Данные задания предназначены для помощи студентам математического факультета при овладении техникой решения задач по указанной теме.

Вначале даются необходимые понятия и образцы решения задач. Далее излагаются сами задания.

Составители:

Г. Г. Гурзо, доцент кафедры алгебры и геометрии;

А. В. Скрябин, ассистент кафедры алгебры и геометрии.

Утверждено методическим советом университета

Говорят, что в n-мерном действительном линейном пространстве R_n определено скалярное умножение, если каждой паре векторов **x** и **y** поставлено в соответствие действительное число (**x**, **y**), называемое скалярным произведением этих векторов, причем выполнены условия:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x}); \tag{1}$$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y}+\mathbf{z}); \tag{2}$$

$$(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}); \tag{3}$$

для любого действительного числа α.

Если $\mathbf{x}\neq 0$, то

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})>0. \tag{4}$$

Из этих свойств сразу следует:

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{x}_i,\ \sum_{j=1}^{l}\beta_j\mathbf{y}_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\alpha_i\beta_j(\mathbf{x}_i,\ \mathbf{y}_j).$$

Если в n-мерном линейном пространстве определено скалярное умножение удовлетворяющее условиям (1) - (4), то это пространство называется n-мерным действительным евклидовым пространством.

При любом n в n-мерном линейном пространстве можно определить скалярное умножение, т. е. можно превратить это пространство в евклидово.

Если мы рассматриваем линейное пространство над полем комплексных чисел, то введя рассмотренное скалярное произведение, получаем комплексное евклидово пространство. К сожалению, скалярное произведение теряет при этом много важных свойств. Например:

$$\mathbf{x}=3\mathbf{e}_1+4\mathbf{e}_2+5i\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{x})=9+16-25=0.$$

Следовательно условие (4) не выполняется, т.е. комплексным евклидовым пространством, является комплексное линейное пространство, в котором определено скалярное умножение векторов удовлетворяющее следующим трем условиям:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x}); \qquad (5)$$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}+\mathbf{z}); \qquad (6)$$

$$(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad (7)$$

для любого комплексного числа α.

Линейное пространство $\mathfrak{R}$ над полем комплексных чисел называется унитарным, если каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ взятых из $\mathfrak{R}$ в определенном порядке, поставлено в соответствие число из поля комплексных чисел, называемое скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ обладающее следующими свойствами:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}; \qquad (8)$$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + (\mathbf{y}+\mathbf{z}), \qquad (9)$$

$$(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}); \qquad (10)$$

для любого комплексного числа α.
Если $\mathbf{x} \neq 0$, то

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0. \qquad (11)$$

Заметим, что понятие унитарного и евклидова пространства над полем действительных чисел совпадают.

Отметим, что в данных лабораторных заданиях рассматриваются действительные евклидовы пространства.

Определение 1. Векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются ортогональными, если $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$.

Определение 2. Система векторов называется ортогональной, если все векторы этой системы попарно ортогональны между собой.

Из этого определения следует замечание: Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Утверждение 1. Всякое евклидово пространство обладает ортогональными базами, причем любой ненулевой вектор этого пространства входят в состав некоторой ортогональной базы.

Определение 3. Вектор $\mathbf{y}$ называется нормированным, если $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 1$.

Определение 4. База $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ евклидова пространства E_n называется ортонормированной, если она ортогональна, а все векторы нормированы, т.е.:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Определение 5. Процессом ортогонализации системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_s$ называется переход от этой системы к новой системе $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_s$, построенной следующим образом:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1; \quad \mathbf{b}_K = \mathbf{a}_K - \sum_{i=1}^{K-1} c_i \mathbf{b}_i \ (K = 2, 3, \ldots, s), \text{ где } c_i = \frac{(\mathbf{a}_K, \mathbf{b}_i)}{(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_i)}$$

$(i = 1, 2, \ldots, K-1)$, если $\mathbf{b}_i \neq 0$, и c_i - любое число, если $\mathbf{b}_i = 0$.
Значение c_i получается умножением равенства, выражающего $\mathbf{b}_K$ через $\mathbf{a}_K$ и $\mathbf{b}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, K-1)$, на $\mathbf{b}_i$ при условии, что $(\mathbf{b}_K, \mathbf{b}_i) = 0$.

Определение 6. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_K$ - произвольная система векторов. Матрица, состоящая из попарных скалярных произведений данных векторов, т.е. матрица

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_K) \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_K) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{a}_K, \mathbf{a}_1) & (\mathbf{a}_K, \mathbf{a}_2) & \ldots & (\mathbf{a}_K, \mathbf{a}_K) \end{pmatrix},$$

называется матрицей Грамма для данной системы векторов; ее определитель называется определителем Грамма.

