) / \rho(M, l_1) = \varepsilon.$$

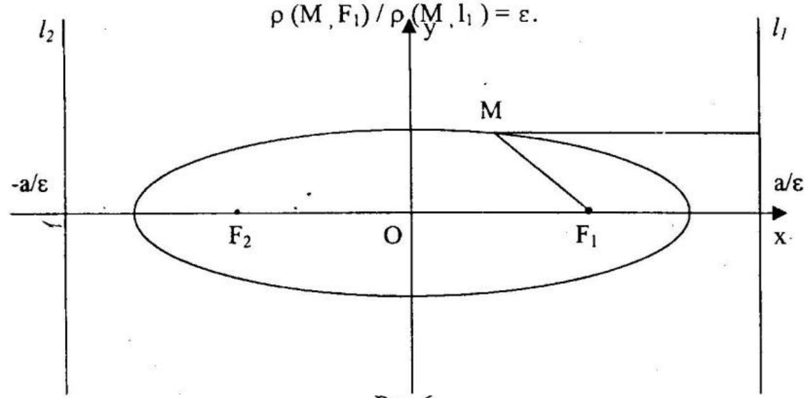


Рис.6.

На основе этой теоремы, эллипс можно определить как совокупность точек М плоскости (рис.6), отношение расстояний которых от данной точки и данной прямой есть величина постоянная, меньше единицы.

Задача 7 Определить эксцентриситет эллипса, зная, что расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами.

Решение Из условия задачи имеем

$$\rho(l_1, l_2) = 4\rho(F_1, F_2).$$

Отсюда

$$2a / \varepsilon = 4 \cdot 2c$$

или на основании (13), получим

$$2a^2 = 8c^2.$$

Из последнего равенства легко находим значение эксцентриситета

$$\varepsilon = c / a = 1 / 2.$$

§2. Гипербола и ее каноническое уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых **фокусами**, есть величина постоянная не равная нулю и которая меньше расстояния между фокусами.

Выберем декартову систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы, а начало координат совпадало с серединой отрезка F_1F_2. Пусть M(x,y) - произвольная точка гиперболы, а F_1 (c;o) и F_2 (-c ; o) - ее фокусы. Из определения гиперболы вытекает, что абсолютная величина разности расстояний MF_1 и MF_2 постоянна. Обозначим эту абсолютную величину через 2a. Тогда

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right| = 2a.$$

Это уравнение приводится [1,4] к виду

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1, \qquad (15)$$

где

$$в^2 = c^2 - a^2. \qquad (16)$$

Уравнение (15) называется **каноническим уравнением гиперболы**. Величина **a** определяет длину действительной полуоси гиперболы, т. е. половину длины отрезка, отсекаемого гиперболой на оси абсцисс , а величина **в** мнимую полуось **гиперболы** .Иными словами, величина **a** определяет **вершины гиперболы** т.е. точки пересечения гиперболы с ее осью симметрии, проходящей через фокусы гиперболы - осью абсцисс. Величина **в** определяет мнимые точки пересечения гиперболы со второй осью симметрии - осью ординат. Легко заметить ,что оси канонической системы координат совпадают с осями симметрии гиперболы, а ее начало - с центром симметрии гиперболы (рис. 7).

Задача 8 Составить уравнение гиперболы, проходящей через фокусы эллипса $x^2/169+y^2/144=1$ и имеющей фокусы в вершинах этого эллипса.

Решение. Рассмотрим эллипс. Для этого эллипса из его канонического уравнения находим, что

$$a = 13 \text{ и } в = 12.$$

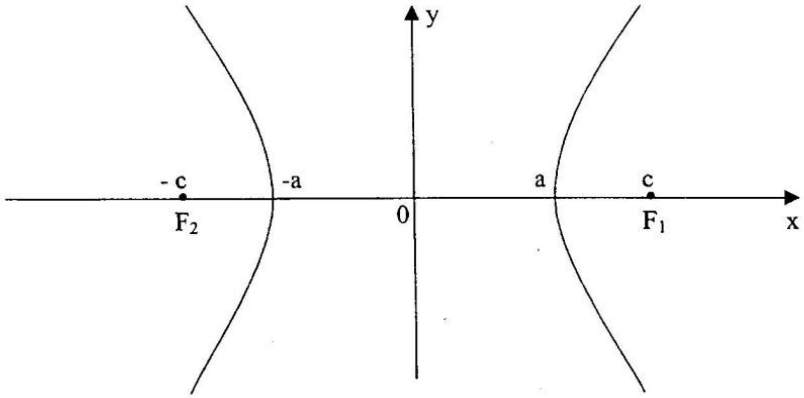


Рис7.

Теперь из соотношения (2), связывающего параметры **a** , **в** и **c** эллипса , находим

$$c = 5.$$

Из условия задачи следует, что фокус гиперболы совпадает с вершиной

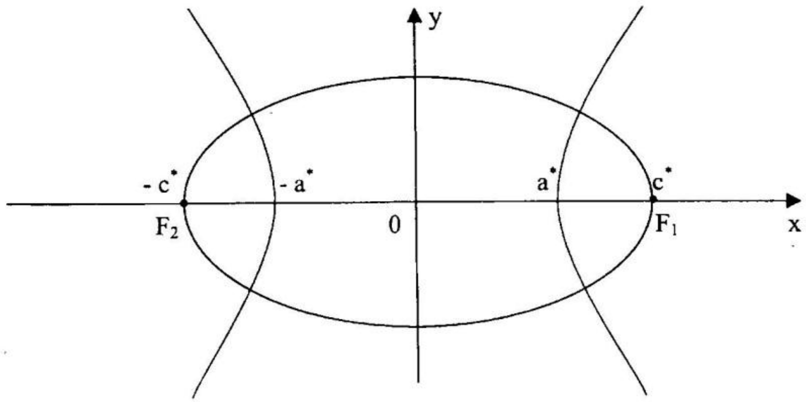


Рис.8.

эллипса. Значит для гиперболы

$$c^* = a = 13.$$

Кроме этого, вершина гиперболы совпадает с фокусом эллипса. Значит для гиперболы имеем, что

$$a^* = c = 5.$$

Используя соотношение (16), связывающее параметры **а** , **в** и **с** гиперболы находим, что

$$в^* = 12.$$

Таким образом, искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$x^2 / 25 - y^2 / 144 = 1.$$

<u>Задача 9</u> На гиперболе $x^2/16 - y^2/9 = 1$ найдите точку, для которой прямые соединяющие эту точку с фокусами, перпендикулярны.
<u>Решение</u> Из уравнения гиперболы находим, что

$$a = 4 \text{ и } b = 3.$$

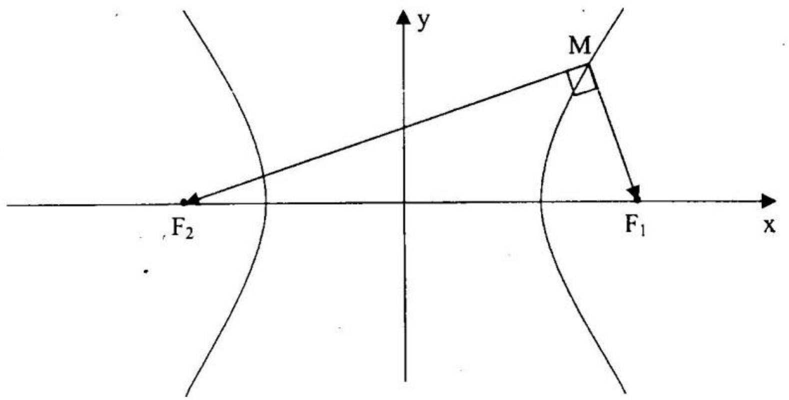


Рис.9.

Соотношение (16) позволяет вычислить третий параметр гиперболы

$$c = 5.$$

По условию задачи имеем, что векторы $\overline{MF_1}$ и $\overline{MF_2}$ перпендикулярны.

Стало быть, их скалярное произведение должно равняться нулю. Так как вектор $\overline{MF_1}$ имеет координаты $\{x - 5, y\}$, а вектор $\overline{MF_2}$ имеет координаты $\{x + 5, y\}$, то получим

$$(x - 5)(x + 5) + y^2 = 0$$

или, используя формулу разности квадратов, последнее перепишем так

$$x^2 + y^2 = 25. \qquad (17)$$

Итак, координаты искомой точки удовлетворяют двум уравнениям - уравнению (17) и уравнению гиперболы. Решить эту систему уравнений можно методом подстановки. Найдем y^2 из уравнения (17)

$$y^2 = 25 - x^2. \qquad (18)$$

Подставляя (18) в уравнение гиперболы получим квадратное уравнение относительно x

$$25x^2 = 16 \cdot 34.$$

Отсюда

$$x = \pm 4\sqrt{34} / 5.$$

Подставляя найденное значение x в (18), получим

$$y^2 = 81 / 25.$$

Тогда

$$y = \pm 9/5.$$

Таким образом, условию задачи удовлетворяют четыре точки $M_1(4\sqrt{34}/5; 9/5)$, $M_2(4\sqrt{34}/5; -9/5)$, $M_3(-4\sqrt{34}/5; 9/5)$, и $M_4(-4\sqrt{34}/5; -9/5)$.

Прямая называется **асимптотой кривой**, если расстояние от точки кривой до прямой стремится к нулю при безграничном удалении точки кривой вдоль данной кривой.

Характеристическим прямоугольником гиперболы называется прямоугольник, центр которого совпадает с центром симметрии гиперболы, а стороны параллельны ее осям и равны соответственно 2а, 2в.

Теорема Диагонали характеристического прямоугольника являются его асимптотами.

Из этой теоремы следует, что уравнения асимптот гиперболы имеет вид

$$y = b / ax \quad \text{и} \quad y = - b / ax \ . \qquad (19)$$

Задача 10. Зная уравнения асимптот гиперболы $y = x/2$ и $y = - x/2$ и одну из ее точек М $(12;\ 3\sqrt{3})$ составить каноническое уравнение гиперболы.

Решение По условию задачи известны уравнения асимптот гиперболы. Стало быть, известно отношение параметров в и а, т.е.

$$b / a = 1 / 2. \qquad (20)$$

Поскольку точка М лежит на гиперболе, то ее координаты должны удовлетворять искомому уравнению гиперболы

$$144 / a^2 - 27 / b^2 = 1. \qquad (21)$$

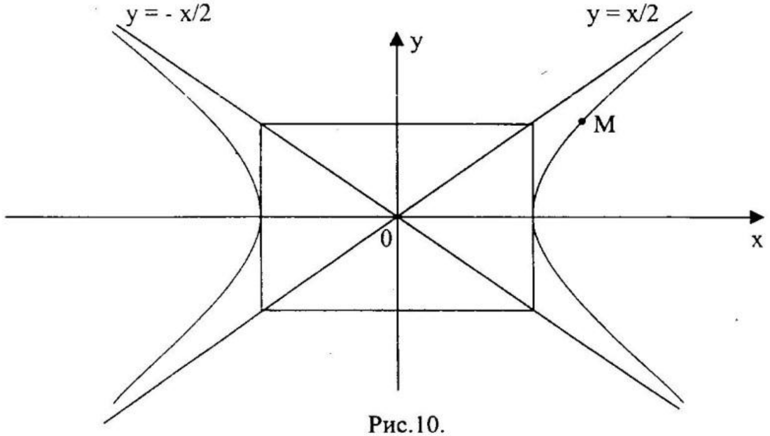


Рис.10.

