Данные задания предназначены для практического усвоения темы "Линейные пространства" студентами математического отделения МФ. Вначале приводятся примеры решения задач, затем следуют сами лабораторные задания.

Составитель
Г. Г. Гурзо, канд. ф.-м. н., доцент

Утверждено методическим советом ЯГУ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть P-некоторое поле. Множество M называется линейным (векторным) пространством над полем P, если:

I. На M определена операция, называемая условно сложением, сопоставляющая каждой паре элементов a,в из M некоторый третий элемент из M, обозначаемый a+в (и называемый суммой) элементов a,в).

II. Определено умножение элементов из M на элементы поля P: каждой паре элементов a(a из M), k(k из P) поставлен некоторый элемент из M, обозначаемый k (и называемый произведением элемента k из P на элемент a из M).

III. Эти действия удовлетворяют следующим условиям:

a). Множество M является коммутативной группой относительно операции сложения, т.е.

1). a+в=в+a для любых a,в из M.

2). (a+в)+c=a+(в+c) для любых a,в,c из M.

3). Существует элемент 0 (нуль группы), такой, что a+0=a для любого a из M.

4). для любого a из M существует элемент - a (противоположный к элементу a), такой, что a+(-a)=0.

IV. 1). 1*a=a для любого a из M и единицы 1 поля P.

2). k(la)=(kl)a для любых k,l из P,a из M.

3). (k+l)a=ka+la для любых k,l из P,a из M.

4). k(a+в)=ka+kв для любых k из P,a,в из M.

Элементы линейного пространства M в дальнейшем мы будем называть векторами, а элементы поля P - числами, хотя на самом деле природа этих элементов может быть иной.
Умножение числа на элемент пространства мы в дальнейшем будем называть условно операцией, хотя это действие вообще говоря не является двухместной операцией в том смысле, как она определяется в курсе алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подмножество H пространства M называется подпространством пространства M, если это подмножество замкнуто относительно сложения векторов и умножения вектора на число, т.е.:

1). Если a принадлежит H, в принадлежит H, то (a+в) принадлежит H.

2). Если a принадлежит H, то ka принадлежит H, для любого k из P.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется линейно зависимой, если существуют такие числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, не равные одновременно нулю, что

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots + k_n a_n = 0.$$

В противном случае, т. е. если это равенство возможно только при равенстве нулю всех коэффициентов $k_1, k_2, \ldots, k_n$, система называется линейно независимой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Линейно независимая система векторов линейного пространства M называется максимальной, если добавление к ней любого нового вектора из M делает эту систему линейно зависимой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Любая максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется базисом или базой пространства.

Определение базиса можно дать и в другой, эквивалентной предыдущей формулировке.

Базис пространства M - это линейно независимая система векторов из M, через которую линейно выражается любой вектор пространства M.

Все базисы линейного пространства состоят из одинакового количества векторов, которое называется размерностью линейного пространства (мы ограничимся рассмотрением конечномерных пространств, т. е. пространств, базисы которых состоят из конечного числа векторов).

ЗАДАЧА 1. Показать, что множество функций вида $k+le^x$, где k, l - действительные числа, образует относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на число линейное пространство. Определить его размерность.

РЕШЕНИЕ:

I. Нетрудно проверить замкнутость операции сложения, т.е., что сумма двух функций $k+le^x$ и $k'+l'e^x$ есть функция $(k+k')+(l+l')e^x$ того же множества, где k, k', l, l' - действительные числа.

II. Далее убеждаемся, что при умножении функции $k+le^x$ на любое действительное число k', получается функция $k'k+k'le^x$ того же множества.

III. Проверим выполнение условий III.1)-III.4). Выполнимость условий III.1) и III.2) следует из того, что множество действительных чисел удовлетворяет ассоциативному и коммутативному законам.

Условие III.3) выполняется, в роли элемента 0 выступает функция $0+0e^x$.

Условие III.4) выполняется, так как для элемента $k+le^x$ противоположным является элемент $-k-le^x$.