Пример 1. Можно ли в 4^x-мерном векторном пространстве задать скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с помощью формулы

$$\mathfrak{A}(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4).$$

где x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3, y_4 - координаты векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в некотором базисе. Написать матрицу Грамма в этом базисе. Ортогонализировать систему векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ относительно данного скалярного призведения, если

$$\mathfrak{A}=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4,$$

$$\mathbf{e}_1=(1,0,0,1),\ \mathbf{e}_2=(1,0,0,0),\ \mathbf{e}_3=(0,1,0,1).$$

Решение: Формула $\mathfrak{A}$ задает скалярное произведение, если в ней выполняются аксиомы скалярного произведения, другими словами:

$$1.\ \mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathfrak{A}(\mathbf{y},\mathbf{x}),$$
$$2.\ \mathfrak{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{z})+\mathfrak{A}(\mathbf{y},\mathbf{z}),$$
$$3.\ \mathfrak{A}(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha\mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$
$$4.\ \mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{x})>0.$$

Ввиду симмотричного вхождения x_i и y_i в $\mathfrak{A}$, аксиомы 1 и 3 очевидно выполняются для $\mathfrak{A}$. Проверим аксиомы 2 и 4: Пусть $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2,z_3,z_4)$, тогда

$$2.\quad \mathfrak{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(x_1+y_1)z_1+(x_1+y_1)z_2+(x_2+y_2)z_1+2(x_2+y_2)z_2+(x_3+y_3)z_3+$$

$$+(x_4+y_4)z_4=(z_1y_1+z_1y_2+z_2y_1+2z_2y_2+z_3y_3+z_4y_4)+(x_1z_1+x_1z_2+x_2z_1+2x_2z_2+$$

$$+x_3z_3+x_4z_4=\mathfrak{A}(\mathbf{y},\mathbf{z})+\mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Следовательно, аксиома 2 выполняется.

$$4.\ \mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2+ 2x_1x_2+ 2x_2^2+ x_3^2+ x_4^2 = (x_1+ x_2)^2+ x_2^2+ x_3^2+ x_4^2 > 0.$$

Таким образом, аксиома 4 также выполняется, поэтому формула $\mathfrak{A}$ задает скалярное произведение.

Пусть $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ - базис пространства, в котором даны координаты векторов x и y, тогда

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4 \quad \text{и} \quad \mathbf{y}=y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+y_3\mathbf{a}_3+y_4\mathbf{a}_4.$$

Рассмотрим теперь $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, имеем:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+x_3\mathbf{a}_3+x_4\mathbf{a}_4,\ y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+y_3\mathbf{a}_3+y_4\mathbf{a}_4)=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{4}(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)x_iy_j,$$

обозначив $(\mathbf{a}_i,\mathbf{a}_j)$ через g_{ij}, получаем $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i,j=1}^{4} g_{ij}x_iy_j$.

Т.о., элементы g_{ij} матрицы Грамма для данного базиса являются коэффициентами при произведениях вида x_iy_j в выражении для скалярного произведения $\mathfrak{A}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Поэтому в нашем случае матрица Грамма имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь ортогонализируем систему векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ относительно данного скалярного призведения.

Первый шаг: $\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1$.

Второй шаг:

$$\mathbf{e}_2'=\mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1')}{(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1')} * \mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)} * \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 - 1/2\mathbf{e}_1,$$

поскольку: $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = 1*1 + 1*0 + 0*1 + 2*0*0 + 0*0 + 1*0 = 1,$

$$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) = 1*1 + 0*0 + 0*0 + 2*0*0 + 0*0 + 1*1 = 2.$$

$x_1x_4 \quad x_2x_3 \quad x_2x_3 \quad 2x_2x_3 \quad x_2x_3 \quad x_1x_4$

Третий шаг:

$$\mathbf{e}_3'=\mathbf{e}_3 - \frac{(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1')}{(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1')} * \mathbf{e}_1' - \frac{(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2')}{(\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_2')} * \mathbf{e}_2',$$