Итак, чтобы определить каноническое уравнение гиперболы надо найти значение параметров а и в. Решим систему уравнений (20) и (21). Из (20) следует, что

$$b = 1 / 2 \cdot a \ . \qquad (22)$$

Подставляя (22) в уравнение (21), получим

$$36/a^2=1.$$

Отсюда

$$a = 6,$$

а из (22)

$$b = 3.$$

Таким образом, искомое уравнение гиперболы имеет вид

$$x^2 / 36 - y^2 / 9 = 1.$$

Задача 11 Доказать, что произведение расстояний любой точки гиперболы до двух асимптот есть величина постоянная.

Решение Запишем уравнения асимптот гиперболы в виде

$$bx - ay = 0 \quad \text{и} \quad bx + ay = 0.$$

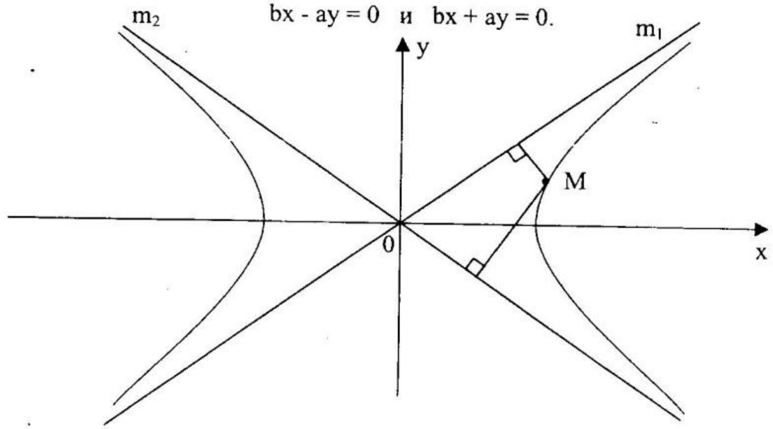


Рис.11.

Расстояние от точки М (x, y) до асимптот вычисляются так

$$\rho\ (M, m_1) = |\ bx - ay\ |\ /\ \sqrt{a^2 + b^2}$$

и

$$\rho\ (M, m_2) = |\ bx + ay\ |\ /\ \sqrt{a^2 + b^2}$$

Вычислим произведение рассматриваемых расстояний

$$\rho(M, m_1)\,\rho(M, m_2) = |bx - ay|\,|bx + ay| / (a^2 + b^2) =$$

$$= |b^2 x^2 - a^2 y^2| / (a^2 + b^2) = a^2 b^2\,|\,x^2 / a^2 - y^2 / b^2\,| / (a^2 + b^2).$$

Поскольку точка M (x, y) лежит на гиперболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы т.е.

$$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$$

а , значит

$$\rho(M_1, m_1)\,\rho(M_1, m_2) = a^2 b^2 / (a^2 + b^2).$$

Учитывая (16), окончательно, получим

$$\rho(M, m_1)\,\rho(M_1, m_2) = a^2 b^2 / c^2.$$

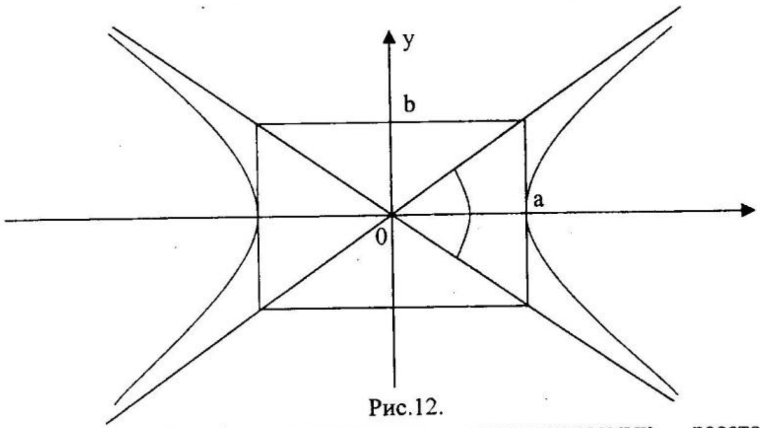


Рис.12.

Таким образом, произведение рассматриваемых расстояний действительно есть постоянная величина для заданной гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется величина, равная отношению межфокусного расстояния к длине действительной оси, т.е.

$$\varepsilon = F_1F_2 / A_1A_2$$

или

$$\varepsilon = c / a. \tag{23}$$

Очевидно, что у гиперболы $\varepsilon > 1$. Учитывая соотношение (16), нетрудно убедиться в том, что величина эксцентриситета определяет угол между асимптотами. Действительно, из (16) и (23) получим

$$b / a = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Отсюда видно, что чем больше отношение b/a, а следовательно больше и значение угла между асимптотами.

Две прямые l_1 и l_2 , перпендикулярные к действительной оси гиперболы и расположенные на расстоянии a / ε от центра симметрии называются **директрисами гиперболы**. Уравнения директрис имеют вид

$$x = a / \varepsilon \ \text{ и } \ x = -a / \varepsilon.$$

Точно также как и для эллипса можно найти условие [3] принадлежности произвольной точки плоскости гиперболе.

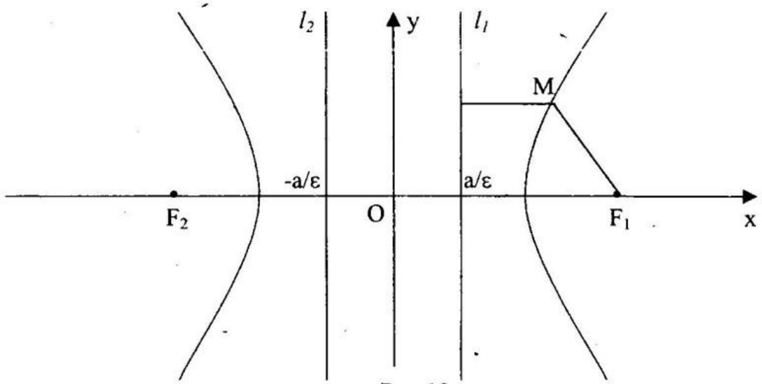


Рис.13.

<u>Теорема</u> Для того, чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса гиперболы к расстоянию от той же точки до директрисы, расположенной с той же стороны от мнимой оси, что и данный фокус, было равно эксцентриситету гиперболы, т.е.

$$\rho(M, F_1) / \rho(M, l_1) = \varepsilon.$$

Итак, гиперболу можно определить как множество точек M плоскости (рис.13), отношение расстояний которых от данной точки и данной прямой есть величина постоянная, больше единицы.

Задача 12 Доказать, что отрезки, отсекаемые директрисами на асимптотах, равны действительной полуоси.

Решение этой задачи получим достаточно просто, если заметить подобие треугольников 0EP и $0A_1Q$. Поскольку стороны

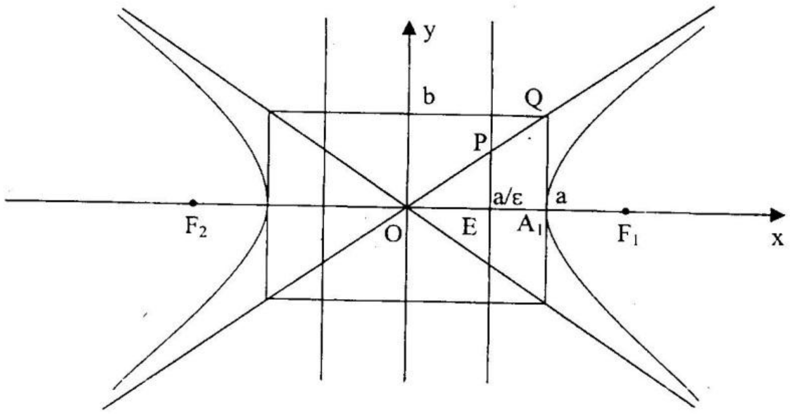


Рис.14.

подобных треугольников пропорциональны, то имеем

$$0P / 0Q = 0E / 0A_1$$

или

$$0P / C = (a/\varepsilon)/a.$$

Поскольку

$$\varepsilon = c / a.$$

то из последнего равенства получим, что

$$0P = a.$$

что и требовалось доказать.

Задача 13 Доказать что директриса гиперболы проходит через основание перпендикуляра, опущенного из соответствующего фокуса на асимптоту гиперболы. Вычислить длину этого перпендикуляра.

Решение Рассмотрим фокус F_1 и соответствующие ему асимптоту и директрису. Тогда нам нужно доказать, что указанный перпендикуляр, асимптота и директриса принадлежат одному пучку.

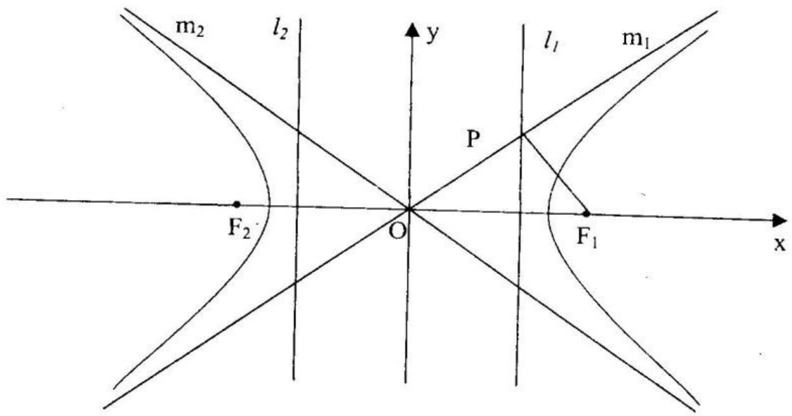


Рис.15.

Уравнение асимптоты и директрисы имеют соответственно вид

$$b\,x - a\,y = 0 \qquad (23)$$

и

$$\varepsilon\,x - a = 0. \qquad (24)$$

Чтобы записать уравнение перпендикуляра, опущенного из фокуса $F_1(c\,;\,o)$ на данную асимптоту заметим, что нормальный вектор $\overline{N} = \{b\ ;\ -a\}$ асимптоты является направляющим вектором этого перпендикуляра. Итак, уравнение рассматриваемого перпендикуляра имеет вид

$$(x - c) / b = y / (-a).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$ax + by - ac = 0. \qquad (25)$$

Прямые (23), (24) и (25) принадлежат одному пучку, если выполняется условие

$$\delta = 0,$$

где

$$\delta = \begin{vmatrix} b & -a & o \\ \varepsilon & o & -a \\ a & b & -ac \end{vmatrix}$$

Остается лишь вычислить указанный определитель. Действительно, используя определение эксцентриситета, получим

$$\delta = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ c/a & 0 & -a \\ a & b & -ac \end{vmatrix} = b^2a+a\,(a^2-c^2) = 0$$

Вычислим теперь длину перпендикуляра, опущенного из фокуса F_1 на асимптоту m_1 ,т.е. длину отрезка F_1P. Длина этого отрезка, очевидно равна расстоянию от фокуса F_1 до асимптоты m_1

$$\rho\,(F_1, m_1) = \left| -bc \right| / \sqrt{a^2 + b^2} = bc / \sqrt{a^2 + b^2} = bc / c = b.$$

Таким образом, длина отрезка F_1P равна мнимой полуоси гиперболы.