IV. Выполнимость условий IV.1)-IV.4) следует из справедливости равенств:

IV.1) $1*(k+le^x)=k+le^x$

IV.2) $k'(k+le^x)=(k'k)+(k'l)e^x$

IV.3) $(k'+l)(k+le^x)=k'(k+le^x)+l(k+le^x)$

IV.4) $l(k+le^x+k'+l'e^x)=l(k+le^x)+l(k'+l'e^x)$.

Все условия выполняются, поэтому данное множество функций является линейным пространством относительно указанных операций.

В качестве системы образующих элементов можно взять, например, множество функций $\{1, e^x\}$. Ясно, что любая функция $k+le^x$ является линейной комбинацией функции 1 и e^x. Докажем линейную независимость этих функций.

Допустим, что некоторая линейная комбинация функций 1 и e^x равна 0, т. е. $k+le^x$. Придавая x значения 0 и 1, получаем систему уравнений $\begin{cases} k+l=0 \\ k+le=0 \end{cases}$, которая имеет единственное решение $l=k=0$. Значит система функций $1, e^x$ - линейно независима, и любая функция вида $k+le^x$, где k, l - любые действительные числа, является линейной комбинацией функций $1, e^x$, поэтому система функций $1, e^x$ - может служить базисом данного пространства и размерность пространства равна 2.

ЗАДАЧА 2. Найти размерность линейного подпространства H натянутого на векторы:

$a(1,2,4,0,1)$, $в(1,1,1,0,1)$, $c(1,0,0,1,1)$, $d(0,0,3,1,0)$.

РЕШЕНИЕ: Если пространство натянуто на векторы $a, в, c, d$, то это значит, что максимальная линейно независимая подсистема векторов данной системы может служить базисом подпространства H. Составляем матрицу, строками которой являются векторы и вычисляем ее ранг,например приведением к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}1&2&4&0&1\\1&1&1&0&1\\1&0&0&1&1\\0&0&3&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&4&0&1\\0&-1&-3&0&0\\0&-2&-3&1&0\\0&0&3&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&4&0&1\\0&-1&-2&0&0\\0&0&3&1&0\\0&0&3&1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&4&0&1\\0&-1&-2&0&0\\0&0&3&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равен 3, значит размерность подпространства равна 3.В качестве базиса можно взять векторы:

$a_1=(1,2,4,0,1)$ $\quad$ $\text{в}_1=(0,1,2,0,0)$ $\quad$ $c_1=(0,0,3,1,0)$,

а можно и векторы а,в,с,т.к.первые три строки матрицы содержат ненулевой минор третьего порядка.

Если $e_1,e_2,..,e_n$ - старый базис и $e'_1,e'_2,..,e'_n$ - новый базис линейного пространства,то их связь можно описать следующим матричным равенством:

$E'=TE$, где $E'=\begin{pmatrix}e'_1\\ \vdots\\ e'_n\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}e_1\\ \vdots\\ e_n\end{pmatrix}$, а $T=\begin{pmatrix}\tau_{11}&\dots&\tau_{1n}\\ \dots&\dots&\dots\\ \tau_{n1}&\dots&\tau_{nn}\end{pmatrix}$-матрица перехода от старого базиса E к новому E'.Эту связь можно задать системой равенств:

$$\begin{cases}e'_1=\tau_{11}e_1+\dots+\tau_{1n}e_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ e'_n=\tau_{n1}e_1+\dots+\tau_{nn}e_n\end{cases}$$

Всякий вектор X пространства M единственным образом представляется как линейная комбинация векторов базиса пространства,т.е.найдутся числа $k_1,k_2,..,k_n$,такие,что $X=k_1e_1+\dots+k_ne_n$.Строку $[k_1,k_2,..,k_n]=[X]$ называют строкой координат вектора X в базисе $e_1,..,e_n$.Один и тот же вектор X в разных базисах задается разными строками координат,которые связаны между собой следующим образом: $[k_1,..,k_n]=[k'_1,..,k'_n]T$ или $[k'_1,..,k'_n]=[k_1,..,k_n]T^{-1}$,где T - матрица перехода от базиса $e_1,..,e_n$ к $e'_1,..,e'_n$.

