

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
 Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
 «СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА»
 Институт математики и информатики
 Кафедра математического анализа

Рабочая программа дисциплины

Б1.О.20 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

для программы бакалавриата
 по направлению подготовки


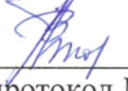

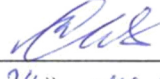

01.03.01 Математика

Направленность (профиль):

Математика в образовании, фундаментальных и прикладных исследованиях

Форма обучения: очная

Автор: Попов Николай Сергеевич, к.ф.-м.н. доцент кафедры математического анализа,
 Институт математики и информатики, popovnserv@mail.ru

РЕКОМЕНДОВАНО	ОДОБРЕНО	ПРОВЕРЕНО
Заведующий кафедрой математического анализа  / С.В. Попов протокол № <u>4</u> от « <u>5</u> » <u>марта</u> 2019 г.	Заведующий кафедрой алгебры и геометрии  Е.С. Никитина протокол № <u>389</u> от « <u>30</u> » <u>апреля</u> 2019 г. Заведующий кафедрой математического анализа  / С.В. Попов протокол № <u>5</u> от « <u>30</u> » <u>апреля</u> 2019 г.	Нормоконтроль в составе ОП пройден Начальник УМО ИМИ  / О.Н. Егорова « <u>20</u> » <u>мая</u> 2019 г.
Рекомендовано к утверждению в составе ОП 01.03.01 Математика Председатель УМК ИМИ  / И.В. Николаева протокол УМК № <u>9</u> от « <u>24</u> » <u>мая</u> 2019 г.		Эксперт УМК ИМИ  / О.А. Тихонова « <u>13</u> » <u>мая</u> 2019 г.

Якутск 2019

1. АННОТАЦИЯ
к рабочей программе дисциплины
Б1.О.20 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
Трудоемкость 6 з.е.

1.1. Цель освоения и краткое содержание дисциплины

Цель освоения: Дать студентам фундаментальные знания по теории аналитических функций и практические навыки использования методов теории аналитических функций для решения задач из других разделов математики, ее приложений.

Краткое содержание дисциплины: Функция комплексной переменной. Дифференциальное исчисление функции комплексной переменной. Конформные отображения. Ряды Лорана. Вычеты. Интегрирование функции комплексной переменной.

1.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Наименование категории (группы) компетенций	Планируемые результаты освоения программы (код и содержание компетенции)	Индикаторы достижения компетенций	Планируемые результаты обучения по дисциплине	Оценочные средства
Теоретические и практические основы профессиональной деятельности	ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Применяет методы математического и алгоритмического моделирования при анализе процессов, явлений и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля ОПК-1.2Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, при решении разнообразных общенаучных и прикладных задач и развития математических теорий и математических методов ОПК-1.3 Формулирует проблему в виде математической задачи, определяет количественные характеристики, используемые для ее постановки	Знать: – основной понятийный и терминологический аппарат фундаментальных дисциплин, определения и свойства математических объектов в перечисленных областях, формулировки ключевых утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений; – предмет и методы фундаментальных математических дисциплин; применение основных результатов фундаментальных математических дисциплин в задачах физики, экономики, естественных наук	Зачет Экзамен Контрольные работы Коллоквиумы

1.3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Индекс	Наименование дисциплины (модуля), практики	Семестр изучения	Индексы и наименования учебных дисциплин (модулей), практик	
			на которые опирается содержание данной дисциплины (модуля)	для которых содержание данной дисциплины (модуля) выступает опорой
Б1.О.20	Теория функций комплексного переменного	5, 6	Б1.О.12 Введение в специальность Б1.О.13 Алгебра Б1.О.15 Аналитическая геометрия Б1.О.17 Математический анализ Б1.О.19 Функциональный анализ	Б1.О.21 Уравнения с частными производными Б1.В.ДВ.08.01 Введение в операционное исчисление Б2.О.01(У) Учебная практика. Научно-исследовательская работа (получение первичных навыков научно-исследовательской работы) Б2.О.02(П) Производственная практика. Научно-исследовательская работа

1.4. Язык преподавания: русский.

2. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Выписка из учебного плана:

Индекс и наименование дисциплины по учебному плану	Б1.О.20 Теория функций комплексного переменного	
Курс изучения	3	
Семестр(ы) изучения	5, 6	
Форма промежуточной аттестации (зачет/экзамен)		
Курсовой проект/ курсовая работа (указать вид работы при наличии в учебном плане), семестр выполнения		
Трудоемкость (в ЗЕТ)	6	
Трудоемкость (в часах) (сумма строк №1,2,3), в т.ч.:	216	
№1. Контактная работа обучающихся с преподавателем (КР), в часах:	Объем аудиторной работы, в часах	В т.ч. с применением ДОТ или ЭО, в часах
Объем работы (в часах) (1.1.+1.2.+1.3.):	120	
1.1. Занятия лекционного типа (лекции)	66	
1.2. Занятия семинарского типа, всего, в т.ч.:	50	
- семинары (практические занятия, коллоквиумы и т.п.)		