§3 Парабола и ее каноническое уравнение

Параболой называется множество точек плоскости, одинаково удаленных от данной точки, называемой **фокусом**, и от данной прямой, называемой **директрисой**.

Выберем декартову систему координат так, что ось абсцисс проходит через фокус, перпендикулярно директрисе. А начало координат поместим посередине между фокусом и директрисой. Предположим, что $M(x,y)$ - произвольная точка параболы, $F(p/2;\ 0)$- ее фокус, а l - директриса параболы. Уравнение директрисы в выбранной системе координат будет имеет вид

$$x = -\,p\,/\,2..$$

Из определения параболы следует, что расстояния $\rho(M;F)$ и $\rho\ (M;l)$ равны. Тогда

$$\sqrt{(x - p / 2)^2 + y^2} = \left| x + p/2 \right| .$$

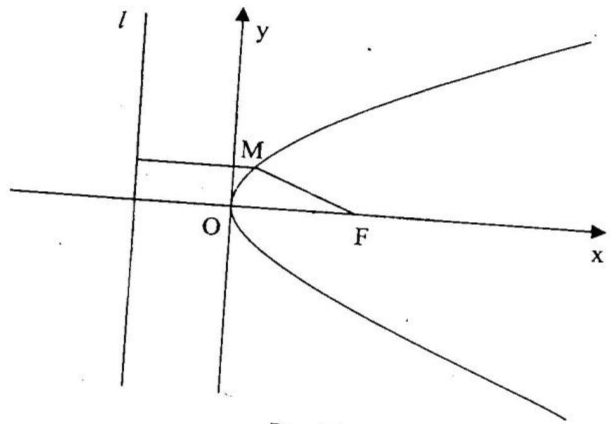


Рис.16.

Это уравнение приводится [1,4] к виду

$$y^2 = 2px\ , \tag{26}$$

где p - расстояние от фокуса параболы до ее директрисы. Это уравнение называется **каноническим уравнением параболы**. Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется **вершиной параболы**. Заметим также, что ось абсцисс канонической системы координат совпадает с осью симметрии параболы, а ее начало - с вершиной параболы.

<u>Задача 14</u> Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси ординат и отсекающей на биссектрисе первого и третьего координатных углов хорду длиной $8\sqrt{2}$.

<u>Решение</u> Искомое уравнение параболы γ имеет вид

$$x^2 = 2py. \tag{27}$$

Найдем точки пересечения параболы γ и биссектрисы l первого и третьего координатных углов, уравнение которой имеет вид

$$y = x\ . \tag{28}$$

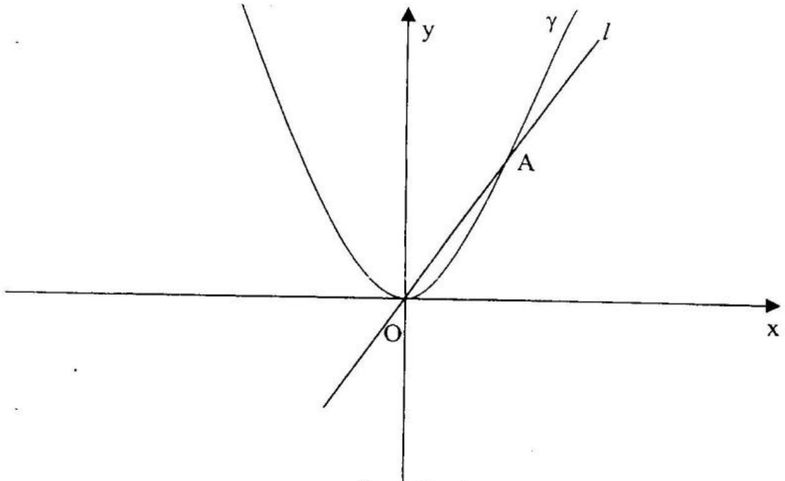


Рис.17.

Решая совместно уравнения (27) и (28) получим, что точками пересечения параболы γ и биссектрисы l служат точки 0 (0;0) и A (2p;2p). По условию задачи длина хорды OA равна $8\sqrt{2}$. Стало быть,

$$\sqrt{4p^2 + 4p^2} = 8\sqrt{2}.$$

Из этого уравнения вычисляем значения параметра p :

$$p = 4.$$

Таким образом, искомое уравнение параболы имеет вид.

$$x^2 = 8y.$$

Задача 15 Составить уравнение общей хорды параболы $y^2 = 18x$ и окружности $(x + 6)^2 + y^2 = 100$.

Решение Из уравнения окружности видно, что ее центр совпадает с точкой c (-6;0), а радиус равен 10. Из уравнения параболы же имеем, что она расположена симметрично относительно оси абсцисс. Следовательно, общая хорда AB параболы и окружности будет перпендикулярна оси абсцисс.

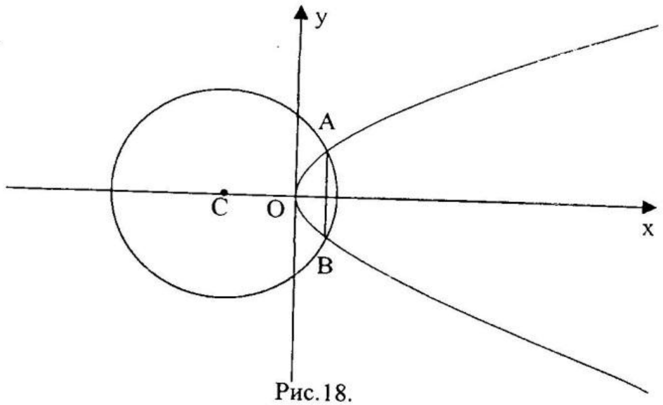


Рис.18.

Значит, для нахождения уравнения этой хорды достаточно вычислить абсциссы точек пересечения параболы и окружности. Итак, решим систему уравнений

$$y^2 = 18x,$$

$$(x + 6)^2 + y^2 = 100.$$

Запишем ее в эквивалентной форме

$$y^2 = 18x,$$

$$(x+6)^2 + 18x = 100.$$

Второе уравнение этой системы является квадратным относительно x :

$$x^2 + 30x - 64 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$x_1 = 2,\ x_2 = -32.$$

Поскольку из уравнения параболы вытекает, что $x \geq 0$,то второй корень квадратного уравнения не подходит.

Таким образом, уравнение общей хорды окружности и параболы имеет вид

$$x - 2 = 0.$$

Задача 16 На параболе $y^2=8x$ найти точку, расстояние которой от фокуса параболы равно 20.

Решение Из уравнения параболы получим, что параметр параболы равен 4. Следовательно, фокус параболы совпадает с точкой F (2; 0). Пусть искомая точка M параболы имеет координаты x и y. Тогда по условию задачи имеем

$$(x-2)^2+y^2=400. \qquad (29)$$

Итак, искомые точки есть точки пересечения окружности (23) и данной параболы. Решая совместно уравнение (29) с уравнением параболы получим квадратное уравнение относительно x

$$x^2+4x-396=0.$$

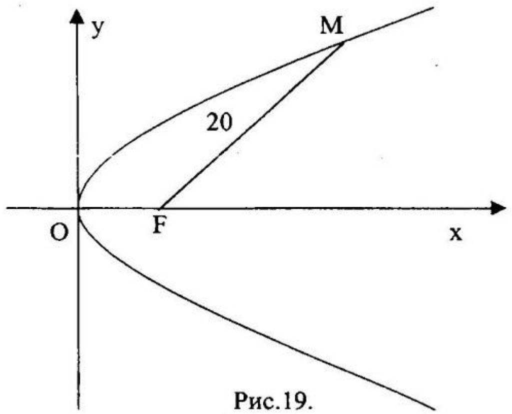


Рис.19.

Корни этого уравнения равны

$$x_1=18, \quad x_2=-22.$$

Очевидно, что второй корень не подходит, т.к. должно быть $x \geq 0$. Подставляя значение первого корня в уравнение параболы, получим уравнение

$$y^2=144.$$

Откуда

$$y_1=12\ ,\ y_2=-12.$$

Таким образом, искомые точки, лежащие на параболе имеют координаты (18 ; 12) и (18 ; - 12).

Задача 17 Через точку M (2 ; 1) провести такую хорду параболы $y^2=4x$, которая делилась бы в данной точке пополам.

Решение Уравнение искомой хорды можно записать в виде

$$y-1=k(x-2). \qquad (30)$$

Решим уравнение (30) совместно с уравнением параболы. Находя x из (30) и подставляя в уравнение параболы, получим

$$ky^2-4y-4(2k-1)=0. \qquad (31)$$

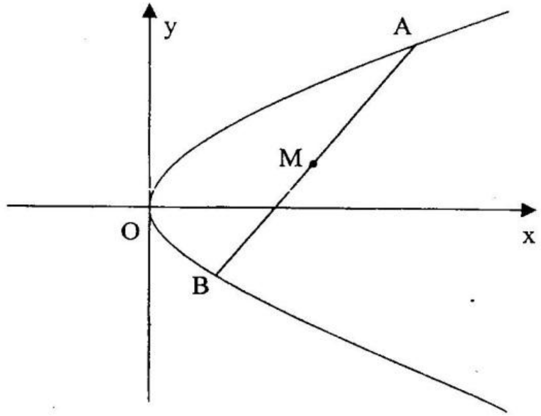


Рис.20.