Учитывая, что $\mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2'= \mathbf{e}_2 - 1/2\mathbf{e}_1$, а скалярное произведение задается формулой $\mathfrak{A}=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4$ получим $\mathbf{e}_3'=\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_1$, т.о.:

$$\mathbf{e}_1' = (1,\ 0,\ 0,\ 1),$$

$$e_2' = (1/2,\ 0,\ 0,\ -1/2),$$

$$e_3' = (-1,\ 1,\ 0,\ 0).$$

Пример 2. В 3^x-мерном векторном пространстве выбран базис e_1, e_2, e_3. Исходя из данного базиса и используя процесс ортогонализации, построить ортонормированный базис, если матрица Грамма в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:
Применим в системе e_1, e_2, e_3 процесс ортогонализации:
Первый шаг: $\mathbf{e}_1' = e_1$.
Второй шаг:

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1')}{(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1')} * \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} * \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1.$$

Третий шаг:

$$\mathbf{e}_3' = \mathbf{e}_3 - \frac{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1')}{(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_1')} * \mathbf{e}_1' - \frac{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2')}{(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_2')} * \mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_3.$$

Векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ образуют ортогональный базис. Чтобы получить ортонормированный базис, следует каждый из этих векторов нормировать, т.е. умножить на число, обратное его длине. В данном случае: $|\mathbf{e}_1'| = \sqrt{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = 1$, $|\mathbf{e}_2'| = \sqrt{(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) - 2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)} = 1$, $|\mathbf{e}_3'| = \sqrt{(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)} = 1$, следовательно, искомый ортонормированный базис состоит из векторов:

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{e}_1,$$
$$\bar{\mathbf{e}}_2 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$
$$\bar{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3.$$

Пример 3. Доказать, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_K$ линейно зависима тогда и только тогда, когда ее определитель Грамма равен

нулю. С помощью определителя Грамма выяснить, является ли данная система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, заданная своими координатами в ортонормированном базисе, линейно зависимой, если: $\mathbf{a}_1 = (2, 4, 0, 0, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 0, 0, 4, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 2, 0, 2, 0)$.

Решение: Допустим, что система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_K$ линейно зависима, т.е.:

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_K\mathbf{a}_K = 0$$

для некоторых чисел c_1, c_2, ..., c_K, не равных одновременно нулю. Умножая данное равенство скалярно на $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_K$, получаем последовательно:

$$\begin{aligned} &c_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1) + c_2(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1) + \ldots + c_K(\mathbf{a}_K,\mathbf{a}_1) = 0, \\ &c_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) + c_2(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2) + \ldots + c_K(\mathbf{a}_K,\mathbf{a}_2) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (*) \\ &c_1(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_K) + c_2(\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_K) + \ldots + c_K(\mathbf{a}_K,\mathbf{a}_K) = 0. \end{aligned}$$

Равенства (*) показывают, что если первую строку определителя Грамма умножить на c_1, вторую на c_2 и т.д., а затем произвести сложение, то получим нулевую строку. Другими словами, система строк определителя Грамма линейно зависима. Следовательно определитель Грамма равен нулю. Обратно, допустим, что определитель Грамма для данной системы векторов равен нулю. Отсюда следует, что между строками определителя существует линейная зависимость, или, что тоже самое, равенства (*) справедливы при некотором наборе чисел c_1, c_2, ..., c_K, не равных одновременно нулю. Это означает, в свою очередь, что вектор

$$\mathbf{a} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_K\mathbf{a}_K$$

ортогонален любому из векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_K$. Но в таком случае вектор $\mathbf{a}$ ортогонален к любой линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, ..., $\mathbf{a}_K$; в частности, вектор $\mathbf{a}$ ортогонален самому себе. Однако равенство $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ возможно только при $\mathbf{a} = 0$. Итак, $\mathbf{a} = 0$, т.е. система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_K$ линейно зависима.

В нашей задаче определитель Грамма имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 20 & 4 & 12 \\ 4 & 20 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, данная система векторов линейно зависима.

Пример 4. Найти векторы, дополняющие данную систему векторов до ортонормированного базиса 3^x-мерного пространства:

$$\mathbf{a} = (0,\ 4/5,\ 3/5).$$

Решение: Если произвольный вектор $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$ ортогонален данному вектору $\mathbf{a}$, то $(\mathbf{a},\mathbf{x})=0$, т.е. $0x_1+4/5x_2+3/5x_3=0$ или $4x_2+3x_3=0$. В качестве вектора $\mathbf{b}$ возьмем одно частное решение этой системы: $\mathbf{b}=(0,\ 3,\ -4)$. Т.к. вектор $\mathbf{c}$ должен быть ортогонален векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то его координаты должны удовлетворять системе равенств:

$$\begin{cases} (\mathbf{a},\mathbf{c})=0, \\ (\mathbf{b},\mathbf{c})=0; \end{cases}$$