- лабораторные работы		
- практикумы		
1.3. КСР (контроль самостоятельной работы, консультации)	4	
№2. Самостоятельная работа обучающихся (СРС) (в часах)		69
№3. Количество часов на экзамен (при наличии экзамена в учебном плане)		27

3. Содержание дисциплины, структурированное по темам с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

3.1. Распределение часов по темам и видам учебных занятий

Тема	Всего часов	Контактная работа, в часах								Часы СРС	
		Лекции	из них с применением ЭО и ДОТ	Семинары (практические занятия, коллоквиумы)	из них с применением ЭО и ДОТ	Лабораторные работы	из них с применением ЭО и ДОТ	Практикумы	из них с применением ЭО и ДОТ		КСР (консультации)
Тема 1. . Комплексные числа. Алгебраические операции над комплексными числами	23	8		6						1	8
Тема 2. Функции комплексного переменного	23	8		6						1	8
Тема 3. Аналитические функции. Условие Коши-Римана	23	8		6						1	8
Тема 4. Интегрирование ФКП	22	7		6						1	8
Тема 5. Ряды в комплексной области	21	7		6							8
Тема 6. Ряды Тейлора и Лорана	20	7		5							8
Тема 7. Нули функции. Изолированные особые точки	19	7		5							7
Тема 8. Вычеты. Применение их к вычислению интегралов	19	7		5							7
Тема 9. Конформные отображения	19	7		5							7
Всего часов	189	66		50						4	69

3.2. Содержание тем программы дисциплины

Тема 1. Комплексные числа. Алгебраические операции над комплексными числами

Содержание темы: Определение, основные понятия, формы записи комплексных чисел. Действия сложения, вычитания, умножения и деления. Возведение в целую степень и извлечение корня из комплексных чисел. Формула Муавра. Множества точек на комплексной плоскости, задание геометрических мест.

Тема 2. Функции комплексного переменного

Содержание темы: Основные геометрические понятия. Функции комплексного переменного, геометрическая интерпретация функции комплексного переменного. Основные элементарные ФКП. Предел и непрерывность

Тема 3. Аналитические функции. Условие Коши-Римана

Содержание темы. Дифференцирование ФКП. Аналитические функции. Гармонические функции, восстановление аналитической функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Тема 4. Интегрирование ФКП

Содержание темы. Интеграл по кривой и его вычисление. Теорема Коши и интегральные формулы Коши

Тема 5. Ряды в комплексной области

Содержание темы: Числовые ряды. Степенные, сводящиеся к ним и двусторонние ряды.

Тема 6. Ряды Тейлора и Лорана

Содержание темы. Ряд Тейлора. Ряд Лорана

Тема 7. Нули функции. Изолированные особые точки

Содержание темы. Нули аналитической функции. Изолированные особые точки.

Тема 8. Вычеты. Применение их к вычислению интегралов

Содержание темы. Вычет функции и его вычисление. Основная теорема о вычетах и ее применение к вычислению контурных интегралов. Приложение вычетов к вычислению некоторых “действительных” интегралов

Тема 9. Конформные отображения

Содержание темы. Общие свойства. Дробно-линейная функция. Функция Жуковского. Интеграл Шварца-Кристоффеля. Отображение многоугольников.

3.3. Формы и методы проведения занятий, применяемые учебные технологии

Лекции, практические занятия, консультации, коллоквиумы, контрольные работы, самостоятельная работа.

Для курса «Теория функций комплексного переменного» на кафедре математического анализа разработан Электронный образовательный ресурс в форме Учебно-методического комплекса дисциплины, содержащий:

- конспект лекций;
- комплект презентаций к лекциям;
- комплект заданий для практических занятий;
- комплект материалов для самоконтроля;
- методические рекомендации для студентов по выполнению самостоятельных и письменных работ.

4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

В течение семестра студенты разбирают и решают задачи, указанные преподавателем к каждому семинару, разбирают и повторяют основные понятия и теоремы, доказанные на лекциях. В семестрах предусмотрены коллоквиумы и контрольные работы:

5 семестр – 2 контрольные работы, 1 коллоквиум, 1 тест, зачетная работа.

6 семестр – 2 контрольные работы, 1 коллоквиум, устный экзамен.

Содержание СРС

№	Наименование раздела (темы) дисциплины	Вид СРС	Трудо-емкость (в часах)	Формы и методы контроля
1	Тема 1. . Комплексные числа. Алгебраические операции над комплексными числами	Решение Задач	8	Проверка задач
2	Тема 2. Функции комплексного переменного	Решение Задач. Конспект	8	Проверка задач. Проверка лекции
3	Тема 3. Аналитические функции. Условие Коши-Римана	Решение Задач	8	Проверка задач
4	Тема 4. Интегрирование ФКП	Решение Задач. Конспект	8	Проверка задач. Проверка лекции
5	Тема 5. Ряды в комплексной области	Решение Задач	8	Проверка задач
6	Тема 6. Ряды Тейлора и Лорана	Решение Задач. Конспект	8	Проверка задач. Проверка лекции
7	Тема 7. Нули функции. Изолированные особые точки	Решение Задач	7	Проверка задач
8	Тема 8. Вычеты. Применение их к вычислению интегралов	Решение Задач	7	Проверка задач
9	Тема 9. Конформные отображения	Решение Задач	7	Проверка задач
	Всего часов		69	

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Решение задач и подготовку к лекциям можно производить с помощью системы Moodle. При пропуске тех или иных лекций, нужно переписать пропущенные лекции и сдать Индивидуальные домашние задания по теме.