Обозначая ординаты точек A, B пересечения параболы и прямой (30) через y_1 и y_2, по теореме Виета, будет иметь

$$y_1+y_2=4/k. \qquad (32)$$

Далее, поскольку точка M должна совпадать с серединой отрезка A B, то

$$(y_1+y_2)/2=1. \qquad (33)$$

Теперь из (32) и (33) легко найти искомое значение коэффициента k

$$k=2.$$

Таким образом, уравнение искомой хорды имеет вид

$$y - 1 = 2 (x - 2)$$

ли

$$2x - y - 3 = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Расстояния одного из фокусов эллипса до концов его большой оси соответственно равны 7 и 1. Составить уравнение этого эллипса.
2. Вершина треугольника, имеющего неподвижное основание, перемещается так, что периметр треугольника сохраняет постоянную величину. Найти траекторию вершины при условии, что основание равно 24 см, а периметр равен 50 см.
3. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что большая полуось равна 10 и эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}8$.
4. На эллипсе $x^2 / 30 + y^2 / 24 = 1$ найти точку, отстоящую на расстоянии пяти единиц от его малой оси.
5. На эллипсе $x^2 / 100 + y^2 / 36 = 1$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса в четыре раза больше расстояния от левого фокуса.
6. На эллипсе $x^2 / a^2 + y^2 / b^2 = 1$ найти точку , для которой произведение расстояний от этой точки до фокусов равно квадрату малой полуоси.
7. Определить точки эллипса $x^2 / 100 + y^2 / 36 = 1$, расстояние которых до правого фокуса равно 14.
8. Определить эксцентриситет эллипса , зная, что его малая ось видна из фокуса под прямым углом.
9. Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 6 и гипербола проходит через точку M (9 ; - 4).
10. Составить каноническое уравнение гиперболы. если гипербола проходит через две точки $M(-\sqrt{5}; 2)$ и $N(2\sqrt{5}; \sqrt{2})$.
11. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что асимптоты задаются уравнениями $y = \pm 2x$ и фокусы находятся на расстоянии 5 от ее центра симметрии.
12. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что асимптоты задаются уравнениями $y = \pm 5 / 3x$ и гипербола проходит через точку M (6 ; 9).

13. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что директрисы задаются уравнениями $x = \pm 3\sqrt{2}$ и угол между асимптотами - прямой.
14. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой расстояние между фокусами вдвое больше расстояния между директрисами.
15. Определить угол между асимптотами гиперболы, у которой эксцентриситет $\varepsilon = 2$.
16. Вычислить эксцентриситет гиперболы при условии., что угол между асимптотами равен 60°.
17. Составить каноническое уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $x^2 / 49 + y^2 / 24 = 1$ при условии, что эксцентриситет ее $\varepsilon = 1{,}25$.
18. Составить каноническое уравнение параболы, если длина хорды, перпендикулярной оси симметрии и делящей пополам расстояние между фокусом и вершиной, равна 1.
19. Составить каноническое уравнение параболы, если длина некоторой хорды этой параболы, перпендикулярной оси абсцисс, равна 16, а расстояние этой хорды от вершины равно 6.
20. Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.
21. Мостовая арка имеет форму параболы. Определить параметр этой параболы, зная, что, пролет арки равен 25 м, а высота 6м.
22. Струя воды, выбрасываемая фонтаном, принимает форму параболы, параметр которой p= 0,1 м. Определить высоту струи, если известно, что она падает в бассейн на расстоянии 2 м от места выхода.
23. Камень, брошенный под острым углом к горизонту, описал дугу параболы и упал на расстоянии 16 м от начального положения. Определить параметр параболической траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем, равна 12 м.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1) $x^2 / 16 + y^2 / 7 = 1$.
2) Эллипс с полуосями 13 см и 5 см. Вершины при основании треугольника служат фокусами этого эллипса.
3) $x^2/100 + y^2/36 = 1$.
4) М $(\pm 5; \pm 2)$.
5) $M(-15/2 ; \pm 3\sqrt{7}/2)$.
6) $A(\pm a ; 0)$.
7) М $(-5 ; \pm 3\sqrt{3})$.
8) $\varepsilon = \sqrt{2} / 2$.
9) $x^2/9 + y^2/2 = 1$.
10) $x^2/15 - y^2/6 = 1$.
11) $x^2/5 - y^2/20 = 1$.
12) $25x^2/171 - y^2/19 = 1$.
13) $x^2/36 - y^2/36 = 1$.
14) $\alpha = 90°$.
15) $\alpha = 120°$.
16) $\varepsilon = 2\sqrt{3}/3$.
17) $x^2/16 - y^2/9 = 1$.
18) $y^2 = \sqrt{2}\,x$.
19) $y^2 = 32/3 \cdot x$.
20) $l = 2p$.
21) $p = 12$.
22) $h = 5$м.
23) $p = 8/3$.

ГЛАВА II. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

§1 Семейство кривых второго порядка и центр кривой второго порядка

Кривая второго порядка определяется уравнением

$$\Phi (x,y) = 0, \qquad (1)$$

где

$$\Phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0 .$$

В этом уравнении коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не должны одновременно обращаться в нуль, иначе уравнение (1) представляет собой линейное уравнение и не будет определять кривую второго порядка. Предположим, что коэффициент a_{11} отличен от нуля. Тогда деля уравнение (1) на a_{11}, получим **уравнение кривой второго порядка**, которое запишется в виде

$$\Phi^* (x, y) = 0 , \qquad (2)$$

где

$$\Phi^* (x,y) = x^2 + 2Axy + By^2 + 2Cx + 2Dy + E.$$

В зависимости от коэффициентов A, B, C, D, E уравнение (2) определяет различные кривые второго порядка. Отсюда следует, что кривая второго порядка существенно зависит от пяти параметров- коэффициентов уравнения (2).

Задача 1 Найти уравнение кривой второго порядка, проходящую через точки $0(0 ; 0)$, $M (0 ; 3)$, $N (6 ; 0)$, $P (2 ; 2)$ и $Q (-2 ; 1)$.

Решение Поскольку точки 0, M, N, P и Q принадлежат кривой второго порядка, то их координаты удовлетворяют уравнению (2) т.е. получим пять уравнений на пять неизвестных параметров, а именно

$$E=0,$$

$$9B + 6D + E = 0,$$

$$36 + 12C + E = 0,$$

$$4 + 8A + 4B + 4C + 4D + E = 0,$$

$$4 - 4A + B - 4C + 2D + E = 0.$$

Отсюда находим,что

$$A = 2 , B = 4 , C = - 3 , D = - 6 , E = 0 .$$

Подставляя значение этих параметров в уравнение (2) получим искомое уравнение кривой

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y = 0.$$

Точка M называется **центром линии γ второго порядка**, если она является центром симметрии линии γ . Если кривую γ второго порядка задать общим уравнением (1), то координаты центра кривой γ определяются из системы [2] уравнений

$$\Phi_x = 0 , \quad \Phi_y = 0. \qquad (3)$$

где Φ_x - производная $\Phi(x,y)$ по x вычисленная в предположении, что y постоянно, Φ_y - производная $\Phi(x,y)$ по y вычисленная в предположении, что x постоянно.

Задача 2 Найдите центр кривой $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$.

Решение Согласно (3) мы должны определить производные Φ_x и Φ_y от выражения

$$\Phi(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 .$$

Поскольку

$$\Phi_x = 2 (x - y - 2) , \Phi y = -2(x - 2y + 3) ,$$

то система (3) примет вид

$$x - y - 2 = 0,$$

$$x - 2y + 3 = 0.$$

Отсюда легко получаем, что

$$x = 7 , y = 5.$$

Таким образом, центром служит точка M (7 ; 5) .

Задача 3 Кривая второго порядка проходит через начало координат и через точки A (0 ; 1) , B (1 ; 0). Кроме этого, известен ее центр C (2 ; 3). Составить уравнение этой кривой.

Решение Будем искать уравнение кривой второго порядка в виде

$$x^2 + 2Axy + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0. \qquad (4)$$

Поскольку точки 0 (0 ; 0), A (0 ; 1) и B (1 ; 0) принадлежат кривой, то их координаты должны удовлетворять уравнению (4) т.е. должны выполняться равенства

$$E = 0, \quad B + 2D + E = 0, \quad 1 + 2C + E = 0 . \qquad (5)$$

Составить теперь два равенства, которые показывают, что точка C (2 ; 3) является центром искомой кривой второго порядка. С этой целью найдем производные Φ_x и Φ_y от левого выражения в равенстве (4)

$$\Phi_x = 2(x + Ay + C), \Phi_y = 2(Ax + By + D) .$$

Тогда в силу (3), получим

$$2 + 3A + C = 0 , \quad 2A + 3B + D = 0 . \qquad (6)$$

Решая систему уравнений (5) и (6) совместно получим, что

$$A = - 1 / 2, B = 2 / 5, C = - 1 / 2, D = -1 / 5, E = 0.$$

Подставляя значение этих параметров в уравнение (4) и умножая на 5 получим искомое уравнение кривой второго порядка в виде

$$5x^2 - 5xy + 2y^2 - 5x - 2y = 0.$$

Задача 4 Найти геометрическое место центров кривых
$x^2 + 2xy - y^2 - 2ax + 4ay + 1 = 0$, где a- параметр кривой.

Решение Найдем центр данных кривых. Для этого вычислим сначала производные Фх и Фу

$$\Phi_x = 2(x + y - a), \Phi_y = 2(x - y + 2a).$$

Тогда координаты центров данных кривых удовлетворяют системе уравнений

$$x + y - a = 0,$$

$$x - y + 2a = 0.$$

Исключая из этих уравнений параметр a, получим уравнение

$$3x + y = 0.$$

Таким образом, искомое геометрическое место центров есть прямая линия .

Задача 5. Найти геометрическое место центров кривых второго порядка , проходящих четырех четыре точки 0 (0 ; 0) , M (2 ; 0), N (0 ; 1) и P (1 ; 2).

Решение Очевидно, что через четыре точки проходит однопараметрическое семейство кривых второго порядка. Найдем уравнение этого семейства. Действительно, поскольку точки 0, M, N и P лежат на кривой (2) второго порядка, то

$$E = 0,$$

$$4 + 4C + E = 0,$$

$$B + 2Д + E = 0,$$

$$1 + 4A + 4B + 2C + 4Д + E = 0.$$

Отсюда получим, что

$$A = D + 1/4, B = -2D, C = -1, E = 0. \qquad (7)$$

Подставляя в уравнение (2), получим

$$(2x^2 + xy - 4x) + 4D(xy - y^2 + y) = 0. \qquad (8)$$

Это уравнение определяет однопараметрическое семейство кривых второго порядка, где параметром служит коэффициент D. Найдем теперь производные по x и по y от выражения Ф(D) стоящего в левой части равенства (8)

$$\Phi_x(D) = 4x + (4D + 1)y - 4,$$

$$\Phi_y(D) = (4D + 1)x - 8Dy + 4D.$$

Тогда координаты центров кривых (8) удовлстворяют уравнсниям

$$4x + (4D + 1)y - 4 = 0,$$

$$(4D + 1)x - 8Dy + 4D = 0.$$

Исключая из этих уравнений параметр D, получим уравнение искомого геометрического места центров

$$4x^2 - 8xy - 16y^2 + 4x + 9y - 8 = 0.$$

§2 Касательные к линии второго порядка

Касательной к линии второго порядка в некоторой ее неособой точке называется прямая, проходящая через эту точку и пересекающая линию в двух слившихся точках или совпадающую с прямой, входящей в состав данной линии,

Уравнение кривой запишем в виде (1), т.е. в виде

$$a_{11}x^2 + 2a_12xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Касательная к этой линии в точке M (x_o, y_o) определяется уравнением [2]

$$\Phi_x(x - x_o) + \Phi_y(y - y_o) = 0. \qquad (9)$$

где Φ_x - производная по x от выражения Ф(x, y) , вычисленная в предположении, что y - постоянная, Φ_y - производная по y от выражения Ф(x, y) , вычисленная в предположении, что x - постоянная и значения выражений Φ_x и Φ_y вычисляются в точке касания. Уравнение (9) можно привести к виду

$$(a_{11}x_o + a_{12}y_o + a_1)x + (a_{21}x_o + a_{21}x_o + a_{22}y_o + a_2)y + a_1x_o + a_2y_o + a = 0. \qquad (10)$$

где x_o, y_o - координаты точки касания.