т.е. в качестве вектора $\mathbf{c}$ можно взять любое ее частное решение, например: $\mathbf{c}=(1,\ 0,\ 0)$. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ попарно ортогональны, нормируя векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, получим искомый ортонормированный базис:

$$\mathbf{a} = (0,\ 4/5,\ 3/5),\ \mathbf{b} = (0,\ 3/5,\ -4/5),\ \mathbf{c} = (1,\ 0,\ 0).$$

Пример 5. Ортогонализировать базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ пространства многочленов степени ≤ 2 со скалярным произведением

$$(f,g)=\int_1^2 f(x)g(x)dx, \quad \text{если: } \mathbf{e}_1=1, \quad \mathbf{e}_2=x+1, \quad \mathbf{e}_3=x^2+1.$$

Решение: Методом ортогонализации находим последовательно:

$$\mathbf{e}_1'=\mathbf{e}_1=1,$$

$$\mathbf{e}_2' = \mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1')}{(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1')} * \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 - \frac{(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)} * \mathbf{e}_1 = x - 3/2,$$

$$\text{т.к. } (\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1') = \int_1^2 (x+1)dx = 5/2, \quad (\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1') = \int_1^2 dx = 1.$$

$$\mathbf{e}_3'=\mathbf{e}_3 - \frac{(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1')}{(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1')} * \mathbf{e}_1' - \frac{(\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2')}{(\mathbf{e}_2',\mathbf{e}_2')} * \mathbf{e}_2' = x^2 - 3x + 13/6.$$

Следовательно, искомый базис имеет вид:

$$\mathbf{e}_1' = 1, \qquad \mathbf{e}_2' = x - 3/2, \qquad \mathbf{e}_3' = x^2 - 3x + 13/6.$$

Пример 6. Найти базу ортогонального дополнения и систему линейных уравнений, задающую ортогональное дополнение пространства решений данной системы:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0, \\ x_2-x_4+x_5=0. \end{cases} \qquad (**)$$

Решение: Заметим, что в любой однородной системе линейных уравнений векторы, координаты которых задают коэффиценты уравнений данной системы, ортогональны векторам, задающим решения данной системы. Поэтому, в качестве базы ортогонального дополнения пространства решений можно взять векторы:

$$\mathbf{a}_1 = (1,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0) \text{ и } \mathbf{a}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1).$$

Далее найдем систему линейных уравнений, задающую ортогональное дополнение пространства решений системы (**). Для этого находим фундаментальную систему решений системы (**):

$$(-1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (-1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1).$$

Таким образом, искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} -x_1+x_3=0, \\ x_1+x_2+x_4=0, \\ -x_1-x_2+x_5=0. \end{cases}$$

Пример 7. Найти ортогональную проекцию **y** и ортогональную составляющую **z** вектора **x**=(1,2,1,0,0) относительно подпространства L, являющегося пересечением подпространств L_1 и L_2, заданных следующими системами линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_4+x_5=0; \end{cases} \quad \text{и} \quad x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0.$$

Решение: Пусть L - подпространство евклидова пространства E_n и $L^{\perp}$ - ортогональное дополнение к L. Тогда любой вектор **x** $\in E_n$ однозначно представляется в виде **x**=**y**+**z**, где вектор **y** $\in$ L, а **z** $\in L^{\perp}$. Вектор **y** называется ортогональной проекцией вектора **x** на подпространство L, а **z** - ортогональной составляющей **x** относительно L. Поэтому $E_n = L \oplus L^{\perp}$, где $L = L_1 \cap L_2$. Пространство L - есть пространство решений следующей однородной системы:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_4+x_5=0; \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим базу L:

$$\mathbf{a}_1=(-1,1,0,0,0), \quad \mathbf{a}_2=(-1,0,1,0,0), \quad \mathbf{a}_3=(0,0,0,-1,1)$$

В качестве базы $L^{\perp}$ возьмем векторы:

$$\mathbf{b}_1=(1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0) \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_2=(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1).$$

Т.к. $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$, то

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \alpha_3\mathbf{a}_3 + \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2,$$

отсюда

$$\begin{cases} -\alpha_1-\alpha_2+\beta_1=1, \\ \alpha_1+\beta_1=2, \\ \alpha_2+\beta_1=1, \\ -\alpha_3+\beta_2=0, \\ \alpha_3+\beta_2=0; \end{cases}$$

получаем $\alpha_1 = 2/3$, $\alpha_2 = -1/3$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_1 = 4/3$, $\beta_2 = 0$.

$$\mathbf{x} = (-1/3,\ 2/3,\ -1/3,\ 0,\ 0) + (4/3,\ 4/3,\ 4/3,\ 0,\ 0),$$

поэтому $\mathbf{y} = (-1/3,\ 2/3,\ -1/3,\ 0,\ 0)$, $\mathbf{z} = (4/3,\ 4/3,\ 4/3,\ 0,\ 0)$.