Рейтинговый регламент по дисциплине:

Вид выполняемой учебной работы (контролирующие мероприятия)	Количество баллов (min)	Количество баллов (max)
Контрольная работа №1		10
Контрольная работа №2		10
Коллоквиум		10
Решение Индивидуальных работ		30
Посещение занятий		10
Количество баллов для допуска к экзамену (min-max)	45	70

Рейтинговый регламент по дисциплине:

Вид выполняемой учебной работы (контролирующие мероприятия)	Количество баллов (min)	Количество баллов (max)
Контрольная работа №1		10
Контрольная работа №2		10
Коллоквиум		10
Решение Индивидуальных работ		30
Посещение занятий		10
Тест		10
Итоговая контрольная работа		20
Количество баллов для получения зачета (min-max)	60	100

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

6.1. Показатели, критерии и шкала оценивания

Зачет:

Коды оцениваемых компетенций	Индикаторы достижения компетенций	Показатель оценивания (по п.1.2.РПД)	Шкалы оценивания уровня сформированности компетенций/элементов компетенций		
			Уровни освоения	Критерии оценивания (дескрипторы)	Оценка
ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2	Применяет методы математического и алгоритмического моделирования при анализе процессов, явлений и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, при решении разнообразных общенаучных и прикладных задач и развития математической теорий и математических методов	Высокий	<ul style="list-style-type: none"> исследовать ряды на сходимости; классифицировать изолированные особые точки; вычислять вычеты функций; применять вычеты к вычислению интегралов. 	Зачтено
			Базовый	<ul style="list-style-type: none"> геометрический смысл производной функции комплексного переменного; понятие гармонической функции, уравнение Лапласа; понятие конформного отображения. 	Зачтено
			Минимальный	<ul style="list-style-type: none"> навыками дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного. 	Зачтено
			Не освоены	Нет ни одного ответа по минимальной части вопросов	Не зачтено

Экзамен:

Коды оцениваемых компетенций	Индикаторы достижения компетенций	Показатель оценивания (по п.1.2.РПД)	Шкалы оценивания уровня сформированности компетенций/элементов компетенций		
			Уровни освоения	Критерии оценивания (дескрипторы)	Оценка
ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Применяет методы математического и алгоритмического моделирования при анализе процессов, явлений и объектов с целью нахождения эффективных решений общенаучных и прикладных задач широкого профиля Использует фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, при решении разнообразных общенаучных и прикладных задач и развития математической теории и математических методов Формулирует проблему в виде математической задачи, определяет количественные характеристики, используемые для ее постановки	Высокий	<ul style="list-style-type: none"> исследовать ряды на сходимости; классифицировать изолированные особые точки; вычислять вычеты функций; применять вычеты к вычислению интегралов. 	отлично
			Базовый	<ul style="list-style-type: none"> геометрический смысл производной функции комплексного переменного; понятие гармонической функции, уравнение Лапласа; понятие конформного отображения. 	хорошо
			Минимальный	<ul style="list-style-type: none"> понятие модуля и аргумента комплексного числа; алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи комплексного числа. понятие функции комплексного числа, и его свойства. 	удовлетворительно
			Не освоены	Нет ни одного ответа по минимальной части вопросов	неудовлетворительно

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И ПРИМЕРНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ТЕСТОВ

Тест текущего контроля по теме: «Комплексные числа»

1. Найти $\operatorname{Re} z$, если $z = \frac{i}{1-i}$
2. Найти $\operatorname{Im} z$ числа из задания 1.
3. Найти модуль комплексного числа: $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
4. Найти аргумент (главное значение) комплексного числа: $z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$
5. Вычислить: $\sqrt[5]{-27}$.
6. Построить множество точек:
 а) $|z-1+i|=1$; б) $|z+i|\leq 3$; в) $|z-4i|\geq 4$; г) $|z-4i|+|z+4i|=10$; д) $|z-1|=|z+i|$.
 е) $\operatorname{Re}(z)^2 = a$, ж) $|z^2-1|=a > 0$,
7. Какую линию задает уравнение:
 а) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$, $a > \frac{1}{2}|z_1-z_2|$; б) $||z-z_1|-|z-z_2||=2a$, $a < \frac{1}{2}|z_1-z_2|$.
8. Представить в комплексной форме выражение $\sqrt{1+i}$.
9. Определить x и y , если $x+iy = \sqrt{a+bi}$.

