Сводный тест

«Линейные пространства, линейные преобразования пространств, Евклидовы пространства»

Вариант 1

Даны векторы $a_1 = (1,2,1,0,0), a_2 = (0,1,1,0,0), a_3 = (0,0,1,1,1), b_1 = (1,0,1,0,1), b_2 = (0,1,0,1,0)$.

Задание 1. Найти размерность пространства натянутого на эти векторы.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 2. Найти размерность пересечения пространств L_1 и L_2 натянутых на системы векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 соответственно.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 3. При каком значении параметра p пространство решений однородной системы уравнений, заданной основной матрицей $\begin{pmatrix} p & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ имеет наивысшую размерность?

Ответ: а) -8; б) $-\frac{3}{2}$; в) -1; г) $-\frac{7}{8}$; д) 1; е) 2.

Задание 4. Найти размерность ортогонального дополнения пространства решений данной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 5. Найти сумму элементов первой строки матрицы преобразования, переводящего векторы $a_1 = (1,2), a_2 = (2,3)$ в векторы $b_1 = (1,2), b_2 = (0,3)$ соответственно.

Ответ: а) -12; б) -8; в) -3; г) 0; д) 3; е) 15.

Задание 6. Определить размерность ядра линейного преобразования, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 7. Найти координаты вектора $x = (3,1)$ в базисе $e_1 = (1,1), e_2 = (-1,1)$.

Ответ: а) (2,-1); б) (2,-3); в) (1,1); г) (1,-2); д) (5,1); е) (2,3).

Задание 8. Выяснить, какие из следующих преобразований являются линейными

$$[x\varphi_1] = [x_1, -2x_2, 3x_3], [x\varphi_2] = [x_1^2, (x_2 + x_3)^2, -x_3], [x\varphi_3] = [x_1 + 1, x_2, x_3].$$

Ответ: а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Какие из линейных преобразований

$$[x\varphi_1] = \left[\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_3\right], [x\varphi_2] = [x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_3],$$

$$[x\varphi_1] = \left[\frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}}, \frac{x_1}{\sqrt{3}} + \frac{x_2}{\sqrt{3}} - \frac{x_2}{\sqrt{3}}, x_3\right],$$

являются:

Задание 9. Ортогональными

Ответ: а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 10. Симметрическими

Ответ: а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 11. С помощью каких из формул

$$F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=5x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_2,\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1^2+y_1^2+x_2y_2,$$
$$F_3(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1y_1+2x_1y_2+2x_2y_1+2x_2y_2$$

в двумерном действительном евклидовом пространстве можно задать скалярное произведение

Ответ: а) ни одной; б) F_1; в) F_2; г) F_3; д) F_1 и F_2; е) F_1 и F_3.

Задание 12. Перейти от базиса $a_1=(2,1), a_2=(1,1)$ к ортогональному базису b_1,b_2, приняв $b_1=a_1, b_2=\alpha b_1+a_2$. В ответе указать значение α.

Ответ: а) $-\frac{7}{5}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{5}$; д) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{2}$.

Линейное преобразование задано матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 13. Определить собственное значение преобразования, которому соответствует собственный вектор (0,2,0).

Ответ: а) -2; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3; е) 4.

Задание 14. Найти сумму собственных значений данного преобразования.

Ответ: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7; е) 9.

Задание 15. Привести квадратичную форму $5x_1^2-6x_1x_2-5x_2^2$ к главным осям и найти сумму коэффициентов найденного канонического вида.

Ответ: а) -5; б) 0; в) 3; г) 6; д) 7; е) 9.

Вариант 2

Даны векторы $a_1=(1,2,1,2,3), a_2=(1,0,0,0,2), a_3=(0,1,2,1,0), b_1=(1,2,0,0,1), b_2=(2,0,1,0,1)$.