ЗАДАЧА 3.Показать,что каждая из следующих систем векторов:

$a=(1,1,0)$, $a'=(1,1,3)$

$\text{в}=(0,2,1)$, $\text{в}'=(2,3,0)$

$c=(0,1,1)$, $c'=(1,2,0)$

является базисом пространства A_3 над полем действительных чисел.Найти координаты вектора $X=(3,5,3)$ в базисе а,в,с и матрицу перехода от базиса а,в,с к базису а',в',с'.

РЕШЕНИЕ:Так как пространство A_3 трехмерно,его базисом является любая линейно независимая система векторов. Из координат систем векторов составляем матрицы A и A'. Вычисляем определители:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=1,\quad |A'|=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&3&0\\1&2&0\end{vmatrix}=3.$$

Поскольку оба определителя отличны от нуля,то обе данные системы векторов являются базисами.

Для того,чтобы найти координаты вектора X в базисе а,в,с,нужно линейно выразить вектор X через векторы а,в,с, т.е. найти числа k_1,k_2,k_3 ,чтобы выполнялось равенство $X=k_1a+k_2\text{в}+k_3c$.

Координаты k_1,k_2,k_3 найдем,решив систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}k_1=3\\k_1+2k_2+k_3=5\\k_2+k_3=3.\end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение: $k_1=3,k_2=-1,k_3=4$. Таким образом,вектор X в базисе а, в, с имеет следующую строку координат $[X]=[3,-1,4]$.

Матрицу перехода T от базиса а,в,с к базису а',в',с' найдем из матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix}a'\\ \text{в}'\\ c'\end{pmatrix}=T*\begin{pmatrix}a\\ \text{в}\\ c\end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix}a'\\ \text{в}'\\ c'\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}a\\ \text{в}\\ c\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&0\\1&2&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&3&0\\1&2&0\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&6\\2&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 4.В некоторой базе e_1,e_2,e_3 трехмерного пространства вектор X имеет строку координат $[1,2,1]$.Найти строку координат этого вектора в новой базе:

$$e'_1=2e_1+e_2$$
$$e'_2=e_1+e_2$$
$$e'_3=e_1+e_3.$$

РЕШЕНИЕ:Найдем матрицу перехода от базы e_1,e_2,e_3 к базе e'_1,e'_2,e'_3,из матричного равенства $E'=TE$,т.е.

$$\begin{pmatrix}e'_1\\e'_2\\e'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем координаты вектора X в новой базе:

$$[X] = [k'_1, k'_2, k'_3] = [k_1, k_2, k_3]T^{-1} =$$

$$= [1,2,1] * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = [-2,4,1] .$$

ЗАДАЧА 5. Показать, что многочлены $1, x-2, (x-2)^2$ образуют базис пространства M многочленов от одного неизвестного степени ≤ 2 с действительными коэффициентами. Найти координаты многочлена x^2-x+1 в этом базисе.

РЕШЕНИЕ: Всякий многочлен $f(x)$ пространства M можно разложить в строку Тейлора по степеням $x-2$.

$$f(x) = f(2)+(x-2)* f'(2)/1! +(x-2)^2 * f''(2)/2!$$

Следовательно, система многочленов $1, x-2, (x-2)^2$ является системой образующих элементов пространства M, т.е. любой многочлен пространства M линейно выражается через систему многочленов $1, x-2, (x-2)^2$.

Докажем линейную независимость системы многочленов $1, x-2, (x-2)^2$. Пусть $k_1*1+k_2(x-2)+k_3(x-2)^2=0$, раскроем скобки, перегруппируем, получим $k_3x^2+(k_2-4k_3)x+(k_1-2k_2+4k_3)=0$. Многочлен равен нулю только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} k_3=0 \\ k_2-4k_3=0 \\ k_1-2k_2+4k_3=0, \end{cases}$$

которая имеет только нулевое решение, т.е. $k_1=k_2=k_3=0$. Тем самым мы доказали, что система многочленов $1, x-2, (x-2)^2$ является базисом пространства M.

Найдем координаты многочлена x^2-x+1 в базисе $1, x-2, (x-2)^2$:

$$x^2-x+1=k_1 1+ k_2(x-2)+ k_3(x-2)^2 .$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены в правой части последнего равенства, получим:

$$k_3x^2+(k_2-4k_3)x+(k_1-2k_2+4k_3) .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x получаем систему:

$$\begin{cases} k_3=1 \\ k_2-4k_3=-1 \\ k_1-2k_2+4k_3=1 . \end{cases}$$

Данная система имеет единственное решение $k_1=3$, $k_2=3$, $k_3=1$.