Образец контрольной работы №1

1. Найти по определению производной точки, в которых дифференцируема функция:
 а) $w = \operatorname{Re} z$; б) $w = |z|^2$; в) $w = z \operatorname{Re} z$
2. Доказать, что если функции $f(z)$ и $g(z)$ дифференцируемы в точке z_0 , то в этой точке дифференцируемы и функции:
 а) $F_3(z) = f(z) + g(z)$; б) $F_2(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, $g(z_0) \neq 0$

3. ДОКАЗАТЬ ФОРМУЛЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРОИЗВОДНОЙ:

- а) $(sh z)' = ch z$; б) $(\cos z)' = -\sin z$.
4. Найти, используя условия Коши – Римана, точки, в которых дифференцируемы следующие функции и написать формулы для их производных:
 а) $w = e^{ch z}$; б) $w = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z}$. в) $w = ze^{-z}$; г) $w = \frac{1}{tgz + ctgz}$.

Образцы контрольной работы №2

1. Вычислить по интегральной формуле Коши: $\int_{|z|=2a} \frac{e^z dz}{z^2 + a^2}$
2. Вычислить по интегральной формуле Коши: $\int_{|z|=2} \frac{Ch z}{(z-1)(z+i)} dz$

3. Вычислить по интегральной формуле Коши: $\int_{|z|=4} \frac{\cos z}{z^2 - \pi^2} dz$
4. Вычислить по интегральной формуле Коши: $\int_{|z|=4} \frac{(z+i)\sin^2 z}{z^2 + 9} dz$

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3 ПО ТЕМЕ: «СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯД ТЕЙЛОРА»

1. Найти радиус сходимости ряда по формуле Коши-Адамара:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-1)^n$ б) $\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n$ в) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} z^{2n+1}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$

2. Найти круг сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(z-1-i)^n}{3^n}$$

3. Разложить в ряд в окрестности точки z_0 функции:

а) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}$ б) $f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z$ в) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$

Коллоквиум №1 по теме «Степенные ряды»

Вопросы:

1. Последовательности голоморфных функций
2. Степенные ряды.
3. Теорема единственности и теорема Лиувилля.
4. Особые точки степенного ряда

Задачи:

1. Исследовать ряд на абсолютную сходимость.
2. Найти радиус сходимости степенного ряда.

Коллоквиум №2 по теме «Аналитическое продолжение. Элементарные ф.к.п»

Вопросы:

1. Продолжение с действительной оси.
2. Соотношения для продолжений функций.
3. Свойства элементарных функций.
4. Отображения элементарных функций.
5. Основные принципы аналитического продолжения.
6. Понятие римановой поверхности.
7. Аналитическое продолжение через границу.
8. Примеры построения аналитического продолжения.
9. Продолжение с помощью степенных рядов.
10. Правильные и особые точки аналитических функций.
11. Полная аналитическая функция.

Вопросы зачета

1. Поле комплексных чисел. Алгебраическая, тригонометрическая форма. Геометрическое изображение к.ч. Модуль и аргумент к.ч.
2. Последовательности и ряды к.ч.
3. Предел и непрерывные функции комплексных переменных. Многозначные функции. Непрерывные ветви. Римановы поверхности.
4. Кривые и области на плоскости. Теорема Жордана.
5. Стереографическая проекция. Свойства.
6. Расширенная комплексная плоскость. Сферическое расстояние.
7. Дробно-линейное отображение. Свойства. Простейшие ДЛО.
8. Комплексная производная. Условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера). Теорема Меньшова.
9. Формальные частные производные. Производные основных элементарных функций.
10. Сопряженные гармонические функции.
11. Конформные отображения. Теорема Бора. Теорема Меньшова.
12. Функция Жуковского.
13. Экспонента, логарифм и степенная функция.
14. Спряжяемые и гладкие кривые. Определение интеграла.
15. Свойства интеграла.
16. Интегральная теорема Коши для односвязной области. Следствие.
17. Интегральная теорема Коши для многосвязной области.
18. Формула Коши.
19. Интеграл типа Коши.
20. Неопределенный интеграл и первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.
21. Теорема Морера.
22. Теорема о среднем. Принцип максимального модуля.
23. Лемма Шварца. Следствие.
24. Формула Сохоцкого. Главное значение интеграла.
25. Пространство голоморфных функций.
26. Первая теорема Вейерштрасса.
27. Вторая теорема Вейерштрасса.
28. Область сходимости степенного ряда. Первая теорема Абеля. Формула Коши-Адамара. Вторая теорема Абеля.
29. Разложение голоморфной функции в степенной ряд. Теорема Коши.
30. Теорема единственности для голоморфных функций. Аналитическое продолжение.
31. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
32. Особые точки на границе круга. Теорема Прингсхейма. Теорема Фабри.

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1 ПО ТЕМЕ: «РЯД ЛОРАНА И ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ»

1. Разложить в ряд Лорана функцию $f = ze^{\frac{z}{z-5}}$ в точке $z_0 = 5$.

2. Найти изолированные особые точки. $f = \frac{(z + \pi) \sin \frac{\pi}{2} z}{z \sin z^2 z}$ в точке $z_0 = -2 - i$.