Задача 6 Найти уравнение касательной к кривой
$x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$, параллельной прямой $3x + 3y - 5 = 0$ (11)
и определить точки прикосновения этих касательных.

Решение Поскольку касательная к данной кривой по условию задачи должна быть параллельна прямой (11), то из условия параллельности двух прямых получим

$$\Phi_x / 3 = \Phi_y / 3. \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$x_o - y_o - 1 = 0. \tag{13}$$

Чтобы составить уравнение касательной, нужно найти координаты точки касания. Одно уравнение, связывающее эти координаты, есть уравнение (13). Второе уравнение относительно координат точки касания мы получим, если запишем условие принадлежности точки касания данной кривой, т.е.

$$x_o^2 + x_o y_o + y_o^2 + 2x_o + 3y_o - 3 = 0. \tag{14}$$

Итак, для определения координат точки касания мы имеем систему двух уравнений (13) и (14). Находя y_o из (13) и подставляя в уравнение (14), получим квадратное уравнение относительно x_o

$$3x_o^2 + 2x_o - 5 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$(x_o)_1 = 1,\ (x_o)_2 = -5/3.$$

Из (13) легко найти соответствующие ординаты точек касания

$$(y_o)_1 = 0,\ (y_o)_2 = -8/3.$$

Теперь легко составить уравнение искомых касательных. Они имеют вид

$$x + y - 1 = 0, \tag{15}$$

$$3x + 3y + 13 = 0. \tag{16}$$

Уравнение (15) и (16) являются уравнениями касательной к данной кривой в точках M (1 ; 0) и N (-5 / 3 ; -8 / 3) соответственно.

Задача 7 Через точку A (3, 4) провести касательные к кривой
$2x^2 - 4xy + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$.

Решение Вначале проверим, лежит ли точка A на данной кривой. Для этого надо подставить координаты точки A в уравнение данной кривой. В результате подстановки в левую часть уравнения кривой получим $\Phi(3 ; 4) = 1$. Следовательно, точка A не лежит на данной кривой. Итак, требуется составить уравнение касательных в кривой, проходящих через точку A.

В начале найдем координаты x_o и y_o точек касания. Эти координаты находятся из двух условий, а именно точка касания лежит на касательной, стало быть ее координаты удовлетворяют уравнению касательной (10) и точка касания лежит на самой кривой, т.е. координаты точки касания удовлетворяют уравнению кривой. В силу этих двух условий получим систему уравнений

$$3x_o - y_o - 6 = 0, \tag{17}$$

$$2x_o^2 - 4x_o y_o + y_o^2 - 2x_o + 6y_o - 3 = 0. \tag{18}$$

Находя y_o из первого уравнения и подставляя его во второе уравнение, получим квадратное уравнение относительно x_o

$$x_o^2 - 4x_o + 3 = 0.$$

Корни этого уравнения равны

$$(x_o)_1 = 3,\ (x_o)_2 = 1.$$

Из уравнения (17) находим соответствующие ординаты

$$(y_o)_1 = 3,\ (y_o)_2 = -3.$$

Таким образом, точками касания служат точки M (3 ; 3) и N (1 ; -3). Уравнения касательных в точках M и N соответственно имеют вид

$$x - 3 = 0$$

и

$$7x - 2y - 13 = 0.$$

Рассмотрим уравнение кривой, записанное в виде (2), т.е. в виде

$$x^2 + 2Axy + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0.$$

Уравнение касательной к этой кривой в точке M (x_o,y_o) имеет вид

$$(x_o + Ay_o + C)x + (Ax_o + By_o + C)y + Cx_o + Dy_o + E = 0. \qquad (19)$$

Задача 8 Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через начало координат и касающейся прямой $4x + 3y + 2 = 0$ в точке M $(1 ; -2)$ и прямой $x - y - 1 = 0$ в точке N $(0 ; -1)$.

Решение Для определения искомой кривой второго порядка нам нужно определить пять коэффициентов уравнения (2). Из условия касания прямых с искомой кривой второго порядка в точках M и получим

$$(1 - 2A + C)/4 =(A - 2B + D)/3 =(C - 2D + E)/2 \qquad (20)$$

и

$$(-A + C)/1 = (-B + D)/-1 = (-D + E)/-1. \qquad (21)$$

Кроме этого известно, что кривая проходит через начало координат. Значит,

$$E = 0 . \qquad (22)$$

Из соотношений (20)-(22) легко получить систему пяти уравнений относительно пяти параметров кривой второго порядка

$$1 - 2A - C + 4D = 0,$$

$$2A - 4B - 3C + 8D = 0,$$

$$A - C + D = 0,$$

$$B - 2D = 0,$$

$$E = 0.$$

Подставляя выражение $B = 2D$ во второе уравнение получим, что эта система уравнений эквивалентна системе

$$1 - 2A - C + 4D = 0,$$

$$2A - 3C = 0,$$

$$A - C + D = 0,$$

$$B - 2D = 0,$$

$$E = 0.$$

Первые три уравнения содержат лишь неизвестные параметры A, C и D. Решая эту систему трех уравнений, получим

$$A = 1/4 , C = 1/6 ,D = - 1/12. \qquad (23)$$

Далее из четвертого и пятого уравнений находим

$$B = -1/6 , \ E = 0 . \qquad (24)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в уравнение (2) , после умножения на 6, получим уравнение искомой кривой в виде

$$6x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y = 0.$$

Задача 9 Доказать, что площадь, заключенная между касательной к гиперболе $x^2/4 - y^2/9 = 1$ и ее асимптотами, имеет постоянную величину.

Решение Для решения этой задачи воспользуемся уравнениями (1). Уравнение касательной к данной гиперболе в точке M (x_o,y_o) имеет вид

$$x_o/4 \cdot (x - x_o) - y_o/9 \cdot (y - y_o) = 0$$

или

$$x_o x/4 - y_o y/9 - (x_o^2/4 - y_o^2/9) = 0. \qquad (25)$$

Поскольку точка M_o (x_o, y_o) лежит на гиперболе, ее координаты удовлетворяют уравнению гиперболы, значит

$$x_o^2/4 - y_o^2/9 = 1 \qquad (26)$$

и уравнение касательной примет вид

$$x_o x /4 - y_o y /9 = 1 . \qquad (27)$$

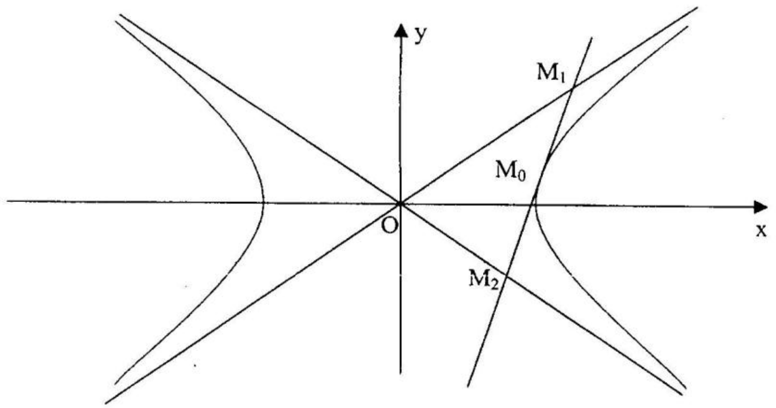


Рис.1

Уравнение асимптот данной гиперболы имеет вид

$$y = 3/2x, \tag{28}$$

$$y = -3/2x\ . \tag{29}$$

Решая совместно уравнения (27) и (28), получим координаты точки M_1 пересечения касательной и первой асимптоты

$$M_1\ (1/(x_o/4 - y_o/6)\ ;\ 3/(2\ (x_o/4 - y_o/6)\ ).$$

Решая совместно уравнение (27) и уравнение (29), получим координаты точки M_2 пересечения касательной и второй асимптоты

$$M_2\ (1\ /(x_o/4 + y_o/6)\ ;\ -3\ /\ (2\ (x_o/4 + y_o/6)\ ).$$

Теперь вычислим площадь треугольника OM_1M_2 по формуле

$$S = 1/2\ \mathrm{mod} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

где x_1, y_1 - координаты точки M_1, x_2, y_2 - координаты точки M_2. Итак,

$$S = 1/2\mathrm{mod}\Big(\ (-3)\ /\ (x_o^2/16 - y_o^2/36)\ \Big) =$$
$$= 1/2\mathrm{mod}\Big(\ (-3)/\ (\ 1/4(x_o^2/4 - y_o^2/9)\ )\ \Big).$$

В виду (26), получим

$$S = 6.$$

Таким образом, площадь треугольника OM_1M_2 не зависит от точки касания M_O и имеет постоянную величину.

Задача 10 Доказать, что отрезки касательных к эллипсу $x^2/9+y^2/4=1$, заключенные между касательными, проведенными в вершинах большой оси, видны из фокусов под прямым углом..

Решение Запишем уравнение касательной к эллипсу в произвольной его точке . Оно имеет вид

$$x_o/9 \cdot (x - x_o) + y_o/4 \cdot (y - y_o) = 0.$$

или

$$x_o x/9 + y_o y/4 - (x_o^2/9 + y_o^2/4) = 0.$$

Поскольку точка M_o (x_o, y_o) лежит на эллипсе, то ее координаты удовлетворяют уравнению эллипса

$$x_o^2/9 + y_o^2/4 = 1.$$

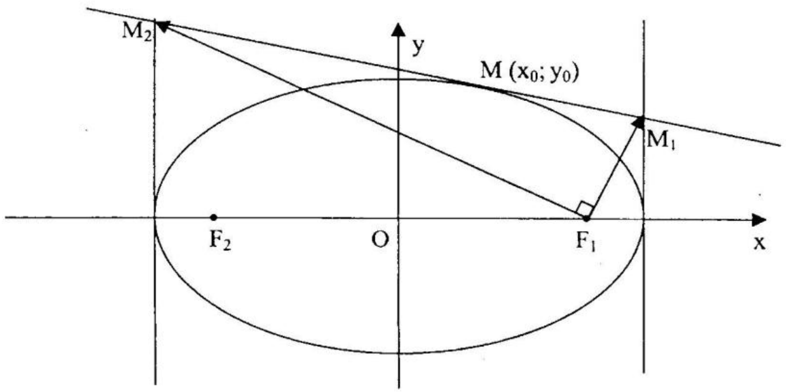


Рис.2.