Таким образом, [3,3,1]-строка координат многочлена x^2-x+1 в базисе $1, x-2, (x-2)^2$.

Замечание: Найти координаты многочлена $f(x)$, в базисе $1, x-2, (x-2)^2$ можно было и без формулы Тейлора, разложив его по степеням $x-2$ с помощью схемы Горнера.

ЗАДАЧА 6. Пусть L_4 есть линейное пространство над полем R многочленов с действительным коэффициентами степени ≤ 3. Найти матрицу перехода от базиса $1, x, x^2, x^3$ к базису $1, x+2, (x+2)^2, (x+2)^3$. С помощью матрицы перехода разложить многочлен $1+4x+6x^2+2x^3$ по степеням двучлена $x+2$.

РЕШЕНИЕ: Так как:

$$1=1$$
$$x+2=2+x$$
$$(x+2)^2=4+4x+x^2$$
$$(x+2)^3=8+12x+6x^2+x^3,$$

то матрица матрица перехода от базиса $1, x, x^2, x^3$ к базису $1, x+2, (x+2)^2, (x+2)^3$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \\ 8 & 12 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Чтобы разложить многочлен $1+4x+6x^2+2x^3$ по степеням двучлена $x+2$, нужно найти его строку координат в базисе $1, x+2, (x+2)^2, (x+2)^3$, т.е. [1,4,6,2]

$$T^{-1}=[1,4,6,2] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ -8 & 12 & -6 & 1 \end{pmatrix} = [1,4,-6,2] .$$

Таким образом:

$$1+4x+6x^2+2x^3=1+4(x+2)-6(x+2)^2+2(x+2)^3 .$$

ЗАДАЧА 7. Показать, что симметрические матрицы второго порядка с действительными элементами образуют, относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на действительное число, линейное пространство L. Найти его базис и размерность.

РЕШЕНИЕ: Нетрудно убедиться, что сумма симметрических матриц

$$\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a' & b'\\ b' & c'\end{pmatrix}$$

снова является симметрической матрицей

$$\begin{pmatrix} a+a' & b+b'\\ b+b' & c+c'\end{pmatrix}.$$

Если симметрическую матрицу

$\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$, умножим на число k, полученная матрица $\begin{pmatrix} ka & kb\\ kb & kc\end{pmatrix}$ снова является симметрической.

Выполнимость аксиом III.1 и III.2 следует из того, что множество действительных чисел удовлетворяет ассоциативному и коммутативному законам. Аксиомы III.3 и III.4 выполняются, нулем является матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, для матрицы $\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ противоположной является $\begin{pmatrix} -a & -b\\ -b & -c\end{pmatrix}$.

Выполнимость аксиом IV.1-IV.4 следует из справедливости равенств:

1) $1\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$

2) $k\begin{pmatrix} la & lb\\ lb & lc\end{pmatrix} = (kl)\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$

3) $(k+l)\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$

4) $k\left(\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b'\\ b' & c'\end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} a' & b'\\ b' & c'\end{pmatrix}$.

Таким образом, множество симметрических матриц второго порядка с действительными элементами образует линейное пространство относительно сложения матриц и умножения матрицы на число.

Система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ является системой порождающих элементов пространства H, т. к. любая матрица пространства H линейно выражается через эту систему матриц:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Убедимся в линейной независимости данной системы порождающих элементов. Пусть $k_1\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Произведя вычисления в левой части последнего равенства, получаем:

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2\\ k_2 & k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Из равенства матриц получаем: $k_1=k_2=k_3=0$. Тем самым доказано, что система матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ является базисом пространства L, и размерность пространства равна 3.

Пусть L-некоторое подпространство пространства V, x_0-вектор пространства V, не принадлежащий H.

Множество всех векторов вида x_0+a, где a принадлежит L называется линейным многообразием (обозначается $P=L+x_0$), полученным из L путем сдвига на вектор x_0. Пространство L называют направляющим подпространством для многообразия $P=L+x_0$, а вектор x_0-вектором сдвига.