3. Разложить в ряд Лорана функцию $f = \frac{z - 2}{(z + 1)(z - 3)}$ в точке $z_0 = -2 - i$.

4. Указать тип изолированной точки $f = \frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$, $z_0 = 0$.

5. КАКИМИ ТОЧКАМИ ЯВЛЯЮТСЯ ТОЧКИ $z_0 = 0$ и $z = \infty$ ДЛЯ РЯДА

$$f = \frac{c - 4}{z^{-1}} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2 ПО ТЕМЕ: «ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ»

1. Вычислить интегралы с помощью вычета:

а) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}$ б) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi$

2. Вычислить $\int_{\partial D} \frac{z}{z + 3} e^{\frac{1}{3z}} dz$, ($D: |z| > 4$).

3. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, где a и $b \in \mathbb{R}$, причем $a \neq b$.

4. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$.

5. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x + 1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

6. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$.

ОБРАЗЦЫ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3 ПО ТЕМЕ: «КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ»

1. Найти образ D при отображении голоморфной ветвью, выделяемой ее значением в указанной точке $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \sqrt{z} \Big|_{z=i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

2. Найти образ области при указанном отображении $D = \{z : |z| = 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{8}\}$, $w = z^3$.

3. Найти образ области при указанном отображении $D = \{z : |z| > 1, z \notin [1,3]\}$, $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

4. Найти образ области при указанном отображении $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\}$, $w = e^z$.

5. Найти образ $B = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1-z}{1+z}$

Коллоквиум №1 по теме «Ряд Лорана и изолированные особые точки»

Вопросы:

1. Определение ряда Лорана. Главная и правильная часть. Область сходимости.
2. Разложение аналитической функции в ряд Лорана.
3. Типы изолированных особых точек.
4. Предел функции в устранимой особой точке.
5. Теорема об аналитической ограниченной в кольце функции.
6. Теорема о модуле функции вблизи полюса.
7. Теорема об аналитической неограниченной в окрестности особой точки функции.
8. Теорема Сохоцкого – Вейерштрасса.
9. Поведение аналитической функции в окрестности бесконечно удаленной точки.

Коллоквиум №2 по теме «Теория вычетов и их приложения»

1. Определение и вывод формулы вычисления вычетов.

2. Основная теорема теории вычетов

3. Интегралы вида $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$.

4. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$.

5. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$.

Лемма Жордана.

6. Ослабление ограничений на функции в условиях леммы Жордана.

7. Вычисление несобственных интегралов с помощью леммы Жордана.

8. Мероморфные функции

9. Случай многозначных функций

10. Понятие логарифмического вычета

11. Подсчет нулей аналитической функции

12. Теорема Руше

13. Основная теорема высшей алгебры

Экзаменационные вопросы

1. Определение, основные понятия, формы записи комплексных чисел.
2. Действия сложения, вычитания, умножения и деления

3. Возведение в целую степень и извлечение корня из комплексных чисел.
4. Формула Муавра.
5. Множества точек на комплексной плоскости, задание геометрических мест.
6. Вычисление вычетов.
7. Основная теорема Коши о вычетах.
8. Основные геометрические понятия. Функции комплексного переменного
9. Геометрическая интерпретация функции комплексного переменного
10. Основные элементарные ФКП
11. Предел и непрерывность
12. Дифференцирование ФКП.
13. Аналитические функции. Гармонические функции, восстановление аналитической функции.
14. Геометрический смысл модуля и аргумента производной
15. Интеграл по кривой и его вычисление.
16. Теорема Коши и интегральные формулы Коши
17. Числовые ряды. Степенные, сводящиеся к ним и двусторонние ряды.
18. Ряд Тейлора
19. Ряд Лорана
20. Вычеты в конечных и бесконечных особых точках.
21. Вычисление вычетов.
22. Основная теорема Коши о вычетах.
23. Применение вычетов к вычислению интегралов. Лемма Жордана.

Экзаменационные задачи

1. Пусть $z = x + iy, \neq 0$. Записать в алгебраической форме $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^{-2}}$.
2. Доказать, что для произвольных $z_1, z_2, z_3, \in C$, $z_1 \operatorname{im}(\bar{z}_2 z_3) + z_2 \operatorname{im}(\bar{z}_3 z_1) + z_3 \operatorname{im}(\bar{z}_1 z_2) = 0$
3. Вычислить модуль и главное значение аргумента числа $z = -9 + 3i\sqrt{3}$.
4. Вычислить и изобразить число $\sqrt[4]{\sqrt{3} + i}$.
5. Доказать, что при допустимых значениях $\alpha \in R$ справедливо равенство
$$\left(\frac{1 + itg\alpha}{1 - itg\alpha} \right)^n = \frac{1 + itgn\alpha}{1 - itgn\alpha} \quad (n \in N).$$
6. Вычислить $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{60}$.
7. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{3^n}$.
8. Исследовать на абсолютную сходимость ряды:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (1+i)^n & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-i)^n}{3^n} \\ \text{г) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4i)^n (n+2^n)}{3^n} & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^4}{4n} & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n} \end{array}$$

