

Основные формулы теории вероятностей
Сводный справочный материал раздела «Теория вероятностей»

Часть первая. Случайные события http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html

<p>1. Классическое определение вероятности</p> <p>Вероятностью наступления события A в некотором испытании называют отношение</p> $P(A) = \frac{m}{n}$ <p>где n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, а m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.</p>
<p>2. Геометрическое определение вероятности</p> <p>Вероятность наступления события A в испытании равна отношению</p> $P(A) = \frac{g}{G}$ <p>где G – геометрическая мера (длина, площадь, объем), выражающая общее число всех возможных и равновозможных исходов данного испытания, а g – мера, выражающая количество благоприятствующих событию A исходов.</p>
<p>3. Статистическое определение вероятности</p> <p>Вероятность наступления некоторого события A – есть относительная частота</p> $W(A) = \frac{m}{n}$ <p>где n – общее число фактически проведённых испытаний, а m – число испытаний, в которых появилось событие A.</p>
<p>4. Полная группа событий</p> <p>Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:</p> $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1$
<p>5. Теорема сложения вероятностей противоположных событий</p> <p>Сумма вероятностей противоположных событий A, \bar{A} равна единице:</p> $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
<p>7. Теорема сложения вероятностей несовместных событий</p> <p>Вероятность появления одного из двух несовместных событий A или B (без разницы какого), равна сумме вероятностей этих событий:</p> $P(A + B) = P(A) + P(B)$ <p>Аналогичный факт справедлив и для большего количества несовместных событий, например, для трёх:</p> $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C)$
<p>8. Теорема сложения вероятностей совместных событий</p> <p>Вероятность появления <i>хотя бы одного</i> из двух совместных событий A, B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:</p> $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

9. Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Данный факт справедлив и для большего количества событий, например, для трёх:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

10. Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события:

$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$, где $P_A(B)$ – вероятность появления события B при условии, что событие A уже произошло.

Данный факт справедлив и для большего количества событий, например, для трёх:

$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$, где $P_{AB}(C)$ – вероятность появления события C при условии, что события A и B уже произошли.

11. Формула полной вероятности

Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

12. Формулы Байеса

Пусть в результате осуществления одной из гипотез $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ событие A произошло. Тогда:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} \text{ – вероятность того, что имела место гипотеза } B_1;$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} \text{ – вероятность того, что имела место гипотеза } B_2;$$

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{P(A)} \text{ – вероятность того, что имела место гипотеза } B_3;$$

...

$$P_A(B_n) = \frac{P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)}{P(A)} \text{ – вероятность того, что имела место гипотеза } B_n.$$

13. Формула Бернулли

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ где:}$$

n – количество независимых испытаний;

p – вероятность появления события A в каждом испытании и $q = 1 - p$ – непооявления;

P_n^m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз.

(C_n^m – [биномиальный коэффициент](#))

14. Формула Пуассона

$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$, где $\lambda = np$, где:

n – количество независимых испытаний;

p – вероятность появления события A в каждом испытании;

P_m – вероятность того, что в n испытаниях событие A появится ровно m раз,

при этом количество испытаний должно быть достаточно велико (*сотни, тысячи и больше*), а вероятность появления события в каждом испытании весьма мала (*сотые, тысячные и меньше*), в противном случае приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) будет плохим.

15. Локальная теорема Лапласа

Пусть проводится достаточно большое ($> 50-100$) количество n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p . Тогда вероятность $P_n(m)$ того, что в n испытаниях событие A наступит ровно m раз, приближённо равна:

$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функция Гаусса, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$ ($q = 1 - p$).

Значения функции Гаусса можно найти напрямую, с помощью таблицы либо в [MS Excel](#).

Теорема обеспечивает хорошее приближение к точному результату P_n^m (см. п. 13) при условии $npq > 10$ (≈ 10), в противном случае значение $P_n(m)$ будет далеко от истины.

16. Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность p появления случайного события A в каждом независимом испытании постоянна, то вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит не менее m_1 и не более m_2 раз, приближённо равна:

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где:

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – функция Лапласа, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

Значения функции Лапласа можно найти с помощью таблицы либо в [MS Excel](#).

Теорема применима при тех же условиях: количество испытаний должно быть достаточно велико ($n > 50-100$) и произведение $npq > 10$ (≈ 10). В противном случае точность приближения будет неудовлетворительной.