Значит, уравнение касательной и эллипса имеет вид

$$x_o x/9 + y_o y/4 = 1. \tag{30}$$

Отсюда, в частности следует, что уравнения касательных в вершинах A_1 (3 ; 0) и A_2 (-3 ; 0) большой оси имеют соответственно вид

$$x = 3, \tag{31}$$

$$x = -3. \tag{32}$$

Точки пересечения касательных (30), (31) и (30), (32) соответственно имеют координаты

$$M_1\,(3\,;\,4/y_o\,(1 - x_o/3))$$

и

$$M_2\,(-3\,;\,4/y_o\,(1 + x_o/3)).$$

Параметры **а, в,** и **с** эллипса связаны соотношением

$$a^2 - в^2 = c^2. \tag{33}$$

Из уравнения эллипса видно, что $a = 3$, $в = 2$. Тогда из (33) следует, что $c = \sqrt{5}$. Отсюда вытекает, что фокусы эллипса имеют координаты

$$F_1(\sqrt{5}\,;\,0) \text{ и } F_2(-\sqrt{5}\,;\,0).$$

Доказать утверждение, сформулированное в условии задачи, это значит доказать перпендикулярность векторов $\overline{F_1M_1}$ и $\overline{F_1M_2}$

$$\overline{F_1M_1} = (\,3 - \sqrt{5}\,;\,4/y_o\,(1 - x_o/3)\,),$$
$$\overline{F_1M_2} = (\,-3 - \sqrt{5}\,;\,4/y_o(1 + x_o/3)\,).$$

Вычислим их скалярное произведение

$$(\overline{F_1M_1}, \overline{F_1M_2}) = -9 + 5 + 16/y_o^2\,(1 - x_o^2/9) = -4 + (16/y_o^2)\cdot(y_o^2/4) = -4 + 4 = 0.$$

Это означает, что векторы $\overline{F_1M_1}$ и $\overline{F_1M_2}$ перпендикулярны и отрезок M_1M_2 виден из фокуса F_1 под прямым углом.

§3 Диаметр линии второго порядка

Рассмотрим линию γ второго порядка, заданную общим уравнением (1) т.е. в виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Кроме этого рассмотрим некоторое неасимптотическое направление линии второго порядка, Совокупность точек, являющихся серединами хорд линии второго порядка γ, параллельных данному направлению представляют собой прямую линию. Эта прямая линия называется **диаметром линии второго порядка, сопряженным хордам данного направления.** Если данное направление определяется угловым коэффициентом **к**, то уравнение [2] диаметра линии второго порядка запишется в виде

$$\Phi_x + к\Phi_y = 0 \tag{34}$$

или в виде

$$(a_{11} + кa_{12})x + (a_{12} + кa_{22})y + a_1 + кa_2 = 0. \tag{35}$$

Условием сопряженности двух направлений, определяемых угловыми коэффициентами к и к* имеет вид

$$a_{11} + a_{12}(к + к^*) + a_{22}кк^* = 0. \tag{36}$$

Два диаметра линии второго порядка, имеющей единственный центр, называются **сопряженными**, если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому. **Условия сопряженности двух таких диаметров** имеет вид (36).

<u>Задача 11</u> Составить уравнение диаметра кривой $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6 = 0$, параллельного прямой $2x - y + 5 = 0$.

<u>Решение</u> Вычисляя производные Φ_x и Φ_y от выражения

$$\Phi(x,y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x + 6,$$

получим

$$\Phi_x = 4(x + y - 2),\ \Phi_y = 2(2x + 5y).$$

В силу этого уравнение (35) диаметра запишется в виде

$$2(1 + к)x + (2 + 5к)y - 4 = 0 . \qquad (37)$$

Поскольку искомый диаметр должен быть параллелен данной прямой, то должна выполняться пропорция

$$2(1 + к)/2 = (2 + 5к)/ (-1) .$$

Отсюда находим, что

$$к = -1/ 2 .$$

Подставляя значение этого углового коэффициента в уравнение (37), получим уравнение искомого диаметра в виде

$$2x - y - 8 = 0.$$

Задача 12 Через точку М (1 ; -2) проведен диаметр кривой $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$. Найти уравнение этого диаметра и диаметра, ему сопряженного .

Решение Найдем производные $Ф_x$ и $Ф_y$ от выражения, стоящего в левой части уравнения кривой

$$Ф (x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 .$$

Поскольку

$$Ф_x = 2 (3x - y + 2) , Ф_y = -2 (x + 3y + 2),$$

то уравнение диаметра имеет вид

$$(3x - y + 2) - к (x + 3y + 2) = 0 . \qquad (38)$$

Искомый диаметр проходит через точку М. Следовательно, ее координаты удовлетворяют последнему уравнению. В силу этого имеем

$$7 - 5к = 0.$$

Отсюда имеем

$$к = 7/5.$$

Из условия сопряженности двух направлений, а именно

$$3 - (7/5 + к^*) + 3 \cdot 7/5 \cdot к^* = 0,$$

находим угловой коэффициент к*, который определяет направление, сопряженное направлению с угловым коэффициентом к. Итак,

$$к^* = -1/2.$$

Подставляя поочередно в уравнение (38) коэффициенты

$$к = 7/5 \text{ и } к^* = -1/2 ,$$

получим два сопряженных диаметра, проходящих через точку М

$$x=2y + 3 = 0 \text{ и } 7x - 5y + 2 = 0.$$

Задача 13 Найти уравнение двух сопряженных диаметров гиперболы $x^2/6 - y^2/4 = 1$, угол между которыми равен 45° .

Решение Пусть к и к* - угловые коэффициенты двух направлений, определяемые сопряженными диаметрами. Тогда так как угол между ними составляет 45 °,то

$$(к - к^*)/(1+кк^*) = 1 . \qquad (39)$$

Из условия (36) сопряженности двух диаметров получим

$$1/6 - 1/4\ кк^* = 0 . \qquad (40)$$

Решая систему уравнений (39),(40) будем иметь, что имеется две пары сопряженных направлений, определяемых соответственно угловыми коэффициентами

$$к_1=2 , к_1^* = 1/3 \qquad (41)$$

и

$$к_2=- 1/3, к_2^* = -2 . \qquad (42)$$

Найдем теперь производные $Ф_x$, $Ф_y$ от выражения Ф(x, y), стоящего в левой части уравнения гиперболы. Для этого перепишем уравнение гиперболы в виде

$$x^2/6 - y^2/4 - 1 = 0.$$

Тогда

$$\Phi(x,y) = x^2/6 - y^2/4 - 1$$

и

$$\Phi_x = x/3, \quad \Phi_y = -y/2 . \qquad (43)$$

В силу этого ,уравнение диаметра имеет вид

$$2x - 3\,\kappa y = 0 . \qquad (44)$$

Подставляя в это уравнение первую пару (41) угловых коэффициентов, мы получим первую пару сопряженных диаметров, а именно

$$x - 3y = 0 , \ 2x - y = 0.$$

Подставляя в уравнение (44) вторую пару (42) угловых коэффициентов, мы получим вторую пару сопряженных диаметров

$$2x+y=0 , \ x+3y=0.$$

<u>Задача 14</u> Две пары прямых $2x - 3y = 0$, $x + 2y = 0$ и $x - y = 0$, $3x - 5y = 0$. служат сопряженными диаметрами кривой второго порядка. Составить уравнение этой кривой, зная, что она проходит через точку М (1 ; 1) .

<u>Решение</u> Уравнение кривой будем искать в виде (2) т.е. в виде

$$x^2 + 2Axy + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0 .$$

Чтобы найти искомую кривую нужно определить пять параметров A, B, C, D, E . Для чего имеем два условия сопряженности двух данных диаметров

$$\begin{aligned} A - 2B + 6 &= 0, \\ 8A + 3B + 5 &= 0 . \end{aligned} \qquad (45)$$

Кроме этого имеем, что точка 0 (0 ; 0.) пересечения двух сопряженных диаметров является центром кривой второго порядка, т.е.

$$C = 0, \qquad (46)$$

$$D = 0.$$

И наконец, пятое условие на искомые параметры мы получаем, если запишем, что точка М(1,1) лежит на кривой второго порядка т.е.

$$1 + 2A + B + 2C + 2D + E = 0 . \qquad (47)$$

Решая совместно систему уравнений (45)-(47) ,мы получим значение параметров искомой кривой

$$A= -28/19 \ , \ B = 43/19 \ , \ C = 0 \ , \ Д = 0 \ , \ E = -6/19 .$$

Подставляя значения этих параметров в уравнение (2), получим уравнение искомой кривой в виде

$$19x - 56xy + 43y^2 - 6 = 0.$$

<u>Задача 15</u> Доказать, что асимптоты гиперболы являются самосопряженными диаметрами.

<u>Решение</u> Пусть гипербола определяется уравнением

$$x^2/a^2 - y^2/в^2 - 1 = 0.$$

Тогда ее асимптоты задаются уравнениями

$$y = в/a \cdot x \qquad (48)$$

и

$$y= -в/a \cdot x. \qquad (49)$$

Составим уравнение диаметра, сопряженному направлению, определяемому угловым коэффициентом асимптоты (48) ,т.е.

$$\kappa = в/a .$$

Производные Фх и Фу равны

$$\Phi_x = 2x/a^2 \quad \Phi_y = -2y/в^2.$$

Тогда уравнение диаметра запишется так

$$2x/a^2 - в/a(2y/в^2) = 0$$

или

$$1/a\ (x/a - y/в) = 0$$

или

$$y = в/a \cdot x\ ,$$

т.е. получили снова уравнение асимптоты. К такому же выводу мы придем, если будем рассматривать другую асимптоту (49).

Таким образом, асимптота гиперболы является ее самосопряженным диаметром.

Задача 16 Найти асимптоты гиперболы $3x^2 + 2xy - y^2 + 8x + 10y + 14 = 0$.

Решение Будем искать асимптоту гиперболы как ее самосопряженные диаметры. Из условия сопряженности двух диаметров при

$$к^* = к$$

мы получим

$$к^2 - 2к - 3 = 0\ .$$

Отсюда находим

$$к_1 = 3 \text{ и } к_2 = -1. \tag{50}$$

Вычислим производные Φ_x, Φ_y от выражения $\Phi\ (x,y)$, стоящего в левой части уравнения кривой

$$\Phi_x = 2(3x + y + 4),\ \Phi_y = 2(x - y + 5). \tag{51}$$

Подставляя последовательно значения угловых коэффициентов в уравнение (34) и учитывая (51), получим две асимптоты гиперболы

$$6x - 2y + 19 = 0 \text{ и } 2x + 2y - 1 = 0.$$

Задача 17 Дана парабола $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y - 7 = 0$. Составить уравнение диаметра этой параболы, образующего угол 45° с сопряженными хордами.