9. Выяснить, где голоморфны функции и найти их производные:

$$\text{а) } f = \operatorname{tg} z \quad \text{б) } f = \frac{\cos z}{\cos z - \sin z} \quad \text{в) } (e^z - e^{-z})^{-2}.$$

10. Восстановить голоморфную функцию по заданной функции:

$$\text{а) } \operatorname{Im} f = 2xy, f(0) = 0; \quad \text{б) } \operatorname{Re} f = x^3 + 6x^2 - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0.$$

11. Какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается, если отображение осуществляется следующими функциями:

$$\text{а) } w = z^2 + 2z \quad \text{б) } w = \frac{1}{z} \quad \text{в) } w = z^3$$

12. Найти коэффициент растяжения ρ и угол поворота α при заданных отображениях $w = f(z)$ в заданных точках z_0 :

$$\text{а) } w = \frac{z+i}{z-i}; \quad \text{б) } w = 3iz + 2, z_0 = 1+i \quad \text{в) } w = \frac{1}{z}, z_0 = 3i.$$

13. Найти образ круга $\{w: |z-11| < 2\}$ при отображении $w = \frac{z+1}{z-2}$.

14. Найти образ полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z < 1\}$ при отображении $w = \frac{4z}{z+1}$.

15. Найти образ $D = \{z: z \notin [0; +\infty)\}$ при отображении регулярной ветвью функции $w = \sqrt{z}$, выделяемой ее значениями в точке $z = -1$.

16. Найти образ $D = \{z: |z| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0\}$ при отображении $w = z^2$.

17. Найти образ D при отображении функцией $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$:

$$\text{а) } D = \{z: |z| > 1, z \notin [-2; -1], z \notin [1; +\infty)\} \operatorname{Re} z > 0;$$

$$\text{б) } D = \left\{ z: \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4} \right\};$$

$$\text{в) } D = \{z: |z| > 2\}.$$

18. Найти образ $D = \{z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = e^{iz}$.

19. Вычислить интеграл $\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz$ (n – целое число).

20. Пользуясь формулой Ньютона - Лейбница вычислить интеграл $\int_{-i}^i z e^{z^2} dz$.

21. Вычислить интеграл $\int_i^{ei} \frac{\ln z}{z} dz$ по отрезку прямой, соединяющей точки $z_1 = i$ и $z_2 = ei$.

22. Вычислить по интегральной формуле Коши интеграл:

$$\text{a) } \int_{|z-1|=1} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz \quad \text{б) } \int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 9}$$

23. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{(x-a)^3} dz$ если точка a лежит внутри контура C .

24. Найти радиус сходимости ряда по формуле Коши-Адамара:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n^n (z-1)^n \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n z^n \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} z^{2n+1} \quad \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$$

25. Найти круг сходимости каждого из следующих степенных рядов:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(z-1-i)^n}{3^n} \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^{n^2-n} z^{n!}$$

26. Найти функцию, отображающую полукруг $D = \{z: |z| < 1, \text{Im} z > 0\}$, на верхнюю полуплоскость при условиях: а) $w(-1) = 0$; б) $w(0) = 1$; в) $w(1) = \infty$.

27. Доказать, что при стереографической проекции окружности, расположенные на сфере, проектируются в окружности или в прямые на плоскости. Какие окружности на сфере соответствуют прямым на плоскости?

28. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $z = 1 + itga$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

29. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + 1)^{-\alpha} \left(e^{\frac{\pi i}{4}} - 1 \right)$ на абсолютную сходимость.

30. Исследовать функцию $f(x + iy) = \sqrt[3]{xy}$, $z = x + iy \in C$ на голоморфность.

31. Пусть $f(z)$ - голоморфная функция. Доказать формулы:

$$\text{a) } \frac{\partial}{\partial z} (|f(z)|) = \frac{1}{2} |f(z)| \frac{f'(z)}{f(z)} \quad \text{б) } \frac{\partial}{\partial z} (\text{Re } f(z)) = \frac{1}{2} f'(z) \quad \text{в) } \frac{\partial}{\partial z} (\text{Im } f(z)) = \frac{1}{2i} f'(z)$$

32. Найти множество всех тех точек z_0 , в которых коэффициент линейного растяжения r равен 1 при следующих отображениях:

$$\text{a) } w = z^2 - 2z \quad \text{б) } w = \frac{1}{z} \quad \text{в) } w = \frac{1+iz}{1-iz}$$

33. Найти множество всех тех точек z_0 , в которых угол поворота α равен нулю при следующих отображениях:

$$\text{a) } w = iz^2 \quad \text{б) } w = z^2 - 2z \quad \text{в) } w = \frac{i}{z} \quad \text{г) } w = \frac{1+iz}{1-iz}$$

34. Найти функцию конформно отображающую область:

1. $D = \{z: |z| < 1\}$ на область $D_1 = \{w: |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям:

$$\text{a) } w(i) = i; \quad \text{б) } w\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{4i}{5}.$$

2. $D = \{z: \text{Im } z > 0\}$ на область $D_1 = \{w: |w| < 1\}$ и удовлетворяющую условиям:

$$\text{a) } w(0) = i; \quad \text{б) } w(-1) = 1; \quad \text{в) } w(\infty) = -1.$$

35. Построить риманову поверхность функции $w = \sqrt{z^2}$.