Точное значение можно рассчитать по формуле:

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n^{m_1} + P_n^{m_1+1} + P_n^{m_1+2} + \dots + P_n^{m_2-1} + P_n^{m_2}$, где $P_n^{m_i} = C_n^{m_i} p^{m_i} q^{n-m_i}$ (см. п. 13)

17. Математическое ожидание

а) дискретной случайной величины:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ где:}$$

x_i – все возможные значения случайной величины и p_i – соответствующие вероятности.

б) непрерывной случайной величины:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \text{ где } f(x) \text{ – функция плотности распределения этой случайной величины.}$$

18. Свойства математического ожидания

$M(C) = C$ – математическое ожидание константы равно этой константе.

$M(CX) = CM(X)$ – постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания.

$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ – математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

Для независимых случайных величин справедливо свойство:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$$

19. Дисперсия

$D(X) = M[(X - M(X))^2]$ – есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

а) Дисперсию дискретной случайной величины можно рассчитать по определению:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - M(X))^2 p_n = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i$$

либо по формуле $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$, где $M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i$

б) и аналогичные способы для непрерывной случайной величины:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx \text{ либо } D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \text{ где } M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$$

20. Свойства дисперсии

$D(C) = 0$ – дисперсия постоянной величины равна нулю.

$D(CX) = C^2 D(X)$ – константу можно вынести за знак дисперсии, возведя её в квадрат.

$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + \text{cov}(X; Y)$, где $\text{cov}(X; Y)$ – коэффициент ковариации (см. ниже) случайных величин X, Y . Если случайные величины независимы, то $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

и для независимых случайных величин:

$$D(X - Y) = D(X + (-Y)) = D(X) + D(-1 \cdot Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y)$$

21. Среднее квадратическое (стандартное) отклонение

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

22. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $P(a < X < b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X \leq b)$ либо $P(a \leq X \leq b)$ рассчитывается по единой формуле:

$F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – функция распределения данной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины эти вероятности можно найти и другим способом – с помощью интеграла $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция плотности распределения.

23. Распространённые виды распределений и их числовые характеристики

а) дискретные:

Название распределения	Формула расчёта вероятностей	Возможные значения m	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$	0, 1, 2, 3, ..., n	np	npq
Пуассона	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$	1, 2, 3, ..., n, ...	λ	λ
Геометрическое	$P_m = q^{m-1} p$	1, 2, 3, ..., n, ...	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Гипергеометрическое	$P_m = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	0, 1, ..., min(M, n)	$\frac{M}{N} \cdot n$	$\frac{M(N-M)n(N-n)}{N^2(N-1)}$

б) непрерывные:

Название распределения	Функция плотности $f(x)$	Математическое ожидание	Дисперсия
Равномерное	$\frac{1}{b-a}$ на промежутке от a до b и 0 вне этого промежутка	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(a-b)^2}{12}$
Показательное	$\lambda e^{-\lambda x}$, если $x \geq 0$ и 0, если $x < 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < +\infty$	a	σ^2

24. Коэффициент ковариации (совместной вариации) случайных величин

$\text{cov}(X; Y) = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - M(X))(y_j - M(Y))p_{ij}$ – математическое

ожидание произведения линейных отклонений случайных величин от соответствующих математических ожиданий.

Данный коэффициент удобно вычислять по формуле:

$\text{cov}(X; Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$, где $M(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_{ij}$ для дискретной и

$M(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy$ – для непрерывной случайной величины.

Значение коэффициента не превосходит по модулю $|\text{cov}(X; Y)| \leq \sqrt{D(X) \cdot D(Y)}$, где $D(X), D(Y)$ – дисперсии случайных величин.

Если случайные величины независимы, то $\text{cov}(X; Y) = 0$, обратное в общем случае неверно.

25. Коэффициент линейной корреляции

$r_{xy} = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)}$, где $\sigma(X), \sigma(Y)$ – стандартные отклонения случайных величин.

Данный коэффициент принимает значения из промежутка $-1 \leq r_{xy} \leq 1$

26. Неравенство Чебышева

Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε , не меньше, чем:

$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, где $D(X)$ – дисперсия этой случайной величины.

27. Теорема Чебышева

Если $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ – попарно независимые случайные величины, причём дисперсии их равномерно ограничены (не превосходят постоянного числа C), то, как бы ни было мало положительное число ε , вероятность неравенства

$\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$ будет сколь угодно близка к единице,

если число случайных величин достаточно велико. Иными словами:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1$$