Размерность линейного многообразия равна размерности направляющего подпространства.

Пусть дана однородная система линейных уравнений с коэффициентами из поля P

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}.$$

Множество решений этой системы образует подпространство размерности n-r (где r-ранг основной матрицы) n-мерного векторного пространства. Базисом пространства решений может служить любая фундаментальная система решений.

Если же мы возьмем неоднородную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases},$$

то множество решений задает линейное многообразие. Направляющим подпространством служит пространство решений соответствующее однородной системе, а вектором сдвига любое частное решение неоднородной системы.

ЗАДАЧА 8. Найти вектор сдвига, базис и размерность направляющего подпространства линейного многообразия P, заданного системой линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=3 \\ x_1-2x_2+3x_3=2 \\ x_1-x_2-x_5=0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ: Возьмем соответствующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}$$

найдем ее фундаментальную систему решений $(-1,-2,-1,0,1)$, $(3,3,1,1,0)$. Эта фундаментальная система решений может служить базисом направляющего пространства, размерность которого равна 2. В качестве вектора сдвига можно взять любое частное решение данной неоднородной системы, например $(5,3,1,0,1)$.

ЗАДАЧА 9. При каком значении параметра a, пространство решений данной системы имеет наибольшую размерность

$$\begin{cases} (a+1)x_1+x_2-x_3=0 \\ (a+1)x_1+(a+4)x_2-x_3=0 \\ (a+1)x_1+(a+4)x_2+(a+2)x_3=0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ: Вычислим определитель основной матрицы системы.

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ a+1 & a+4 & -1 \\ a+1 & a+4 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & -1 \\ 0 & a+3 & 0 \\ 0 & 0 & a+3 \end{vmatrix} = (a+1)(a+3)^2.$$

Он равен нулю, если $a=-1$, $a=-3$. Определим размерность пространства решений при $a=-1$. Основная матрица системы при $a=-1$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

ее ранг равен 2, размерность пространства решений равна $n-r=3-2=1$. Размерность пространства решений при $a=-3$ равна 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Суммой подпространств H и L пространства V (обозначается H+L) называется множество всех векторов вида h+a, где h из H, a из L.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пересечением подпространств H и L пространства V

(обозначается $H \cap L$) называется множество всех векторов, принадлежащих одновременно пространству H и пространству L.

Нетрудно доказать, что сумма и пересечение подпространств H и L снова являются подпространствами пространства V.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Сумма подпространств H и L пространства V называется прямой (обозначается $H \dot{+} L$), если каждый вектор пространства H+L единственным образом представляется в виде суммы двух слагаемых h+a, где h из H, a из L.

Сумма подпространств H и L является прямой тогда и только тогда, когда пересечение подпространств H и L состоит только из нулевого вектора.

ЗАДАЧА 10. Найти базис суммы и пересечения подпространств L и K пространства V_4, если L задано системой уравнений, основная матрица которой имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, а K натянуто на векторы $a=(1,1,2,1)$, $b=(1,2,2,-5)$, $c=(2,3,4,-4)$.

РЕШЕНИЕ: Решив систему

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+x_3+x_4=0 \end{cases}$$

найдем ее фундаментальную систему решений $d=(1,0,-1,-2)$ и $e=(0,1,2,0)$, которая может служить базой L.

Базисом K является максимальная линейно независимая подсистема системы векторов a, b, c, которая состоит из двух векторов, например a и b, так как ранг матрицы, составленной из векторов a, b, c равен 2.

Базой суммы подпространств L и K может служить любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов d, e, a, b.

Ранг матрицы, строками которой служат координаты векторов d, e, a, b, равен 3, поэтому в качестве базы пространства L+K можно взять любую независимую подсистему из трех векторов, например, векторы d, e, b.

Размерность пространства $L \cap K$ равна сумме размерностей пространств L и K минус размерность пространства L+K, т. е. $r(L \cap K)=2+2-3=1$.

Так как векторы пространства $L \cap K$ лежат в каждом из пространств L и K, то они линейно выражаются через базисные векторы как пространства L, так и пространства K, т. е. если x-это базисный вектор, пространства $L \cap K$, то найдутся числа $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, такие, что