36. Построить риманову поверхность функции $w = \ln(z^2 + 1)$

37. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z^2 + a^2} dz$, если контур C содержит внутри себя круг $|z| \leq a$.

38. Вычислить интеграл $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$ если точки 0 и 1 обе лежат внутри контура C .

39. Разложить в ряд по степеням z функцию

$$f(z) = \cos z e^{z \operatorname{ctg} \alpha}, (\alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi \dots)$$

40. Разложить в ряд в окрестности точки z_0 функции:

$$\text{а) } f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z} \quad \text{б) } f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z \quad \text{в) } f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

41. Разложить функцию $f(z) = \frac{z-1}{2z^2 + 5z + 2}$ в окрестности точки $z_0 = -1$.

42. Разложить функцию $f(z) = \frac{z}{z-2}$ в окрестности точки $z_0 = -1$.

43. Доказать формулы:

$$\text{а) } \frac{2}{(1+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2)z^n, (|z| < 1); \quad \text{б) } \frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}, (|z| < |a|, a \neq 0).$$

44. Опираясь на разложение функции $(1+z)^\alpha$ в ряд Тейлора, доказать формулы:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} z^{2n}, (|z| < 1); \quad \text{б) } \arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, (|z| < 1).$$

45. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в ряд Лорана:

а) в кольце $1 < z < 2$;

б) в окрестности бесконечно удаленной точки;

в) в окрестности точки $z = 1$.

46. Написать всевозможные разложения $f(z)$ в ряд Лорана:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z^2}{(z+3)(z-4)} \text{ в точке } z_0 = -2; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{(z-5)(z+2)} \text{ в точке } z_0 = 3.$$

47. Для каждой из указанных ниже функций требуется найти изолированные особые точки, определить их типы и исследовать поведение функции в точке $z = \infty$:

$$\text{а) } f(z) = \frac{1}{z-z^3} \quad \text{б) } f(z) = \frac{z^4}{1+z^4} \quad \text{в) } f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^3} \quad \text{г) } f(z) = \operatorname{tg} z$$

$$\text{д) } f(z) = \frac{e^{-z}}{1+z^2} \quad \text{е) } f(z) = \operatorname{coz} \frac{z}{1-z} \quad \text{ж) } f(z) = z^4 e^{\frac{1}{z}} \quad \text{з) } f(z) = \frac{\sin z}{z^5(z^2+9)}$$

$$\text{к) } f(z) = \frac{z^2}{\sin z} \quad \text{л) } f(z) = \operatorname{ctg} \frac{1}{z} \quad \text{м) } f(z) = e^{\operatorname{ctg} \frac{1}{z}}$$

48. Можно ли функцию $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки $z=0$?

49. Разложить $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}$ в ряд Лорана по степеням $z-2$ в кольце $0 < |z-2| < \infty$.

50. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}$ в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ в кольце V , содержащем точку $z = -1$.

51. Найти главную часть ряда Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$ функции $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{z^2 + b^2}$.

52. Вычислить интегралы с помощью вычета:

а) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{5 + 3 \cos \varphi}$ б) $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \varphi}{5 - 4 \cos \varphi} d\varphi$

53. Вычислить $\int_{\partial D} \frac{z}{z+3} e^{\frac{1}{3z}} dz$, ($D: |z| > 4$).

54. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}$, где a и $b \in \mathbb{R}$, причем $a \neq b$.

55. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}$.

56. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$.

57. Вычислить интеграл $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx$.

58. Найдите функцию $w(z)$, осуществляющую конформное отображение области $D = \{z : \operatorname{Im} z > 0, z \notin [0, in], n > 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

59. Отобразить области $D = \left\{ z : |z| < 1 \text{ и } \left| z - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \right\}$ конформно в полосу

$$D_1 = \{w : |z| > 1, |z - i| < 1\}.$$

60. Отобразить на верхнюю полуплоскость круговую луночку $\{z : |z| > 1, |z - i| < 1\}$.

61. Отобразить плоскость с разрезом по отрезку $[-1; 1]$ на верхнюю полуплоскость.

Образцы экзаменационных билетов

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1

1. Определение модуля, аргумента (главного значения аргумента) комплексного числа.
2. Теорема Лорана

3. Дифференцируемость функции комплексного переменного в смысле действительного анализа (выводы приращения функции, производных по действительным переменным и формальных переменных по Коши).
4. Вычислить по интегральной формуле Коши $\int_{|z+i|=3} \sin z \frac{dz}{z+i}$
5. Найти образ $B = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1-z}{1+z}$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2

1. **ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЙ (НЕПРЕРЫВНОЙ, ГЛАДКОЙ, КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ, ЖОРДАНОВОЙ И СПРЯМЛЯЕМОЙ)**
2. Вычисление вычета функции (связь вычета с коэффициентом C_{-1} ; формула вычета для случая полюса первого и n -го порядков).
3. Геометрический смысл аргумента производной функции.
4. Найти все точки, в которых дифференцируема функция $f = x^2 y^2$
5. Указать тип изолированной особой точки для функции $f = \frac{1 - \cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$.