Задание 1. Найти размерность пространства натянутого на эти векторы.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 2. Найти размерность пересечения пространств L_1 и L_2 натянутых на системы векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2 соответственно.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 3. При каком значении параметра p пространство решений однородной системы уравнений, заданной основной матрицей $\begin{pmatrix} p & -1 & 2 \\ p & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет наивысшую размерность?

Ответ: а) -8; б) $-\frac{3}{2}$; в) -1; г) $-\frac{7}{8}$; д) 1; е) 2.

Задание 4. Найти размерность ортогонального дополнения пространства решений данной системы

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ x_4+2x_5=0 \\ 2x_4+x_6=0 \\ 3x_4+2x_5+x_6=0 \end{cases}.$$

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 5. Найти сумму элементов первой строки матрицы преобразования, переводящего векторы $a_1=(1,2), a_2=(2,3)$ в векторы $b_1=(2,4), b_2=(1,2)$ соответственно.

Ответ: а) -12; б) -8; в) -3; г) 0; д) 3; е) 15.

Задание 6. Определить размерность ядра линейного преобразования, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) 2; г) 3; д) 4; е) 5.

Задание 7. Найти координаты вектора $x=(5,-1)$ в базисе $e_1=(1,1), e_2=(-1,1)$.

Ответ: а) (2,-1); б) (2,-3); в) (1,1); г) (1,-2); д) (5,1); е) (2,3).

Задание 8. Выяснить, какие из следующих преобразований являются линейными

$$[x\varphi_1]=[x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1], [x\varphi_2]=[x_1^{\,2}, x_2-x_1, x_3], [x\varphi_3]=[x_1+x_2, 2x_2, x_3].$$

Ответ: а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Какие из линейных преобразований

$$[x\varphi_1]=[\frac{x_1}{\sqrt{5}}+\frac{2x_2}{\sqrt{5}}, \frac{x_1}{\sqrt{5}}-\frac{2x_2}{\sqrt{5}}, x_3], [x\varphi_2]=[\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}}-\frac{x_2}{\sqrt{2}}, x_3],$$

$$[x\varphi_3]=[x_1, \frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{x_3}{\sqrt{2}}, \frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{x_3}{\sqrt{2}}]$$

являются:

Задание 9. Ортогональными

Ответ: а) ни одно; б) φ_1; в) φ_2; г) φ_3; д) φ_1 и φ_2; е) φ_1 и φ_3.

Задание 10. Симметрическими

Ответ: а) ни одно; б) φ_2 и φ_3; в) φ_1 и φ_2; г) φ_1 и φ_3; д) φ_2; е) φ_3.

Задание 11. С помощью каких из формул

$$F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=x_1^{\,2}-y_2^{\,2}+x_2y_1, F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=3x_1y_1-x_2y_2,$$
$$F_3(x_1,x_2,y_1,y_2)=3x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$$

в двумерном действительном евклидовом пространстве можно задать скалярное произведение

Ответ: а) ни одной; б) F_1; в) F_2; г) F_3; д) F_1 и F_2; е) F_1 и F_3.

Задание 12. Перейти от базиса $a_1=(3,1), a_2=(5,-1)$ к ортогональному базису b_1, b_2, приняв $b_1=a_1, b_2=\alpha b_1+a_2$. В ответе указать значение α.

Ответ: а) $-\frac{7}{5}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{5}$; г) $\frac{3}{5}$; д) $\frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{2}$.

Линейное преобразование задано матрицей $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 13. Определить собственное значение преобразования, которому соответствует собственный вектор (0,0,3).

Ответ: а) -2; б) 0; в) 1; г) 2; д) 3; е) 4.

Задание 14. Найти сумму собственных значений данного преобразования.

Ответ: а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 7; е) 9.

Задание 15. Привести квадратичную форму $2x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$ к главным осям и найти сумму коэффициентов найденного канонического вида.

Ответ: а) -5; б) 0; в) 3; г) 6; д) 7; е) 9.