Решение Все диаметры параболы параллельны ее оси и имеют угловой коэффициент

$$к = -a_{11}/\ a_{12} = 1/3\ .$$

Поскольку, искомый диаметр образует угол 45° с сопряженным направлением с угловым коэффициентом к*, то

$$(1/3 - к^*)/(1 + 1/3 \cdot к^*) = 1\ .$$

Отсюда получим ,что

$$к^* = -1/2.$$

Поскольку

$$\Phi_x = 2(x - 3y - 6),\ \ \Phi_y = -2\ (3x + 9y + 7)\ ,$$

то уравнение диаметра имеет вид

$$5x - 15y - 19 = 0.$$

§4 Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим кривую второго порядка ,заданную общим уравнением (1) т.е.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0.$$

Выясним, какую нужно выбрать декартову систему координат, чтобы уравнение (1) приняло канонический вид [5]. С этой целью разобьем нашу задачу на две части.

Во-первых, упростим уравнение (1) к виду, не содержащему произведение координат xy . Это достигается с помощью поворота системы координат на α , удовлетворяющему уравнению

$$a_{12}tg^2\alpha + (a_{11} - a_{22})\ tg\alpha - a_{12} = 0. \tag{52}$$

При этом формулы поворота, т.е. формулы перехода от системы координат 0 xy к системе координат 0 x*y* имеют вид

$$x = x^*\cos\alpha - y^*\sin\alpha\ ,$$
$$y = x^*\sin\alpha + y^*\cos\alpha\ . \qquad (53)$$

а базисные векторы новой системы координат имеют координаты

$$\bar{i}^* = \{\cos\alpha\ ,\sin\alpha\} \text{ и } \bar{j}^* = \{-\sin\alpha,\ \cos\alpha\}\ . \qquad (54)$$

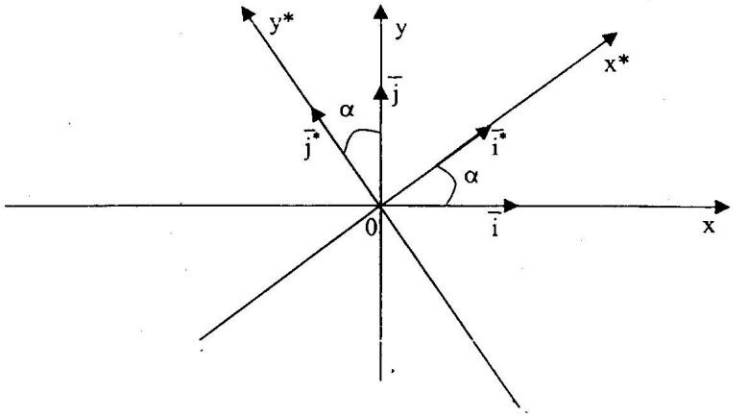


Рис.3

Чтобы записать уравнения (53) поворота системы координат необходимо выразить $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\mathrm{tg}\alpha$

$$\sin\alpha = \pm\ \mathrm{tg}\alpha/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\ ,\ \cos\alpha = \pm 1/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}. \qquad (55)$$

Итак, в результате поворота, мы получим уравнение кривой второго порядка в виде

$$\Phi^*(x^*, y^*) = 0, \qquad (56)$$

где

$$\Phi^*(x^*, y^*) = a_{11}{}^*x^{*2} + a_{22}{}^*y^{*2} + 2a_1{}^*x^* + 2a_2{}^*y^* + a^*\ .$$

Далее с помощью параллельного переноса системы координат, т.е. с помощью перехода от системы координат $0\ x^*y^*$ к системе координат С Х У по формулам

$$X = x^* - a\ ,$$
$$У = y^* - в\ . \qquad (57)$$

где **а** , **в** - координаты начала новой системы координат СХУ в

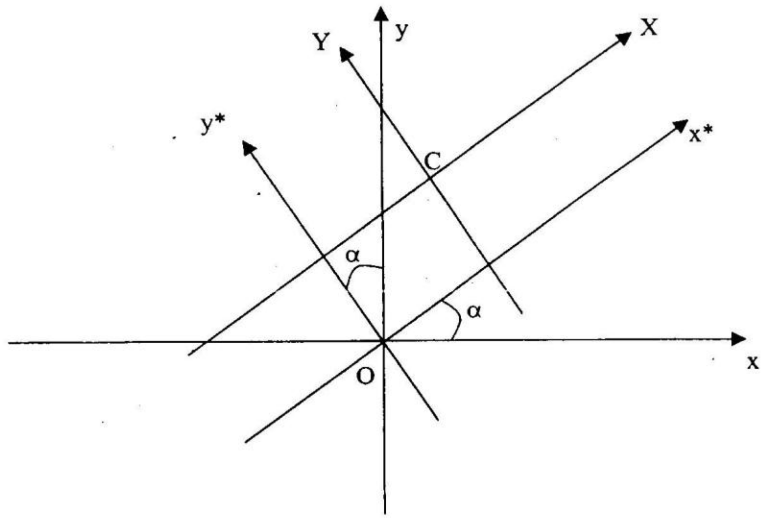


Рис.4.

системе координат $0\ x^*y^*$,мы приведем уравнение (56) кривой к каноническому виду.

<u>Замечание</u> Двум корням уравнения (52) соответствуют два взаимно-перпендикулярных направления, так как их произведение по теореме Виета равно (-1). Поэтому заменяя один корень на другой, мы только меняем ролями оси $0x^*$ и $0y^*$.

<u>Задача 18</u> Привести уравнение кривой второго порядка $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ к каноническому виду. Найти каноническую систему координат.

<u>Решение</u> Уравнение (52) имеет вид

$$2tg^2\alpha - 3tg\alpha - 2 = 0 . \qquad (59)$$

Решая это квадратное уравнение находим два корня

$$(tg\alpha)_1 = 2 \;,\; (tg\alpha)_2 = -1/2 . \qquad (60)$$

Пусть

$$tg\alpha = 2 . \qquad (61)$$

В силу этого имеем

$$\sin\alpha = 2/\sqrt{5} \;,\; \cos\alpha = 1/\sqrt{5} . \qquad (62)$$

Формулы (53), определяющие поворот декартовой системы координат, имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x^*/\sqrt{5} - 2y^*/\sqrt{5}, \\ y &= 2x^*/\sqrt{5} + y^*/\sqrt{5}. \end{aligned} \qquad (63)$$

Подставляя (63) в уравнение кривой , получим

$$9x^{*2} + 4y^{*2} - 144/\sqrt{5} + 8/\sqrt{5} \cdot y^* + 80 = 0. \qquad (64)$$

Путем выделения полных квадратов, это уравнение легко привести к виду

$$9\,(x^* - 8/\sqrt{5})^2 + 4\,(y^* + 1/\sqrt{5})^2 = 36. \qquad (65)$$

Теперь обозначим

$$\begin{aligned} x^* - 8/\sqrt{5} &= X., \\ y^* + 1/\sqrt{5} &= Y. \end{aligned} \qquad (66)$$

Эти уравнения определяют параллельный перенос системы координат $0\,x^*y^*$, в котором ее начало переходит в точку

$$C(8/\sqrt{5}\,;-1/\sqrt{5}).$$

В силу (66) уравнение (64) запишется в каноническом виде

$$X^2/4 + Y^2/9 = 1 \qquad (67)$$

Найдем теперь каноническую систему координат. Базисными векторами этой системы координат в силу (63) служат векторы

$$\bar{I} = \bar{i}^* = \{1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}\},\quad \bar{J} = \bar{j}^* = \{-2/\sqrt{5}\;, 1/\sqrt{5}\} . \qquad (68)$$

При этом начало C канонической системы координат в системе координат 0xy совпадает с точкой

$$C(8/\sqrt{5}\;, -1/\sqrt{5}) . \qquad (69)$$

Подставляя в (63) координаты (69) точки C мы получим, что начало канонической системы координат в первоначальной системе координат 0xy совпадает с точкой

$$C(2\,;\,3) . \qquad (70)$$

<u>Замечание</u> С помощью координат точки C в системе координат 0xy можно записать и уравнение осей канонической системы координат как прямых проходящих через точку C с угловыми коэффициентами

$$k_1 = (tg\alpha)_1 = 2,\quad k_2 = (tg\alpha)_2 = -1/2 .$$

т.е. уравнение оси CX в виде

$$y - 3 = 2(x - 2)$$

или

$$2x - y - 1 = 0,$$

а уравнение оси CY в виде

$$y - 3 = -1/2\,(x - 2)$$

или

$$x + 2y - 8 = 0.$$

Задача 19 Привести уравнение кривой второго порядка $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$ к каноническому виду. Найти каноническую систему координат.

Решение Запишем уравнение (52) для данной кривой

$$3tg^2\alpha - 8tg\alpha - 3 = 0 .$$

Это квадратное уравнение имеет два корня

$$(tg\alpha)_1 = 3 \ , \ (tg\alpha)_2 = -1/3 . \qquad (71)$$

Предположим, что

$$tg\alpha = 3 .$$

Тогда

$$\sin\alpha = 3/\sqrt{10}, \qquad \cos\alpha = 1/\sqrt{10}. \qquad (72)$$

и формулы поворота системы координат 0xy запишутся так

$$x = 1/\sqrt{10} \cdot x^* - 3/\sqrt{10} \cdot y^*, \qquad y = 3/\sqrt{10} \cdot x^* + 1/\sqrt{10} \cdot y^*. \qquad (73)$$

Подставляя (73) в уравнение кривой, находим уравнение данной кривой в системе координат $0x^*y^*$ в виде

$$9x^{*2} - y^{*2} - 9\sqrt{10}\,x^* + \sqrt{10}\,y^* + 11 = 0 . \qquad (74)$$

Выделяя полные квадраты, это уравнение можно переписать в виде

$$9\,(x^* - \sqrt{10}/2)^2 - (y^* - \sqrt{10}/2)^2 = 9 . \qquad (75)$$

Введем обозначения

$$x^* - \sqrt{10}/2 = X, \qquad y^* - \sqrt{10}/2 = Y. \qquad (76)$$

Эта система определяет параллельный перенос системы координат $0x^*y^*$, при котором ее начало переходит в точку $C(\sqrt{10}/2 \ ; \ \sqrt{10}/2)$. Ввиду (76) уравнение (75) приведется к каноническому виду

$$X^2 - Y^2/9 = 1. \qquad (77)$$

Найдем теперь каноническую систему координат. Базисными векторами канонической системы координат в силу (73) являются векторы

$$\bar{I} = \bar{i}^* = \{1/\sqrt{10} \ ; 3/\sqrt{10}\}, \quad \bar{J} = \bar{j}^* = \{-3/\sqrt{10} \ ; \sqrt{10}\}. \qquad (78)$$

При этом начало C канонической системы координат в системе координат $0x^*y^*$ совпадает с точкой

$$C\,(\sqrt{10}/2 \ ; \ \sqrt{10}/2), \qquad (79)$$

а в системе координат 0xy с точкой

$$C\,(-1 \ ; 2) . \qquad (80)$$

Замечание В описанном способе приведения кривой к каноническому виду следует сначала произвести поворот декартовой системы координат, а затем уже ее параллельный перенос. Это можно объяснить следующими обстоятельствами. Если кривая имеет единственный центр, то последовательность преобразований системы координат не имеет значения . Действительно, находя центр кривой второго порядка, мы можем сначала произвести параллельный перенос системы координат, при котором начало данной системы координат переходит в центр кривой. А затем уже - поворот системы координат. Если же кривая не имеет центра или имеет бесчисленное множество центров (прямую линию), то произвести параллельный перенос декартовой системы координат так, чтобы ее начало совпадало с началом канонической системы координат, в силу неопределенности центра кривой, невозможно. Следовательно, в этом случае мы должны воспользоваться последовательностью преобразований системы координат, которую описали выше.