**7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы,
необходимой для освоения дисциплины**

№	Автор, название, место издания, издательство, год издания учебной литературы, вид и характеристика иных информационных ресурсов	Наличие грифа, вид грифа	НБ СВФУ, кафедральная библиотека и кол-во экземпляров	Электронные издания: точка доступа к ресурсу (наименование ЭБС, ЭБ СВФУ)
Основная литература				
1	Свешников, А.Г. Теория функций комплексной переменной: учеб.для студ.физ.спец. / А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов ; МГУ им. М.В. Ломоносова. - 6-е изд. - М.: Физматлит, 2004. - 336 с. : ил.	МО РФ	44	ЭБС УБО http://biblioclub.ru/ (2010 г.)
2	Волковийский, Л.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного: учебное пособие для вузов/ Л.И. Волковийский, Г.Л. Лунц, И.Г. Араманович. – М.: Наука, 2002. – 313 с.	МОН РФ	25	ЭБС УБО http://biblioclub.ru/
Дополнительная литература				
1	Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной: учебное пособие / И. М. Петрушко, А. Г. Елисеев, В. И. Качалов, С. Ф. Кудин. – Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 368 с.			ЭБС «Лань» https://e.lanbook.com/
2	Карасев, И.П. Теория функций комплексного переменного: учебное пособие / И.П. Карасев. – Москва: Физматлит, 2008. – 215 с.			ЭБС УБО http://biblioclub.ru/
3	Посицельская, Л.Н. Теория функций комплексной переменной в задачах и упражнениях: учебное пособие / Л.Н. Посицельская. – Москва: Физматлит, 2007. – 134 с.			ЭБС УБО http://biblioclub.ru/

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее сеть-Интернет), необходимых для освоения дисциплины

1. <http://yagu.s-vfu.ru/> – СДО Moodle;
2. <http://opac.s-vfu.ru/wlib/> – электронная библиотека СВФУ;
3. <http://www.mccme.ru/free-books> – свободно распространяемые книги издательства МЦНМО.

9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Наименование оборудованных учебных кабинетов	Перечень оборудования и технических средств обучения
1.	Лекционные аудитории	Мультимедийные комплексы для презентаций, проектор мультимедийный, ноутбук, колонки
2.	Учебные кабинеты для практических занятий (семинаров)	Учебные рабочие места, наглядные пособия
3.	Библиотека	Каталожная система библиотеки
4.	Читальный зал библиотеки	Рабочие места с ПК – для обучения работе с индексирующими поисковыми системами в Интернете

Минимальный необходимый для реализации образовательного процесса перечень материально-технического обеспечения включает в себя: ноутбук, мультимедийный проектор, экран.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

10.1. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются следующие информационные технологии:

- использование на занятиях электронных изданий (чтение лекций с использованием слайд-презентаций, электронного учебного пособия);
- организация взаимодействия с обучающимися посредством СДО Moodle.

10.2. Перечень программного обеспечения

Используемое программное обеспечение: Microsoft Office (по лицензионному соглашению с АО «СофтЛайн Трейд»), Open Office(свободно распространяемое ПО), Foxit PDF Reader (свободно распространяемое ПО), 7ZIP(свободно распространяемое ПО).

10.3. Перечень информационных справочных систем

1. <http://e.lanbook.com/> – электронно-библиотечная система, включающая в себя как электронные версии книг издательства «Лань» и других ведущих издательств учебной литературы, так и электронные версии периодических изданий по естественным, техническим и гуманитарным наукам.
2. <http://www.iprbookshop.ru/> – электронно-библиотечная система IPRbooks, являющаяся научно-образовательный ресурсом для решения задач обучения в России и за рубежом. Уникальная платформа ЭБС IPRbooks объединяет новейшие информационные технологии и учебную лицензионную литературу. Контент ЭБС IPRbooks отвечает

требованиям стандартов высшей школы, СПО, дополнительного и дистанционного образования.

3. <https://www.studentlibrary.ru/> – многопрофильный образовательный ресурс "Консультант студента" является электронной библиотечной системой (ЭБС), предоставляющей доступ через сеть Интернет к учебной литературе и дополнительным материалам, приобретенным на основании прямых договоров с правообладателями.
4. <https://biblioclub.ru/> – электронно-библиотечная система «Университетская библиотека онлайн» - учебные, научные издания, первоисточники, художественные произведения различных издательств. Журналы. Мультимедийная коллекция: аудиокниги, аудиофайлы, видеокурсы, экспресс-подготовка к экзаменам, презентации, тесты, цифровые карты, онлайн-энциклопедии, словари Коллекции: «Естественные науки».