Пример 8. Найти ортогональное дополнение подпространства $L \subseteq V$ являющегося областью значений преобразования φ, если φ задано в базисе $\mathbf{e}_1=(1,0,0,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,0)$, $\mathbf{e}_3=(0,0,1,0)$, $\mathbf{e}_4=(0,0,0,1)$ матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение: Найдем образы базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1\varphi \\ \mathbf{e}_2\varphi \\ \mathbf{e}_3\varphi \\ \mathbf{e}_4\varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1\varphi=(1,1,1,2), \quad \mathbf{e}_2\varphi=(2,2,2,2), \quad \mathbf{e}_3\varphi=(1,1,1,1), \quad \mathbf{e}_4\varphi=(1,0,0,0).$$

В качестве базы области значений преобразования возьмем линейно независимые векторы:

$$(1,1,1,2), \quad (2,2,2,2), \quad (1,0,0,0).$$

Координаты данных векторов являются коэффициентами системы, задающей ортогональное дополнение, т.е.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что в качестве базы ортогонального дополнения можно взять вектор: (0, -1, 1, 0).

Пример 9. В пространстве M_n многочленов степени **<n** с действительными коэффициентами скалярное произведение многочленов

$$f(t)=a_0+a_1t+\ldots+a_nt^n \quad \text{и}$$

$$g(t)=в_0+в_1t+\ldots+в_nt^n \quad \text{определяется}$$

формулой $(f,g)=a_0в_0+a_1в_1+\ldots+a_nв_n$. Найти ортогональное дополнение подпространства всех многочленов удовлетворяющих условию $f(3)=0$.

Решение: $f(3)=a_0+3a_1+3^2a_2+\ldots+3^na_n=0$. Получили однородную систему линейных уравнений, задающую подпространство всех многочленов удовлетворяющих условию $f(3)=0$. Используя замечание, приведенное в начале решения задачи 6, получаем, что в качестве базы ортогонального дополнения можно взять вектор:

$$(1,\ 3,\ 3^2,\ \ldots,\ 3^n).$$

Пример 10. Пусть $[x_1,\ x_2,\ x_3]$ - строка координат произвольного вектора $\mathbf{x}$ в некотором ортонормированном базисе. Будет ли линейное преобразование φ евклидова пространства а)ортогональным, б)симметрическим, если $\mathbf{x}\varphi$ находится по следующему правилу:

$$[\mathbf{x}\varphi]=[x_1+x_2,\ x_1-x_2,\ x_3]$$

Решение: Линейное преобразование φ евклидова пространства называется ортогональным, если оно сохраняет скалярный квадрат всякого

вектора. В нашем случае:

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = x_1^2+x_2^2+x_3^2,$$

$$(\mathbf{x}\varphi,\mathbf{x}\varphi) = 2x_1^2+2x_2^2+x_3^2,$$

поэтому преобразование φ не будет ортогональным. Выпишем матрицу этого преобразования:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что если линейное преобразование евклидова пространства хотя бы в одной ортонормированной базе задается симметрической матрицей, то это преобразование симметрическое. Поэтому данное преобразование симметрическое.

Пример 11. С помощью ортогональной матрицы привести к диагональному виду симметрическую матрицу A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение: Известно, что для всякой симметрической матрицы A можно найти такую ортогональную матрицу Q, что матрица $B=Q^{-1}AQ$ будет диагональной (см. §37 [1]), по диагонали стоят характеристические корни матрицы A, взятые с их кратностями.

Для того, чтобы найти ортогональную матрицу Q, мы симметрическую матрицу A рассматриваем как матрицу симметрического преобразования в некотором ортонормированном базисе.