Задача 20 Привести к каноническому виду уравнение кривой $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$. Найти каноническую систему координат .

Решение Составим квадратное уравнение (52) для уравнения кривой. Оно имеет вид

$$tg^2\alpha - 1 = 0 .$$

Корни этого уравнения таковы

$$(\mathrm{tg}\alpha)_1 = 1\ ,\ (\mathrm{tg}\alpha)_2 = -1\ . \qquad (81)$$

Выберем первый корень, т.е. пусть

$$\mathrm{tg}\alpha = 1.$$

Тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{2}/2\ ,\ \cos\alpha = \sqrt{2}/2 \qquad (82)$$

и формулы (53), определяющие поворот системы координат имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}/2 \cdot x^* - \sqrt{2}/2 \cdot y^*, \\ y &= \sqrt{2}/2 \cdot x^* + \sqrt{2}/2 \cdot y^* \end{aligned} \qquad (83)$$

Подставляя (83) в уравнение кривой, получим

$$2y^{*2} - 8\sqrt{2}\,x^* + 2\sqrt{2}\,y^* + 25 = 0. \qquad (84)$$

Выделяя полный квадрат, это уравнение можно привести к виду

$$(y^* + \sqrt{2}/2)^2 = 4\sqrt{2}\ (x^* - 3/\sqrt{2}). \qquad (85)$$

Вводя обозначение

$$\begin{aligned} x^* - 3/\sqrt{2} &= X, \\ y^* + \sqrt{2}/2 &= Y, \end{aligned} \qquad (86)$$

получим, что уравнение кривой запишется в каноническом виде

$$Y^2 = 4\sqrt{2}\ X. \qquad (87)$$

При этом уравнения (86) определяют параллельный перенос системы координат 0xy, при котором ее начало переходит в точку

$$C\ (3/\sqrt{2}\ ,\ -\sqrt{2}/2).$$

Найдем теперь каноническую систему координат. Базисными векторами этой системы кординат в силу (83) служат векторы

$$\bar{I} = \bar{i}^* = \{\ \sqrt{2}/2\ ;\ \sqrt{2}/2\},\quad \bar{J} = \bar{j}^* = \{-\ \sqrt{2}/2\ ;\ \sqrt{2}/2\}$$

При этом начало C канонической системы координат в системе координат $0x^*y^*$ совпадает с точкой

$$C\ (\ 3/\sqrt{2}\ ;\ -\sqrt{2}/2\ ).$$

Подставляя в (83) эти координаты точки C мы получим, что начало C канонической системы координат в системе координат 0xy совпадает с точкой

$$C\ (2\ ;\ 1).$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Составить уравнение кривой второго порядка, проходящей через пять точек 0 (0 ; 0), M (0 ; 2), N(-1 ; 0), P (-2 ; 1) и Q (-1 ; 3)
2. Найти центр следующих кривых а) $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 4y - 4 = 0$
 б) $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$.
3. При каких значениях параметров а и в уравнение $x^2 + 6xy + ay^2 + 3x + 6y - 4 = 0$ изображает а) кривую, имеющую единственный центр; б) кривую, имеющую много центров; в) кривую, не имеющую центра.
4. Найти уравнение касательной к кривой $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ параллельно оси абсцисс.
5. Найти уравнение касательной к кривой $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$, проходящей через начало координат.
6. Составить уравнение касательных, проведенных из точки A(-6 ; 3) к эллипсу $x^2/15 + y^2/9 = 1$.
7. Составить уравнение касательных к эллипсу $x^2/30 + y^2/24 = 1$, параллельных прямой $2x - y + 17 = 0$.
8. Составить уравнение касательных к эллипсу $x^2/169 + y^2/25 = 1$, перпендикулярных к прямой $13x + 12y - 115 = 0$.
9. Доказать, что произведение расстояний любой касательной эллипса от двух его фокусов есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.
10. Найти уравнение касательной к гиперболе $x^2/8 - y^2/9 = 1$, проходящей через точку A (2;0).

11.Найти уравнение касательной к гиперболе $x^2/15 - y^2/6=1$,параллельной прямой $x+y-7=0$.

12.Доказать ,что отрезок любой касательной гиперболы, заключенный между асимптотами, делится в точке прикосновения пополам.

13.Найти уравнение касательной к параболе $y^2 = 4x$, которая бы проходила через точку А (5 ; -7).

14.Найти уравнение касательной к параболе $y^2=12x$, образующую с прямой $4x - 2y + 9 = 0$ угол 45°.Доказать, что любая касательная к параболе отсекает на отрицательной части оси абсцисс отрезок, равный абсциссе точки прикосновения. А на оси ординат отрезок, равный половине ординаты точки прикосновения.

15.Дана кривая $2x^2 + 5xy - 3y^2 + 3x + 16y = 0$. Найти ее диаметр, параллельный оси абсцисс, и диаметр, ему сопряженный.

16.Найти два сопряженных диаметра кривой $xy - y^2 - 2x + 3y - 1 = 0$, из которых один параллелен оси ординат.

17.Дана кривая $3x^2 + 7xy + 5y^2 + 4x + 5y + 1 = 0$. Найти геометрическое место середин ее хорд, параллельных прямой $x + y + 1 = 0$.

18.Найти диаметр кривой $5x^2 - 3xy + y^2 - 3x + 2y - 5 = 0$, проходящей через середину хорды, отсекаемой этой кривой на прямой $x-2y-1= 0$.

19.Найти середину хорды, отсекаемой кривой $2x^2 +4xy+3y^2 -3x-3y = 0$ на прямой $x + 3y - 12 = 0$.

20.Через точку М (1 ; -3) провести хорду эллипса $x^2/15 + y^2/12 = 1$, сопряженную диаметру $2x + 5y = 0$.

21.Найти такие сопряженные диаметры кривой $3x^2 -6xy+y^2 -4x-6y+10=0$, которые образуют между собой угол 45° .

22.Найти асимптоты гиперболы $3x^2 + 10xy + 7y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$.

23.Дана парабола $x^2 - 6xy + 9y^2 - 12x + 14y = 0$.Составить уравнение диаметра параболы, перпендикулярного к сопряженным хордам.

24.Найти диаметр параболы $y^2 = 2px$, сопряженный тем хордам, которые наклонены под углом 45 ° к оси параболы.

25.Написать уравнение диаметра а параболы $x^2 = 6y$, сопряженного с прямой $4x - y - 5 = 0$.

В следующих задачах привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и найти каноническую систему координат

26.$xy + 3x - 3y - 9 = 0$

27.$8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$

28.$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 5 = 0$

29.$x^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 = 0$

30.$x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$

31.$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$

32.$32x^2 + 52xy - 7y^2 + 180 = 0$

33.$x^2 - 2xy + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

1) $3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y = 0$.
2) а) М (-1 ; -1) ,б) кривая имеет линию центров $x + 3y + 2 = 0$.
3) $a \neq 9$, б) $a = 9$, и $= 9$,линия центров $2x + 6y + 3 = 0$,
4) $a = 9$, $в \neq 9$.
5) $y + 4 = 0$ и $3y - 4 = 0$.
6) $2x + 5y = 0$, $2x + y = 0$.
7) $y = 3$ и $12x + 7y + 51 = 0$.
8) $2x - y \pm 12 = 0$.
9) $12x - 13y \pm 169 = 0$.
10) $3x + 2y - 6 = 0$ и $3x - 2y - 6 = 0$.
11) $x + y \pm 3 = 0$.
13) $x + y + 2 = 0$ и $2x + 5y + 25 = 0$.
14) $3x + y + 1 = 0$.
16) $y - 1 = 0$ и $4x + 5y - 3 = 0$.
17) $x - 1 = 0$ и $x - 2y + 3 = 0$.
18) $x + 3y + 1 = 0$.
19) $17x - 4y - 4 = 0$.
20) М (-3 ; 5) .
21) $2x - y - 5 = 0$.
22) $6x - 12y + 11 = 0$, $3x - y - 7 = 0$ или $2y - 5 = 0$, $3x - 3y - 2 = 0$.
23) $6x + 14y + 11 = 0$, $2x + 2y - 1 = 0$.
24) $10x - 30y - 27 = 0$.
25) $y - p = 0$.
26) $x-12=0$.
27) $X^2 - Y^2 = 0$, C(3 ; -3), $\overline{I} = \{ \sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2$, $\overline{J}=\{ -\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2\}$.
28) $X^2/9 + Y^2/4 = 1$, C(-3/5 ; 0), $\overline{I} = \{1/\sqrt{5} ; -2/\sqrt{5}\}$, $\overline{J}=\{2/\sqrt{5} ; 1/\sqrt{5}\}$.
29) $Y^2/1 - X^2/4 = 1$, C(1 ; 1/5), $\overline{I} = \{1/\sqrt{5} ; 2/\sqrt{5}\}$, $\overline{J} = \{-2/\sqrt{5} ; 1/\sqrt{5}\}$
30) $X^2 = 0$, C(-1/2 ; -1/2), $\overline{I} = \{ \sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2\}$, $\overline{J}= \{-\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2\}$.
31) $Y^2 = 2\sqrt{5}/5 \cdot X$, C(0 ; 3/10), $\overline{I} = \{2/\sqrt{5} ; 1/\sqrt{5}\}$, $\overline{J}= \{-1/\sqrt{5} ; 2/\sqrt{5}\}$
32) $x^2./1/4 + y^2/9/16 = 0$, C($-2/\sqrt{5}$; $1/4\sqrt{5}$), $\overline{I} = \{1/\sqrt{5} ; -2/\sqrt{5}\}$,
$\overline{J} = \{ -2/\sqrt{5} ; 1/\sqrt{5}\}$.
33) $Y^2/9 - X^2/4 = 1$, C(0 ; 0), $\overline{I} = \{2/\sqrt{5} ; 1/\sqrt{5}\}$,
$\overline{J} = \{-1/\sqrt{5} ; 2/\sqrt{5}\}$.
34) $Y^2 = 2\sqrt{2}X$, C ($\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}/2$), $\overline{I} = \{ \sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2\}$,
$\overline{J}=\{-\sqrt{2}/2 ; \sqrt{2}/2\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. М.: Наука , 1990, 672 с .
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука , 1979 . 512 с .
3. Акивис М.А. Высшая математика. Учебное пособие. М.: МИС и С, 1989, 78 с .
4. Виноградов И.М. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1986, 174 с.
5. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. М.: МГУ, 1969, 698 с .

ООО "Литограф", г. Якутск, ул. Б.Чижика, 31/4