Найдем собственные значения этого симметрического преобразования (характеристические корни матрицы A): $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных векторов:

$$\mathbf{a}_1=(0,\ 1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}),\quad \mathbf{a}_2=(1,\ 0,\ 0),\quad \mathbf{a}_3=(0,\ -1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}).$$

Столбцами искомой ортогональной матрицы Q служат строки координат векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, т.е. матрица Q имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что матрицу A можно привести к диагональному с помощью матрицы Q :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 12. Найти, если оно существует, ортогональное преобразование, переводящее форму f в форму g, если:

$$f=14x_1x_2+48x_2^2-4x_3^2,$$
$$g=49y_1^2-y_2^2-4y_3^2.$$

Решение: Две формы называются ортогонально эквивалентными, если существует ортогональное преобразование, переводящее одну форму в другую.

Решение этой задачи основано на теореме: Каково бы ни было ортогональное преобразование, приводящее к каноническому виду форму f с матрицей A, коэффициентами этого канонического вида будут характеристические корни матрицы A, взятые с их кратностями.

Из этой теоремы следует, что две квадратичные формы тогда и только тогда ортогонально эквивалентны, когда они обладают одним и тем же набором характеристических корней, с учетом их кратностей.

Находя характеристические корни матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad и \quad B = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},$$

видим, что обе матрицы обладают одинаковым набором характеристических корней: $\lambda_1=49$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-4$.

Форма g уже приведена к главным осям, поэтому ее можно считать каноническим видом формы f, к которому она приводится с помощью ортогонального преобразования. Чтобы найти это ортогональное преобразование, переводящее форму f в форму g. На матрицу A смотрим как на матрицу симметрического преобразования в некотором ортонормированном базисе и находим ортонормированную систему собственных векторов этого преобразования, относящихся к собственным значениям $\lambda_1=49$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=-4$ соответственно:

$$\mathbf{a}_1=(\ 1/5\sqrt{2},\ 7/5\sqrt{2},\ 0),$$
$$\mathbf{a}_2=(-7/5\sqrt{2},\ 1/5\sqrt{2},\ 0),$$
$$\mathbf{a}_3=(\ 0,\ 0,\ 1).$$

Матрица ортогонального преобразования, переводящего форму f в форму g, имеет вид:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5\sqrt{2} & -7/5\sqrt{2} & 0 \\ 7/5\sqrt{2} & 1/5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1/5\sqrt{2} & 7/5\sqrt{2} & 0 \\ -7/5\sqrt{2} & 1/5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 7 & 48 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5\sqrt{2} & -7/5\sqrt{2} & 0 \\ 7/5\sqrt{2} & 1/5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Замечание: Если форма g не приведена к главным осям, то нужно форму g привести к каноническому виду (такому же, что и у формы f) с помощью ортогональной матрицы R, а матрица RQ^{-1} является матрицей искомого ортогонального преобразования, переводящего форму f в форму g.

Пример 13. Найти, если оно существует, невырожденное линейное преобразование приводящее форму f к нормальному, а форму g к каноническому виду, если:

$$f = x_1^2 + 26x_2^2 + 10x_1x_2,$$

$$g = x_1^2 + 56x_2^2 + 16x_1x_2.$$

Решение: Выпишем матрицы квадратичных форм:

$$f: \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix}, \qquad g: \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 56 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы существовало невырожденное линейное преобразование необходимо, чтобы одна из квадратичных форм была положительно определенной. В данном случае это форма **f**. Приведем форму f к нормальному виду при помощи преобразования φ:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 + 5x_2, \\ z_2 = x_2; \end{cases}$$

тогда $\quad f = (z_1 - 5z_2)^2 + 26z_2^2 + 10(z_1 - 5z_2)z_2 = z_1^2 + z_2^2.$

Матрица преобразования φ выглядит так:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подействуем преобразованием φ на квадратичную форму **g**:

$$D = C'BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

имеем $\qquad g_1 = t_1^2 + 6t_1t_2 + t_2^2.$

При помощи ортогонального преобразования ψ, приведем форму g_1 к каноническому виду. Найдем ψ: для этого решаем $|D - \lambda E| = 0$, тогда $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ - собственные значения, которым соответствуют собственные векторы

$$\mathbf{b}_1 = (1,\ 1), \qquad \mathbf{b}_2 = (-1,\ 1)$$

Тогда искомое ортогональное преобразование ψ, задается матрицей:

$$F = \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому искомое невырожденное линейное преобразование найдем так:

$$K = CF = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Искомое преобразование задано матрицей K.
Проверка: Подействуем найденным преобразованием на форму **f**:

$$K'AK = \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно, форма **f** приводится к нормальному виду. Подействуем тем же преобразованием на **g**:

$$\begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6\sqrt{2} & -4\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},$$

т.е. **g** приводится при помощи найденого преобразования к каноническому виду.